УДК 637.5

Управление инвестициями предприятия

Кушаев Р.М.

Kushaev Rashid (RashidZone8@yandex.ru)

ГАОУ ВПО «Дагестанский государственный институт
народного хозяйства»

В статье рассматриваются методы оптимального управления инвестициями предприятия на рынке ценных бумаг, и возможность применения этих методов на практике.

Ключевые слова: модель Марковица, портфель максимальной эффективности

Investment Management Company

Kushaev R.M.

Kushaev Rashid (RashidZone8@yandex.ru)

Dagestan State Institute of National Economy

This article describes the best methods of company investment management in the stock market and the possibility of applying these methods in practice.

Keywords: model of Markowitz portfolio optimization, portfolio of maximum efficiency

Инвестиционные проекты могут быть самыми разнообразными – от плана производства новой продукции до целесообразности покупки тех или иных ценных бумаг. В данной статье мы рассмотрим метод инвестирования в ценные бумаги.

Задача оптимизации инвестирования в ценные бумаги заключается в том, чтобы определить, какая доля капитала должна быть отведена для каждой из ценных бумаг так чтобы величина ожидаемого дохода и уровень риска оптимально соответствовали целям инвестора. Это означает, что идеальной стратегией для инвестора была бы стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако, в основном, практика работы на финансовых рынках свидетельствует о том, что большей ожидаемой доходности обычно соответствует и больший риск вложений. Таким образом, инвестору необходимо установить ограничения относительно способа, по которому может быть построен портфель. Например, целевой задачей может быть минимизация риска, но при каком-то минимальном уровне дохода, или максимизация дохода, при фиксированном уровне риска, а также при ограничениях на минимальные и максимальные доли, которые могут быть инвестированы в каждый актив.

Для поиска оптимального портфеля ценных бумаг инвестором могут использоваться разные методики в соответствии с индивидуальными критериями оптимальности относительно ожидаемой доходности и уровня риска.

Модель Марковица

Решение проблемы оптимизации инвестиционного портфеля было разработано американским ученым Г. Марковицем, который предложил математическую формализацию задачи. Марковиц считал что инвестор, распределяя свой капитал между ценными бумагами, руководствуется всего двумя показателями: E(r) – ожидаемой доходностью, и σ^2 - мерой риска. Разработанная им модель основана на том, что значения риска различных ценных бумах связаны между собой. Следовательно, при определении общего риска портфеля, должна рассматриваться ковариация по каждой паре случайных величин портфеля. Ковариация двух случайных величин показывает степень их зависимости. Если случайные величины независимы, то их ковариация равна нулю. Положительная ковариация случайных величин означает, что отклонение одной из этих случайных величин в большую сторону от своего среднего значения вызывает отклонение другой случайной величины от ее среднего значения скорее в большую сторону, чем в меньшую, и наоборот.

В модели Марковица применяются следующие основные показатели:

1. В качестве доходности актива применяется математическое ожидание доходности.

2. В качестве риска актива применяется среднее квадратичное отклонение доходности.

3. Взаимосвязь между активами выражается коэффициентом ковариации.

Для ковариации случайных величин выполняются соотношения

$$\left|Cov(R_i, R_j)\right| \le \sigma_i * \sigma_j, \quad Cov(R_i, R_j) = \sigma_j^2$$

Если $\sigma_i > 0$ и $\sigma_j > 0$, то величина

$$\frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i * \sigma_j}$$

называется корреляцией случайных величин R_i и R_j. Случайные величины R_i и R_j являются активами портфеля.

Мы знаем, что, когда доход по рискованному активу является случайной величиной, то доход по портфелю активов в целом является взвешенной по стоимости средней доходов по отдельным активам, т.е. доходность портфеля ценных бумаг, определяемого набором чисел $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, и имеет вид:

$$R = \sum_{j=1}^{n} \omega_j R_j$$

Таким образом, целевая функция задачи минимизации риска имеет следующий вид:

$$\sigma_j^{\ 2} = D(R) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j Cov(R_{i,}R_j). \to \min$$

Где σ^2 - общий риск портфеля, ω-доли активов в портфеле.

Целевая функция представляет собой дисперсию инвестиционного портфеля, состоящего из n видов ценных бумаг. Целевая функция в основном задается с учетом набора ограничений. Например, может быть ограничение, что все средства должны быть полностью потрачены. Должно выполняться соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$$

Возможно, $\omega_j < 0$ при некоторых j. Это означает, что соответствующие ценные бумаги не куплены, а проданы без покрытия на срок, или что то же самое, выпущены, и полученные при этом средства вложены в другие ценные бумаги.

Определение набора чисел $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$- это и есть решение задачи оптимизации портфеля.

Еще ограничение заключается в том, что минимальный риск должен быть достигнут при условии получения определенного минимального ожидаемого дохода. Тогда ожидаемый доход случайной величины R определяется по следующему ограничению. Эти ограничения отображаются как

$$\mu_j = E(R) = \sum_{j=1}^{n}\omega_j E(R_j),$$

В матрично-векторном формате задача формирования портфеля минимального риска такова:

$$\sigma^2 = D(R) = \omega^T \sum \omega \to \min$$

$$\mu = E(R) = \omega^T n$$

$$\omega^T \iota = 1$$

Портфель максимальной эффективности

Рассмотрим задачу обратную первой, оптимизация инвестиционного портфеля с фиксированным риском не более заданного и максимальным для этого уровня риска доходом.

Пусть ожидаемая доходность как минимум для двух активов портфеля различна:

$$\exists i \neq \left(i, j = \overline{1, N}\right): \mu_i \neq \mu_j,$$

а матрица ковариаций положительно определена:

$\exists i \in [1, N] : \omega_i \neq 0$ и $\sum_{i,j=1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} > 0$

Эти предположения обеспечивают существование и единственность решения задачи оптимизации

Максимизация дохода портфеля в зависимости от отношения инвестора к риску сводится к следующей задаче оптимизации:

Найти ω_i, максимизирующие ожидаемую эффективность портфеля

$$\mu_p = \sum_{j=1}^{n} \omega_j E(R_j) \to \max$$

При условии, что обеспечивается заданное значение риска портфеля, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j Cov(R_{i,} R_j) \leq \sigma_p^2$$

Поскольку ω_i-доли, то в сумме они должны составлять единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Данная формализация называется портфелем Марковица максимальной эффективности.

В матрично-векторном формате задача формирования портфеля максимальной эффективности такова:

$$\mu_p = E(R_j) = \omega^T n \to \max$$

$$\omega^T \sum \omega \leq \sigma_p^2$$

$$\omega^T \iota = 1.$$

Построение оптимального портфеля

Проиллюстрируем алгоритм решения задачи, где требуется минимизация риска портфеля ценных бумаг при заданной доходности.

Пусть ω_j - доля от вложения капитала, приходящаяся на j-й вид ценных бумаг. Требуется найти доли ω_j, соответствующих вложений в те или иные ценные бумаги, обеспечив при этом минимальное значение ковариации эффективности портфеля («риска») и при условии обеспечения заданного значения эффективности портфеля в целом. Мы предполагаем, что ω_j может быть отрицательно. Обозначим через $r = (R_1, R_2, ..., R_n)^T$ - вектор доходностей активов за рассматриваемый период времени, а $\omega = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ - вектор, определяющий структуру портфеля;

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \omega^T \iota = 1$$

, где в момент t=0 доходность портфеля за один период является случайной величиной

$$R=\omega^T r=\sum_{i=1}^{n}\omega_i R_i=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\\dots\\R_n\end{bmatrix}$$

С математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2;

$$\mu=E(R)=\omega^T n,$$

$$\sigma^2=D(R)=\omega^T\sum\omega,$$

Где через n и $\sum$ обозначены соответственно математическое ожидание и матрица ковариаций вектора r

$$E(R)=n,\quad D(r)=\sum.$$

В векторно-матричных обозначениях задача оптимизации портфеля ценных бумаг имеет вид:

$$\sigma^2=\omega^T\sum\omega\to\min$$

При условиях

$$\omega^T n=m$$

$$\omega^T\iota=1$$

Первым шагом будет преобразование функций ограничения таким образом, чтобы в правой части остался 0, т.е.: $\omega^T n-m=0,$ $\omega^T\iota-1=0$

Полученные выражения ограничителя затем умножаются на неопределенные переменные λ,δ - множители Лагранжа: $\lambda(\omega^T n-m)=0,\ \delta(\omega^T\iota-1)=0$

Затем вычитаем полученные функции и получаем новую функцию:

$$L(\omega)=\omega^T\sum\omega-2\lambda(\omega^T n-m)-2\delta(\omega^T\iota-1).$$

Новая функция известна под названием функция Лагранжа или лагранжиана; Она дифференцируется по переменной ω. Первая производная должна быть ровна нулю.

$$\frac{\partial L}{\partial\omega^T}=\sum\omega-\lambda n-\delta\iota=0$$

Отсюда $\omega=\sum^{-1}(\lambda n+\delta\iota)$.

Подставив это выражение для ω в ограничения, получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными λ и δ:

$$\omega^T n=m$$

$$\left[\sum^{-1}(\lambda n+\delta\iota)\right]^T n=n^T\sum^{-1}(\lambda n+\delta\iota)=m$$

$$\omega^T \iota = 1$$

$$\left[\sum^{-1}(\lambda n + \delta \iota)\right]^T \iota = \iota^T \sum^{-1}(\lambda n + \delta \iota) = 1$$

Итак, система:

$$\begin{cases} n^T \sum^{-1}(\lambda n + \delta \iota) = m \\ \iota^T \sum^{-1}(\lambda n + \delta \iota) = 1 \end{cases}$$

Эта система относительно неизвестных λ и δ:

$$\begin{cases} \lambda(n^T \sum^{-1} n) + \delta(n^T \sum^{-1} \iota) = m \\ \lambda(\iota^T \sum^{-1} n) + \delta(\iota^T \sum^{-1} \iota) = 1 \end{cases}$$

Заменим переменные;

$$a_{11} = n^T \sum^{-1} n \quad a_{12} = n^T \sum^{-1} \iota$$

$$a_{21} = \iota^T \sum^{-1} n, \quad a_{22} = \iota^T \sum^{-1} \iota$$

$$a_{12} = a_{21}$$

Получим:

$$\begin{cases} \lambda a_{11} + \delta a_{12} = m \\ \lambda a_{21} + \delta a_{22} = 1 \end{cases}$$

Данную систему решим методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} m & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} = ma_{22} - a_{12},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & m \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix} = a_{11} - ma_{21}$$

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{m(\iota^T \sum^{-1} \iota) - (n^T \sum^{-1} \iota)}{(n^T \sum^{-1} n)(\iota^T \sum^{-1} \iota) - (n^T \sum^{-1} \iota)^2}$$

$$\delta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(n^T \sum^{-1} n) - m(\iota^T \sum^{-1} n)}{(n^T \sum^{-1} n)(\iota^T \sum^{-1} \iota) - (n^T \sum^{-1} \iota)^2}$$

Вспоминая, что решение имеет вид: $\omega = \sum^{-1}(\lambda n + \delta \iota)$, подставив в неё найденные неизвестные, получим оптимальный портфель с ожидаемой доходностью m:

$$\omega = \sum^{-1}(\lambda n + \delta \iota) = \sum^{-1}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta} m + \frac{\Delta_2}{\Delta} \iota\right).$$

Указанный метод позволяет свести задачу на условный экстремум целевой функции, при ограничениях, к задаче на безусловный экстремум. Однако в этом случае некоторые из искомых переменных могут оказаться отрицательными, что означает рекомендацию взять в долг ценные бумаги j-го вида в количестве ω_j, т.е. провести операцию «продажа без покрытия».

Также необходимо учесть, что на практике условие возможной «продажи без покрытия» применяется на ценные бумаги не всех эмитентов, а только тех которые предусмотрены фондовой биржей или так называемые «голубые фишки».

Если добавить условие неотрицательности искомых переменных, то есть:

$$\omega_j \geq 0.$$

То в этом случае задачи оптимизации становятся задачами квадратического программирования.

Практические проблемы задач оптимизации.

При практическом применении задач оптимизации, выяснилось, что с большим количеством переменных, решение задачи может выдать не правильный результат. Так как первоначально, условия позволяют не применять неотрицательность переменных, то результат выдаёт структуру портфеля с очень крупными значениями больше или меньше нуля (Хотя, согласно условию и выводят в сумме единицу).

Также, если добавить условие неотрицательности в задачу Марковица, то задача становится задачей квадратичного программирования. Поскольку первичные данные представлены в матричном виде, целевую функцию задачи нужно детализировать в ручную (общедоступная программа Excel, с этой задачей не справиться, потому что нужно умножить три матрицы с разными типами значений: числовые и символьные), что при большом количестве различных параметров приведет к трате большого количества сил и времени, без гарантии безошибочности данной детализации.

В общем, в условиях фондового рынка, где цены на ценные бумаги меняются каждые десять секунд, практическое применение представленного выше метода решения задачи оптимизации не может быть полезным для текущего управления инвестиционным портфелем, потому что требует больших затрат времени. Таким образом, инвестор не сможет оперативно принимать решения, что может привести к значительным убыткам.

Классический подход Марковица не является единственным. Существует и другой метод решения данной проблемы, который может показать себя лучше с практической точки зрения.

Так как в реальных РЦБ не всегда выполняется гипотеза о том, что доходности по финансовым активам подчиняются нормальному закону распределения, предлагается использовать устойчивые законы, которые, возможно, лучше соответствует реальным данным. При таком подходе мерой риска служит не дисперсия, а параметр масштаба или любая строго возрастающая функция от этого параметра. При формировании портфеля активов можно использовать следующую функцию риска:

$$r = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{N} x_i R_i^{(t)}\right| \to \min$$

, где $R_i^{(t)}$ есть t-е наблюдение отклонение от среднего для дохода по i-му активу.

Еще одним подходом управления инвестиционным портфелем может быть применение технического и фундаментального анализа РЦБ.

Управляя инвестиционным портфелем, сложно игнорировать тот или иной подход анализа РЦБ. Поэтому для успешной работы на рынке необходимо постоянно координировать данные фундаментального и технического анализов. Фундаментальный анализ помогает увидеть «картину в целом», т.е. понять, куда в настоящий момент движется цена ценной бумаги. Технический же анализ позволяет детализировать конкретную сделку, т.е. определить в какой момент предпочтительнее открыть позицию в выбранном направлении, и как долго стоит ее удерживать.

Список литературы

1. «Основы биржевой торговли». Конспект лекций. – М.: АНО «Учебный центр «Финам», 2007. – 153 с.

2. Акулич И.Л., «Математическое программирование в примерах и задачах»: Учебное пособие. – М.: «Вышэйшая школа», 1986. – 319с.

3. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.. «Эконометрика. Начальный курс»: Учебник. – 8-е изд. – М.: «Дело», 2007. – 504с.

4. Малюгин В.И.. «Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа»: Учебное пособие. – М.: «Дело», 2003. – 320 с.

5. Таха, Хемди А., «Введение в исследование операции», пер. с англ., М., «Вильямс», 2005. – 912с.

6. Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.. «Количественные методы в финансах». Учебное пособие./ Пер. с англ. под ред. Ефимовой М.Р.. – М.: «ЮНИТИ», 1999. – 527 с.

7. www.finam.ru