

УДК 519.862.5

О выборе лучшей из двух схем инвестирования предприятия с помощью барицентра

Д-р. физ.-мат. наук **Ахтямов А.М.** akhtyamovam@mail.ru

Зиннатуллин Ф.Ф. farit-zinnatullin@yandex.ru

Башкирский государственный университет

450074, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32

Вопросам инвестирования посвящено много работ. В большинстве из них рассматривается распределение инвестиционного капитала среди множества альтернативных вариантов капиталовложений. Настоящая работа отличается от традиционных работ тем, что рассматриваются две различных схемы инвестирования в одно и то же предприятие (одну отрасль), которые имеют одинаковый объем инвестирования за некоторый промежуток времени. Задача состоит в том, чтобы найти правила, с помощью которых только по виду графиков сразу можно было бы сказать, по какой из двух схем инвестирования предприятие произведет больший объем продукции за рассматриваемый промежуток

Для разностной модели акселератора получены три теоремы о выборе лучшей из двух схем инвестирования предприятия с одинаковым горизонтом планирования и объемом инвестирования. Теоремы позволяют, не решая разностного уравнения, только по виду двух схем инвестирования выбрать ту, которая даст больший объем продукции. В первой теореме доказано, что больший объем продукции дает та схема инвестирования, у которой среднее арифметическое взвешенное инвестиций находится левее. Вторая теорема утверждает, что при росте инвестиций лучше та схема, у которой скорость роста меньше, а третья – что убывающий график инвестирования лучше возрастающего. Приводится также механический смысл теорем и иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: инвестирование, схема инвестирования, диаграмма инвестирования, центр масс, разностная модель акселератора.

On the choice of the best of the two investment schemes enterprise with barycenter

D.Sc. **Akhtyamov A.M.** akhtyamovam@mail.ru

Zinnatullin F.F. farit-zinnatullin@yandex

Bashkir State University

450074, Ufa, Zacky Validi St., 32

It is received three theorems about choosing the better of the two investment schemes with the same planning horizon and the volume of investment for a difference accelerator model. Theorems allow, without solving the differential equation, since only two investment schemes to choose one that will give greater output. It is proved that a larger volume of products that investment scheme, in which the weighted average of investment is to the left in the first theorem. The second theorem states that the growth of investments is the best scheme, in which the growth rate is smaller and the third theorem states that decreasing investment schedule better growing. We also give a mechanical sense of Theorems and illustrative examples.

Many works are devoted to questions of investment. In the majority of them distribution of the investment capital among a set of alternative options of capital investments is considered. The real work

differs from traditional works as that two various schemes of investment into the same enterprise (one branch) which have the identical volume of investment for some period are considered.

The task consists in finding rules by means of which only by the form schedules at once it would be possible to tell on what of two schemes of investment the enterprise will make the bigger volume of production for the considered interval

Keywords: investment, investment scheme, chart of investment, the center of mass, the difference accelerator model.

Введение. Вопросам инвестирования посвящено много работ [1-19]. В большинстве из них рассматривается распределение инвестиционного капитала среди множества альтернативных вариантов капиталовложений. Настоящая работа отличается от традиционных работ тем, что рассматриваются две различных схемы инвестирования в одно и то же предприятие (одну отрасль), которые имеют одинаковый объем инвестирования за время $[0, T]$.

Задача состоит в том, чтобы найти правила, с помощью которых только по виду графиков сразу можно было бы сказать, по какой из двух схем инвестирования предприятие произведет больший объем продукции за время $[0, T]$.

Математическая модель и основные допущения. Выводы статьи основываются на разностной модели акселератора [12, С. 14–15]

$$a \Delta y_{t+1} - y_t = u_t, \quad (1)$$

где u_t – капиталовложения в момент времени (год, квартал, месяц) t , $\Delta y = y_{t+1} - y_t$ – прирост конечной продукции (в стоимостном выражении) за следующий момент времени (год, квартал, месяц), a – фактор акселерации, выражающий сумму капиталовложений на единицу продукции (в стоимостном выражении).

Заметим, что в настоящей статье Δy равно $y_{t+1} - y_t$, а не $y_t - y_{t-1}$, и мы рассматриваем влияние инвестиций на рост продукции, а не влияние прироста национального дохода на размер вызванных им капиталовложений. Поэтому в нашем случае коэффициент a лучше именовать коэффициентом приростной фондоемкости. «Если провести физическую аналогию, этот показатель играет роль как бы массы, характеризующей инерцию экономической системы: чем больше требуется капиталовложений на дополнительную единицу производства конечного продукта, тем более инерционна система (меньше ее реакция на изменение объема капитальных вложений).» [12, С. 158]. Например, если мы хотим, чтобы выпуск продукции в будущем году вырос на 20 млн. руб., то при коэффициенте приростной фондоемкости 3 придется потратить 60 млн. руб. капиталовложений, а при коэффициенте 4 – 80 млн. руб., т.е. больше.

Основные допущения, которые мы принимаем в статье, связаны с разностной моделью акселератора (1): не учитывается инфляция, капитализация (дисконтирование) и выбытие фондов на предприятии. Эти допущения будут справедливы, в частности, в случае, когда горизонт планирования инвестиций T настолько мал, что влияние капитализации, инфляции и выбытия фондов незначительно. Предполагается также, что на полученные инвестиции на предприятии мгновенно закупается оборудование, которое уже в следующую единицу времени выдает готовую продукцию.

Постановка задачи. Рассмотрим две различных схемы инвестирования предприятия с одинаковым горизонтом планирования T :

$$u_{i,t}, \quad i = 1, 2, \quad t = 0, 1, \dots, T - 1. \quad (2)$$

Согласно модели (1) имеем

$$a(y_{i,t+1} - y_{i,t}) = u_{i,t}, \quad i = 1, 2, \quad t = 0, 1, \dots, T - 1 \quad (3)$$

где $(y_{i,t+1} - y_{i,t})$ — объём продукции в стоимостном выражении, произведённые предприятием в промежутке времени $[t, t + 1]$. А $u_{1,t}$ и $u_{2,t}$ — объёмы инвестиций в момент времени t .

Объём продукции произведённый изначально один и тот же для обеих схем:

$$Y_{1,0} = Y_{2,0} = Y_0 \quad (4)$$

Будем считать, что совокупный объём инвестиций за время $[0, T - 1]$ в обеих схемах инвестирования одинаковый:

$$\sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{t=0}^{T-1} u_{1,t} = \sum_{t=0}^{T-1} u_{2,t} \quad (5)$$

Требуется определить какая из схем инвестирования $u_{i,t} (i = 1, 2)$ в расширение производства даст больший общий выпуск продукции за время $[1, T]$, то есть требуется определить в каком случае величина $Y_1 = \sum_{t=1}^T y_{1,t}$ будет больше величины $Y_2 = \sum_{t=1}^T y_{2,t}$.

Выбор лучшей из двух схем инвестирования, имеющих разные средние арифметические взвешенные.

Первое утверждение, доказанное в статье, опирается на понятие среднего арифметического взвешенного.

Напомним, что среднее арифметическое взвешенное набора вещественных чисел $x_1, \dots, x_n$ с вещественными весами $w_1, \dots, w_n$ определяется как

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Это понятие связано с понятием механики центр масс.

Как известно, центр масс, центр инерции, барицентр (от др.-греч. βαρύς — тяжёлый + κέντρον — центр) — геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе. Координаты центра масс определяются формулами [20]

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}, \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}$$

где m_k — массы материальных точек, образующих систему; x_k, y_k, z_k — координаты этих точек; $\sum m_k$ — масса системы.

Рассмотрим ситуацию, когда инвестиции $u_{i,t}$ ($i = 1, 2$) начисляются через равные промежутки времени. Тогда среднее арифметическое взвешенное инвестиций вычисляется по формуле:

$$t_{i,c} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} t u_{i,t}}{\sum_{t=0}^{T-1} u_{i,t}}$$

Поскольку согласно условию (5) знаменатели в последней формуле совпадают, то условие, состоящее в том, что среднее арифметическое взвешенное 1-ой схемы инвестирования находится левее среднего арифметического взвешенного 2-ой схемы инвестирования ($t_{1,c} < t_{2,c}$) можно записать следующим образом:

$$\sum_{t=0}^{T-1} t(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0 \quad (6)$$

Теорема 1 (о среднем взвешенном инвестиций). Если для схем инвестирования $u_{1,t}$ и $u_{2,t}$ выполняются условия (4), (5), (6), то $Y_1 - Y_2 > 0$.

Т.е. 1-я схема инвестирования дает больший объем выпуска продукции.

Доказательство. Найдем величины Y_1 и Y_2 . Используя (3) и (4), последовательно получим:

$$y_{1,1} = y_0 + u_{1,0}/a, y_{1,2} = y_0 + u_{1,0}/a + u_{1,1}/a, y_{1,3} = y_0 + u_{1,0}/a + u_{1,1}/a + u_{1,2}/a, \dots, y_{1,T} = y_0 + u_{1,0}/a + u_{1,1}/a + u_{1,2}/a + u_{1,3}/a + \dots + u_{1,T-2}/a + u_{1,T-1}/a$$

Просуммируем левые и правые части равенств:

$$Y_1 = \sum_{t=1}^T y_{1,t} = T(y_0 + u_{1,0}/a) + (T-1)u_{1,1}/a + (T-2)u_{1,2}/a + \dots + 2u_{1,T-2}/a + u_{1,T-1}/a.$$

Аналогично и для второй схемы инвестирования имеем:

$$Y_2 = \sum_{t=1}^T y_{2,t} = T(y_0 + u_{2,0}/a) + (T-1)u_{2,1}/a + (T-2)u_{2,2}/a + \dots + 2u_{2,T-2}/a + u_{2,T-1}/a$$

Подставим то, что получили в разность $Y_1 - Y_2$:

$$\begin{aligned} Y_1 - Y_2 &= \sum_{t=1}^T y_{1,t} - \sum_{t=1}^T y_{2,t} = \\ &= T(y_0 + u_{1,0}/a) + (T-1)u_{1,1}/a + (T-2)u_{1,2}/a + \dots + 2u_{1,T-2}/a + u_{1,T-1}/a \\ &\quad - T(y_0 + u_{2,0}/a) + (T-1)u_{2,1}/a + (T-2)u_{2,2}/a + \dots + 2u_{2,T-2}/a + u_{2,T-1}/a \\ &= T \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t})/a - \sum_{t=0}^{T-1} t(u_{1,t} - u_{2,t})/a. \end{aligned}$$

Из (5) и (6) следует, что последнее выражение больше нуля. Откуда и получаем требуемый результат $Y_1 - Y_2 > 0$.

Этой теореме можно придать следующий механический смысл. Если использовать понятие механики «масса» и говорить не об объеме инвестиций, а о «денежной массе», перечисленной на расширение производства, то под средним взвешенным инвестиций можно понимать центр масс

(барицентр). Тогда из двух схем инвестирования, по которым за промежуток времени $[0, T-1]$ перечисляется одинаковая денежная масса, лучшей является та схема, у которой барицентр находится левее.

Из доказательства теоремы 1 следует также, что если для уравнений (3) выполняются условия (4), (5), а вместо условия (6) выполняется условие

$$\sum_{t=0}^{T-1} t(u_{1,t} - u_{2,t}) = 0, \quad \text{то } Y_1 - Y_2 = 0.$$

Заметим, что среднее арифметическое взвешенное схемы инвестирования, симметричной относительно прямой $t = (T - 1)/2$, лежит на этой прямой. Отсюда вытекает следствие

Следствие (о симметричных инвестициях). Если схемы инвестирования $u_{1,t}$ и $u_{2,t}$ симметричны относительно прямой

$$t = (T - 1)/2$$

и для них выполняются условия (4), (5), то $Y_1 = Y_2$.

Пример 1. Предполагается ежеквартально в течение одного года вкладывать в расширение производства предприятия денежные средства в совокупном объеме $U = U_1 = U_2 = 40$ млн. руб.
 $\sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) = 0$; $U_1 = U_2 = 40$ млн. руб.

Предложено два способа инвестирования ($u_{1,t}$ и $u_{2,t}$, $t = 0, 1, 2, 3$):

$u_{1,t}$	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$
млн.руб.	10	10	10	10
$u_{2,t}$	$u_{2,0}$	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$
млн.руб.	15	5	5	15

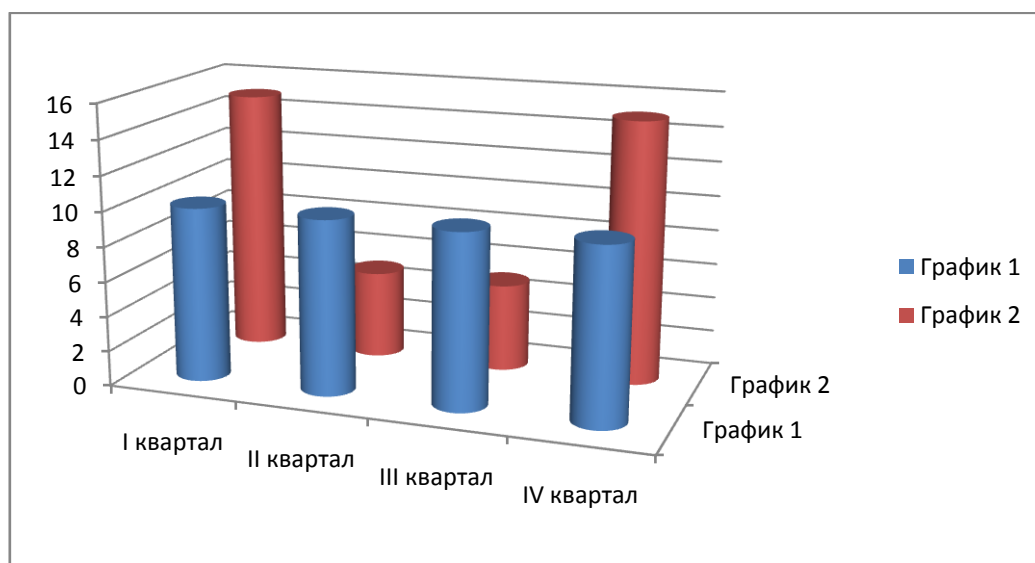


Рис. 1. Две симметричные схемы инвестирования

Так как обе схемы инвестирования симметричны относительно прямой

$$t = 3/2,$$

то из следствия к теореме 1 вытекает, что обе схемы инвестирования дадут одинаковый объем продукции.

Проверим верность нашего вывода непосредственным подсчетом. Для определенности начальный выпуск продукции для обеих схем инвестирования будем считать равным $y_{1,0} = y_{2,0} = y_0 = 5$, и $a = 1$.

Используем формулу (3) для каждой схемы и сложим полученные ежеквартальные объемы произведенной продукции.

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= 5 + 10 = 15, y_{1,2} = 15 + 10 = 25, y_{1,3} = 25 + 10 = 35, y_{1,4} = 35 + 10 = 45; \\ y_{2,1} &= 5 + 15 = 20, y_{2,2} = 20 + 5 = 25, y_{2,3} = 25 + 5 = 30, y_{2,4} = 30 + 15 = 45; \\ Y_1 &= 45; \\ Y_2 &= 45. \end{aligned}$$

Действительно предположение подтвердилось.

Выбор лучшей из двух схем инвестирования, имеющих разную скорость роста.

Следующее правило касается скорости роста инвестиций.

Теорема 2 (о скорости роста инвестиций). Если для двух схем инвестирования $u_{1,t}$ и $u_{2,t}$ выполняются условия (4), (5), а также

$$u_{1,t} - u_{1,t-1} < u_{2,t} - u_{2,t-1}, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots, T-1 \quad (7)$$

то $Y_1 - Y_2 > 0$.

Доказательство. Перепишем условие (7) в следующем виде:

$$u_{1,t} - u_{2,t} < u_{1,t-1} - u_{2,t-1}, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots, T-1.$$

Отсюда $u_{1,0} - u_{2,0} > u_{1,1} - u_{2,1} > \dots > u_{1,T-1} - u_{2,T-1}$. С учётом условия (5) имеем

$$(u_{1,t} - u_{2,t}) > 0, \quad t = 0, 1, \dots, k \text{ и } (u_{1,t} - u_{2,t}) < 0, \quad t = k+1, \dots, T-1. \quad (8)$$

Докажем (8) от противного. Предположим, что (8) не верно. Тогда либо

$$(u_{1,t} - u_{2,t}) > 0 \text{ при } t = 0, 1, \dots, T-1,$$

либо

$$(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0 \text{ при } t = 0, 1, \dots, T-1,$$

либо

$$(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0 \text{ при } t = 0, 1, \dots, k \text{ и } (u_{1,t} - u_{2,t}) > 0 \text{ при } t = k+1, \dots, T-1.$$

Однако эти неравенства невозможны. Неравенство

$$(u_{1,t} - u_{2,t}) > 0 \text{ при } t = 0, 1, \dots, T-1$$

влечет неравенство $\sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) > 0$, которое противоречит неравенству (5).

Неравенство $(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0$ при $t = 0, 1, \dots, T-1$ приводит к неравенству $\sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) < 0$, которое также противоречит (5).

Неравенства

$(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0$ при $t = 0, 1, \dots, k$ и $(u_{1,t} - u_{2,t}) > 0$ при $t = k+1, \dots, T-1$ не возможны в силу самого условия (7).

Таким образом, предположив, что (8) не верно, в любом случае приходим к противоречию.

Покажем, теперь, что $\sum_{t=0}^{T-1} t(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0$, то есть то, что среднее арифметическое взвешенное первой схемы инвестирования расположено левее среднего арифметического взвешенного второй схемы инвестирования.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T-1} t(u_{1,t} - u_{2,t}) &= (u_{1,1} - u_{2,1}) + 2(u_{1,2} - u_{2,2}) + 3(u_{1,3} - u_{2,3}) + \dots + (T-1)(u_{1,T-1} - u_{2,T-1}) = \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) + \\ &+ (u_{1,2} - u_{2,2}) + 2(u_{1,3} - u_{2,3}) + \dots + (T-2)(u_{1,T-1} - u_{2,T-1}) = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - (u_{1,0} - u_{2,0}) + \\ &+ (u_{1,2} - u_{2,2}) + 2(u_{1,3} - u_{2,3}) + \dots + (T-2)(u_{1,T-1} - u_{2,T-1}) = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - (u_{1,0} - u_{2,0}) + \\ &+ \sum_{t=2}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) + (u_{1,3} - u_{2,3}) + \dots + (T-3)(u_{1,T-1} - u_{2,T-1}) = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - (u_{1,0} - u_{2,0}) + \\ &+ \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - (u_{1,0} - u_{2,0}) - (u_{1,1} - u_{2,1}) + (u_{1,3} - u_{2,3}) + \dots + \\ &+ (T-3)(u_{1,T-1} - u_{2,T-1}) = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - (u_{1,0} - u_{2,0}) + \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - ((u_{1,0} - u_{2,0}) + (u_{1,1} - u_{2,1})) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - \sum_{t=0}^k (u_{1,t} - u_{2,t}) + \sum_{t=k}^{T-1} (t-k)(u_{1,t} - u_{2,t}) = \\
 & = (k+1) \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - (k+1)(u_{1,0} - u_{2,0}) - k(u_{1,1} - u_{2,1}) - \dots - \\
 & \quad -(u_{1,k} - u_{2,k}) + \sum_{t=k}^{T-1} (t-k)(u_{1,t} - u_{2,t}).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=0}^{T-1} t(u_{1,t} - u_{2,t}) & = (k+1) \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) - \\
 & - (k+1)(u_{1,0} - u_{2,0}) - k(u_{1,1} - u_{2,1}) - \dots - \\
 & \quad -(u_{1,k} - u_{2,k}) + \sum_{t=k}^{T-1} (t-k)(u_{1,t} - u_{2,t})
 \end{aligned}$$

Из условия (5) следует, что первое слагаемое в правой части последнего выражения равно нулю:

$$(k+1) \sum_{t=0}^{T-1} (u_{1,t} - u_{2,t}) = 0.$$

А из (8) следует, что последующие слагаемые отрицательны.

Действительно,

$$-(k+1)(u_{1,0} - u_{2,0}) - k(u_{1,1} - u_{2,1}) - \dots - (u_{1,k} - u_{2,k}) < 0,$$

т.к. $(u_{1,t} - u_{2,t}) > 0$ при $t = 0, 1, \dots, k$,

и

$$\sum_{t=k}^{T-1} (t-k)(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0$$

Т.к. $(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0$ при $t = k+1, \dots, T-1$

Следовательно,

$$\sum_{t=0}^{T-1} t(u_{1,t} - u_{2,t}) < 0$$

То есть выполняется условие (6). Поэтому из теоремы 1 получаем $Y_1 - Y_2 > 0$. Что и требовалось доказать.

Этой теореме можно придать следующий механический смысл. Если использовать понятие механики «скорость», то условие (7) означает, что скорость роста инвестирования в каждый промежуток времени у первой схемы инвестирования меньше, чем у второй. Саму теорему 2 можно интерпретировать так: из двух схем инвестирования, имеющих одинаковый объем инвестирования за промежуток времени $[0, T-1]$, лучшей является та схема, у которой меньше скорость роста.

Пример 2. Предполагается ежеквартально в течение одного года вкладывать в расширение производства предприятия денежные средства в совокупном объеме $U = U_1 = U_2 = 64$ млн. руб.
 $\sum_{t=0}^{T-1}(u_{1,t} - u_{2,t}) = 0$; $U_1 = U_2 = 64$ млн. руб.

Предложено два способа инвестирования ($u_{1,t}$ и $u_{2,t}$, $t = 0, 1, 2, 3, 4$):

$u_{1,t}$	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$
млн.руб.	10	14	18	22
$u_{2,t}$	$u_{2,0}$	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$
млн.руб.	7	13	19	25

Так как скорость роста первой схемы меньше, то делаем вывод, полагаясь на выше доказанное следствие, что первая схема прибыльнее. Изначальный доход для обеих схем равным $y_{1,0} = y_{2,0} = y_0 = 5$, и $a = 1$.

Проверим верность нашего вывода. Используем формулу (3) для каждой схемы и сложим полученные ежеквартальные доходы.

$$y_{1,1} = 5 + 10 = 15, y_{1,2} = 15 + 14 = 29, y_{1,3} = 29 + 18 = 47, y_{1,4} = 47 + 22 = 69;$$

$$y_{2,1} = 5 + 7 = 12, y_{2,2} = 12 + 13 = 25, y_{2,3} = 25 + 19 = 44, y_{2,4} = 44 + 25 = 69;$$

$$Y_1 = 160; Y_2 = 150.$$

Действительно предположение подтвердилось: $Y_1 - Y_2 > 0$.

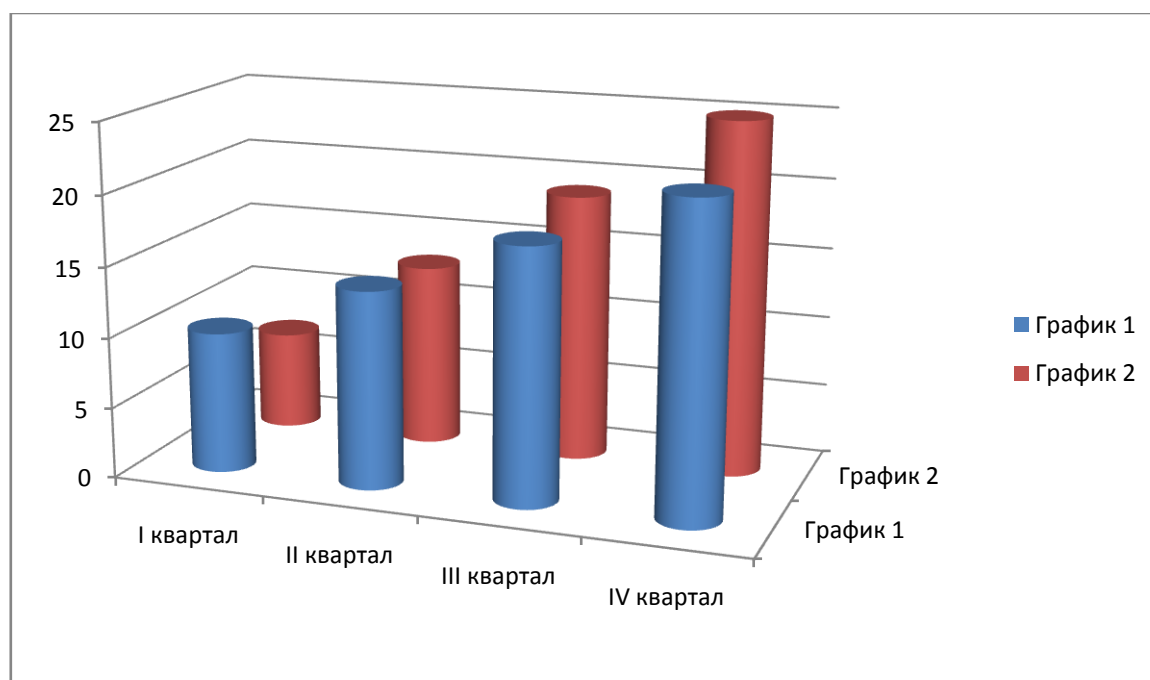


Рис.2. Схемы инвестиций с разной скоростью роста

Выбор лучшей из двух схем инвестирования, имеющих разную монотонность.

Следующее утверждение касается монотонных инвестиций.

Теорема 3. Если для двух схем инвестирования $u_{1,t}$ и $u_{2,t}$ выполняются условия (4), (5), а также

$$u_{1,t-1} > u_{1,t}, u_{2,t-1} < u_{2,t} \text{ при } t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (9)$$

то $Y_1 - Y_2 > 0$.

Условие (9) означает, что инвестирование по первой схеме идёт по убыванию, а по второй возрастает. Отсюда вытекает, что из схем инвестирования, имеющих одинаковый объем инвестирования за время $[0, T-1]$ убывающая схема инвестирования выгоднее.

Доказательство.

Условие (9) можно записать в следующем виде

$u_{1,t} - u_{1,t-1} < 0, u_{2,t} - u_{2,t-1} > 0$ при $t = 0, 1, \dots, T-1$. Из этого следует: $u_{1,t} - u_{1,t-1} < u_{2,t} - u_{2,t-1}$ при $t = 0, 1, \dots, T-1$. То есть выполнилось условие (7). Отсюда и из теоремы 2 вытекает утверждение теоремы 3.

Пример 3.

Предполагается ежемесячно в течение одного года инвестировать в расширение производства предприятия денежные средства в совокупном объеме $U = 78$ млн. руб. Предложено два способа инвестирования $u_{1,t}$ и $u_{2,t}, t = 0, 1, \dots, 11$:

$u_{1,t}$	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{1,4}$	$u_{1,5}$	$u_{1,6}$	$u_{1,7}$	$u_{1,8}$	$u_{1,9}$	$u_{1,10}$	$u_{1,11}$
Млн.руб	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$u_{2,t}$	$u_{2,0}$	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$u_{2,4}$	$u_{2,5}$	$u_{2,6}$	$u_{2,7}$	$u_{2,8}$	$u_{2,9}$	$u_{2,10}$	$u_{2,11}$
Млн.руб	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

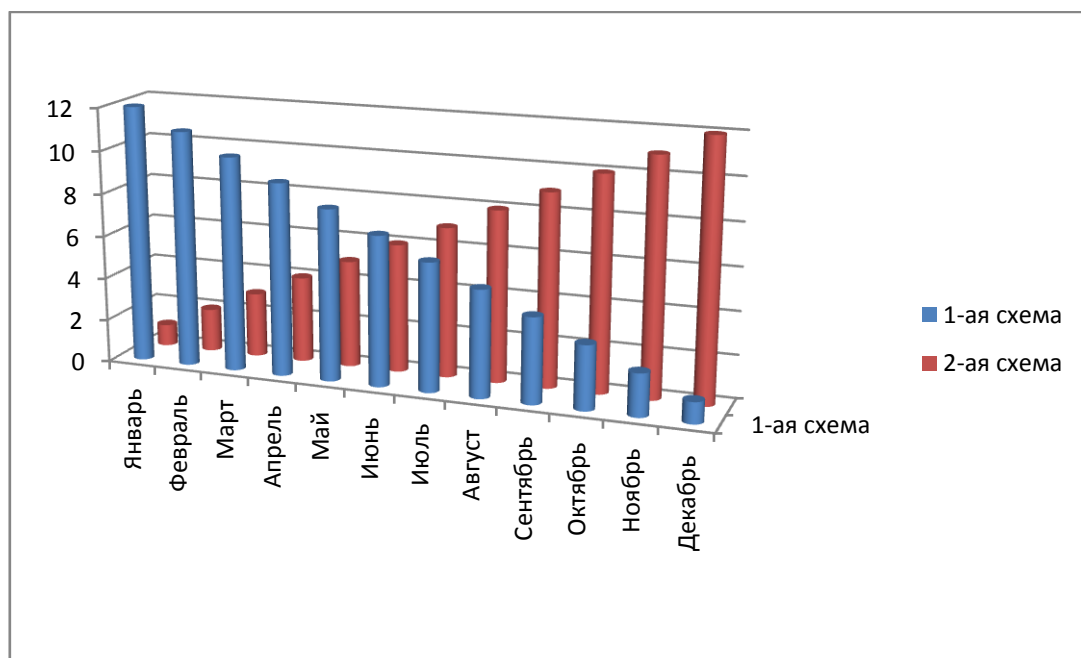


Рис.3. Убывающая и возрастающая схемы инвестиций

Для 1-ой схемы наибольший объем вложений приходится на начало года с постепенным убыванием, а во 2-ой схеме, наоборот, в начале года минимальные вложения с постепенным возрастанием (рис. 3).

Пусть изначальный доход для обеих схем равен $y_{1,0} = y_{2,0} = y_0 = 10$ млн. руб и, $a = 1$. Так как первая схема убывает, а вторая возрастает, то из теоремы 3 следует, что 1-ая схема прибыльнее, чем 2-ая.

Проверим верность нашего вывода непосредственными вычислениями. Используем формулу (3) для каждой схемы и сложим полученные ежемесячные доходы.

$y_{1,1} = 10 + 12 = 22$	$y_{1,2} = 22 + 11 = 33$	$y_{1,3} = 33 + 10 = 43$	$y_{1,4} = 43 + 9 = 52$
$y_{1,5} = 52 + 8 = 60$	$y_{1,6} = 60 + 7 = 67$	$y_{1,7} = 67 + 6 = 73$	$y_{1,8} = 73 + 5 = 78$
$y_{1,9} = 82 + 4 = 86$	$y_{1,10} = 82 + 3 = 85$	$y_{1,11} = 85 + 2 = 87$	$y_{1,12} = 87 + 1 = 88$
$y_{2,1} = 10 + 1 = 11$	$y_{2,2} = 11 + 2 = 13$	$y_{2,3} = 13 + 3 = 16$	$y_{2,4} = 16 + 4 = 20$
$y_{2,5} = 20 + 5 = 25$	$y_{2,6} = 25 + 6 = 31$	$y_{2,7} = 31 + 7 = 38$	$y_{2,8} = 38 + 8 = 46,$
$y_{2,9} = 46 + 9 = 55$	$y_{2,10} = 55 + 10 = 65$	$y_{2,11} = 65 + 11 = 76$	$y_{2,12} = 76 + 12 = 88$

В результате получаем $Y_1 = 770$ млн. руб; $Y_2 = 484$ млн. руб.

В результате вывод подтвердился: $Y_1 - Y_2 > 0$.

Закключение. Таким образом, если выпуск продукции подчиняется закону (1) и выполнены (4), (5), можно, используя результаты теорем, определить без расчётов наилучшую схему инвестирования.

Наибольший выпуск будет у той схемы, у которой центр масс левее другой схемы. Если одна из диаграмм инвестирования убывает, другая возрастает, лучше та, которая убывает. Если скорость роста инвестирования первой диаграммы ниже чем у второй, то первая даст наибольший объём продукции.

Список литературы

1. Абросимов А.А. Финансово-бюджетные потоки, оценка и повышение результативности бюджетного контроля // Экономика и управление. 2011. – №7. – С. 117–120.
2. Астахов А.С. О преодолении разрыва между теорией и практикой моделирования инвестиционных решений // Экономика и мат. методы. 2005. – Т. 41. № 3. – С. 122–127.
3. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
4. Ахтямов А.М. Инерция падения объемов выпуска продукции при росте инвестиций // Экономика и управление: научно-практический журнал. 2006. – № 1. – С. 56–58.
5. Ахтямов А.М. О выборе наилучшего графика из двух схем инвестирования предприятия // Экономика и математические методы. – 2013. Т. 49. № 2. – С. 97–105.
6. Бронштейн Е.М., Черняк Д.А. Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных проектов // Экономика и математические методы. 2005. – Т. 41. № 2. – С. 21–28
7. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. – М.: Дело, 2001. – 888 с.
8. Горелик А.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
9. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.
10. Кушаев Р.М. Управление инвестициями предприятия // Экономика и экологический менеджмент. 2012. № 1.
11. Ласкина Л.Н., Сивякова М.В. Разработка модели управления портфелем новой продукции машиностроительного предприятия // Экономика и экологический менеджмент. 2012. № 1.

12. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2003. – 520 с.
13. *Мартынов Г.В., Малков У.Х.* Развитие межотраслевой модели воспроизводственной и инвестиционной динамики // Экономика и математические методы. 2011. – Т. 47. № 2. – С.24–42.
14. Математические методы принятия решений в экономике: Учебник / Под ред. В.А. Колемаева / ГУУ. – М.: Финстатинформ, 1999. – 386 с.
15. Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов. – М.: Экономика, 2000.
16. *Овчинникова Т.И., Ворохобин Д.А.* Динамика и факторы развития региона // Современная экономика: проблемы и решения. 2010. Т. 11. №11. – С.35–41.
17. *Преображенская Н.В., Семенова А.А.* Оценка экономической эффективности инновационно-инвестиционных проектов // Микроэкономика. 2011. – № 3. – С.56–60.
18. *Протопопова А.А.* Особенности инвестиционных вложений в информационно-техническую инфраструктуру с точки зрения проектного анализа // Микроэкономика. 2011. – № 3. – С.61–63.
19. Социально-экономическое прогнозирование развития территориальных систем / Под общей редакцией членов корреспондентов РАН Гизатуллина Х.Н., Татаркина А.И. – Екатеринбург: Уро РАН, 2001. – 228 с.
20. *Тарг С.М.* Центр инерции (центр масс) // Физическая энциклопедия / под общ. ред. А.М. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1999. – Т. 5. – С. 624–625. – 692 с.

Статья поступила в редакцию 15.04.2015 г.