

УДК 532.529

## АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, ОСНОВАННЫХ НА ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РИМАНА

П.В. Булат<sup>a</sup>, К.Н. Волков<sup>b</sup>, М.С. Сильников<sup>c, d</sup>, М.В. Чернышев<sup>c, d</sup>

<sup>a</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>b</sup> Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания

<sup>c</sup> Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация

<sup>d</sup> НПО специальных материалов, Санкт-Петербург, 194044, Российская Федерация

Адрес для переписки: [pavelbulat@mail.ru](mailto:pavelbulat@mail.ru)

### Информация о статье

Поступила в редакцию 11.09.14, принята к печати 08.12.14

doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-139-148

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Булат П.В., Волков К.Н., Сильников М.С., Чернышев М.В. Анализ разностных схем, основанных на точном и приближенном решении задачи Римана // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 1. С. 139–148

**Аннотация.** Рассматривается задача Римана о распаде одномерного произвольного разрыва параметров нестационарного газового потока в приложении к построению численных методов типа Годунова. Задача решается в точной и приближенной постановке (разностная схема Ошера–Соломона, используемая в численных методах сквозного счета): определяются интенсивности (отношения статических давлений) и перепады скорости потока на сторонах образующихся разрывов и волн, после чего рассчитываются остальные параметры во всех областях течения. Выполнено сравнение результатов расчетов модельных течений с использованием точных и приближенных решений. Введено понятие скоростной функции. Исследована зависимость скоростной функции от интенсивности разрыва. Выявлена особая интенсивность, при которой изоэнтропическая волна создает такой же скоростной напор, как и ударная волна. В окрестности этой особой интенсивности приближенные методы дают наиболее высокую точность. Путем выполнения тестовых расчетов определена область применимости приближенного решения Ошера–Соломона, результаты представлены в виде, удобном для использования в численных методах. Результаты работы могут быть применены для численных методов высокого порядка точности.

**Ключевые слова:** распад произвольного разрыва, ударная волна, волна Римана, контактный разрыв.

## ANALYSIS OF FINITE-DIFFERENCE SCHEMES BASED ON EXACT AND APPROXIMATE SOLUTION OF RIEMANN PROBLEM

P.V. Bulat<sup>a</sup>, K.N. Volkov<sup>b</sup>, M.S. Silnikov<sup>c, d</sup>, M.V. Chernyshev<sup>c, d</sup>

<sup>a</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>b</sup> Kingston University, London, SW15 3DW, UK

<sup>c</sup> Saint Petersburg State Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation

<sup>d</sup> "Special Materials", Corp., Saint Petersburg, 194044, Russian Federation

Corresponding author: [Davydov\\_vadim66@mail.ru](mailto:Davydov_vadim66@mail.ru)

### Article info

Received 11.09.14, accepted 08.12.14

doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-139-148

Article in Russian

**Reference for citation:** Bulat P.V., Volkov K.N., Silnikov M.S., Chernyshev M.V. Analysis of finite-difference schemes based on exact and approximate solution of Riemann problem. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 139–148 (in Russian)

**Abstract.** The Riemann problem of one-dimensional arbitrary discontinuity breakdown for parameters of unsteady gas flow is considered as applied to the design of Godunov-type numerical methods. The problem is solved in exact and approximate statements (Osher-Solomon difference scheme used in shock capturing numerical methods): the intensities (the ratio of static pressures) and flow velocities on the sides of the resulting breakdowns and waves are determined, and then the other parameters are calculated in all regions of the flow. Comparison of calculation results for model flows by exact and approximate solutions is performed. The concept of velocity function is introduced. The dependence of the velocity function on the breakdown intensity is investigated. A special intensity at which isentropic wave creates the same flow rate as the shock wave is discovered. In the vicinity of this singular intensity approximate methods provide the highest accuracy. The domain of applicability for the approximate Osher-Solomon solution is defined by performing test calculations. The results are presented in a form suitable for

usage in the numerical methods. The results obtained can be used in the high-resolution numerical methods.

**Keywords:** arbitrary discontinuity breakdown, shock wave, Riemann wave, contact discontinuity.

### Введение

Классическое изложение решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва параметров потока для одномерных волн и разрывов приведено в 2001 г. в работе О. Игга [1]. Независимо от этой работы полное исследование областей существования различных вариантов одномерного распада разрыва в 2000 г. провел В.Н. Усков [2]. Задача встречается в различных технических приложениях, например, разрыв возникает на стенке при отражении от нее ударной волны [3]. Так возникает разрыв скорости, равный скорости потока за ударной волной, поскольку на стенке происходит торможение потока до нулевой скорости. В данном случае, как и в некоторых других, удобно использовать понятие безразмерной скоростной функции интенсивности волны, характеризующей скачок скорости на волне [4]. Если волна распространяется по покоящейся среде, то данный параметр равен скорости спутного потока за волной.

Большое внимание к теории распада произвольного разрыва было привлечено в результате развития численных методов типа Годунова [5, 6], в которых в качестве разрыва рассматривается скачок параметров на границе разностных ячеек. Получены точные решения, сведенные к системе трансцендентных уравнений, решаемых итерационными методами. В ряде случаев, например, при моделировании взрывов в реальном времени [7, 8], необходимо существенное сокращение времени расчетов. Следовательно, актуальными являются и приближенные решения типа разностной схемы Ошера–Соломона [9], использующие тот факт, что вдали от ударных волн разрывы на границе ячеек, как правило, слабые. Как известно, изоэнтропическая поляра сжатия и ударная поляра при интенсивности, равной единице, имеют второй порядок касания, что позволяет получить простое и однозначное приближенное аналитическое решение для параметров течения за исходящими разрывами. Особенно большой выигрыш в скорости вычислений приближенные решения дают в случае численных методов повышенного порядка точности [10].

Важно знать границы применимости приближенных методов решения. Целью настоящей работы является определение этих границ. Задача решается путем сравнения результатов расчетов, полученных численными методами в точной и приближенной постановке. Также приводится прямой расчет погрешности приближенного решения Ошера–Соломона, использующего модель изоэнтропических волн сжатия. Для оценки скоростного напора за простой волной и ударной волной вводится понятие скоростной функции. Получено значение особой интенсивности волн, при которой простая волна и ударная волна создают одинаковый напор, т.е. погрешности приближенных методов в данном случае минимальны.

### Математическая модель

**Решение одномерной нестационарной задачи о распаде разрыва в терминах скоростной функции.** Используя понятие безразмерной скоростной функции интенсивности волны, можно записать универсальное выражение для нахождения скорости потока газа за бегущей волной:

$$\hat{u} = u_0 + \chi_w a_0 U_w(J).$$

Здесь  $u_0$  – скорость невозмущенной среды;  $a_0$  – скорость звука в невозмущенной среде;  $\chi_w$  – показатель направления движения волны;  $U_w$  – скорость фронта волны;  $J$  – интенсивность разрыва, равная отношению давлений за разрывом и до него. Для волн, сонаправленных исходному потоку газа,  $\chi_w = 1$ , а для встречных волн  $\chi_w = -1$ . Скоростная функция для ударных волн имеет вид

$$U_D(J) = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cdot \frac{J-1}{\sqrt{J+\varepsilon}},$$

где  $\varepsilon = (\gamma-1)/(\gamma+1)$ ;  $\gamma$  – показатель адиабаты газа. Для волн Римана (сжатия и разрежения) соотношение, определяющее скоростную функцию, следует из условия изоэнтропности среды:

$$U_R(J) = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} (J^{1/k} - 1), k = 2\gamma/(\gamma-1).$$

Если в результате распада произвольного разрыва образуются центрированная волна разрежения Римана, движущаяся в область 1, и ударная волна, бегущая в область 4 (рис. 1, а), то условия на контактном разрыве запишутся в виде

$$u_1 - a_1 U_R(J_1, \varepsilon_1) = u_4 + a_4 U_D(J_2, \varepsilon_2). \quad (1)$$

Если, наоборот, волна разрежения распространяется по области 4, а ударная волна бежит в область 1, то условие равенства скоростей на контактном разрыве запишется в виде

$$u_1 - a_1 U_D(J_1, \varepsilon_1) = u_4 + a_4 U_R(J_2, \varepsilon_2). \quad (2)$$

Пусть из точки разрыва исходят две ударные волны (рис. 1, б). Тогда условие равенства скоростей на контактном разрыве можно записать следующим образом:

$$u_1 - a_1 U_D(J_1, \varepsilon_1) = u_4 + a_4 U_D(J_2, \varepsilon_2). \quad (3)$$

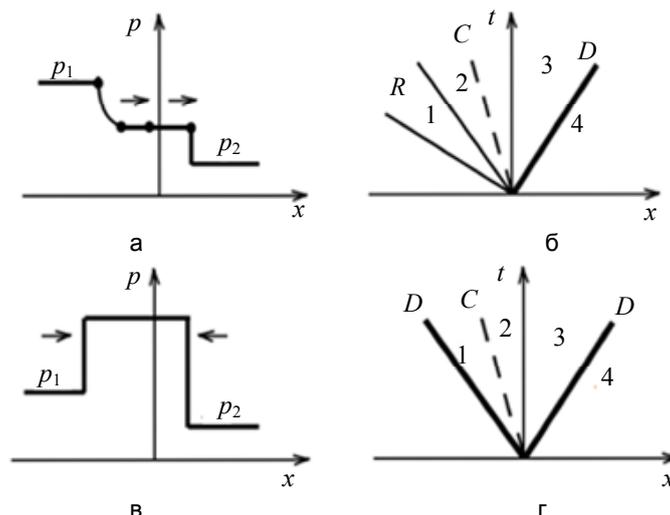


Рис. 1. Задача Римана о распаде произвольного разрыва. Распределения давления (а) и (в); конфигурации, состоящие: из волны разрежения (R), ударной волны (D) и контактного разрыва (C) (б) и двух ударных волн (D) и контактного разрыва (C) (г).  $p$  – давление,  $p_1$  – давление до разрыва,  $p_2$  – давление за разрывом,  $t$  – время

Теоретически возможны две ударно-волновые конфигурации с исходящими волнами Римана (рис. 2). Технических приложений для таких случаев мало, если они существуют вообще, но при построении разностных схем сквозного счета их тоже нужно учитывать.

Система уравнений, включающая условие равенства статических давлений по сторонам разрывов и одно из уравнений (1)–(3), в зависимости от типов исходящих волн, является замкнутой относительно интенсивностей исходящих волн, и решается численно. Для решения данной системы уравнений необходимо определить вид волн, образующихся в результате распада произвольного разрыва. Определение областей существования решения с различными видами исходящих волн – основная цель решения задачи о распаде произвольного разрыва.

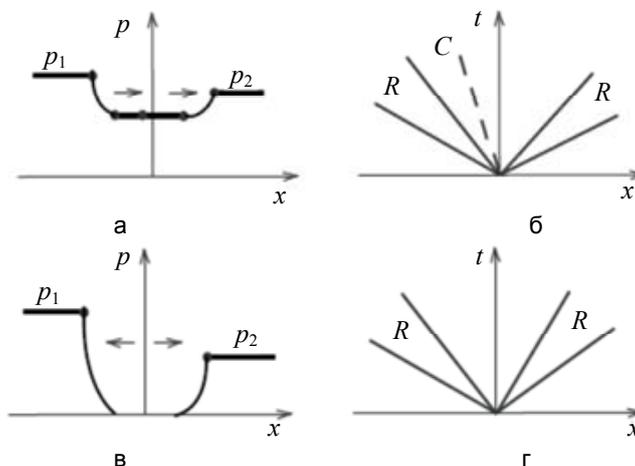


Рис. 2. Задача Римана о распаде произвольного разрыва. Фрагменты (а) и (в) показывают распределения давления, фрагменты (б) и (г) – конфигурации, состоящие из двух волн разрежения (R) и контактного разрыва (C)

**Решение одномерной задачи Римана в схеме Годунова.** Условия равенства скоростей и давлений потоков на сторонах контактного разрыва

$$u_1 = u_2, \quad p_1 = p_2$$

связывают интенсивности волн  $\bar{D}_1(\bar{R}_1)$  и  $\bar{D}_2(\bar{R}_2)$  с перепадами  $[u]_1$  и  $[u]_2$  скорости потока на их сторонах.

При  $J_1 > 1$  или  $J_2 > 1$  перепады скорости на образующихся ударных волнах связаны с их интенсивностями:

$$\begin{aligned}
 [u]_1 &= -(1-\varepsilon)a_1 \left( \sqrt{\frac{J_1+\varepsilon}{1+\varepsilon}} - \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{J_1+\varepsilon}} \right) \\
 [u]_2 &= (1-\varepsilon)a_2 \left( \sqrt{\frac{J_2+\varepsilon}{1+\varepsilon}} - \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{J_2+\varepsilon}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Изменение скорости в изоэнтропных волнах разрежения определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 [u]_1 &= \frac{2a_1}{\gamma-1} \left( 1 - J_1^{(\gamma-1)/2\gamma} \right) \\
 [u]_2 &= -\frac{2a_2}{\gamma-1} \left( 1 - J_2^{(\gamma-1)/2\gamma} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Если известны перепады скорости, то можно определить обратные зависимости  $J_i$  от  $[u]_i$  для ударных волн:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 1 + \frac{\gamma [u]_1}{2(1-\varepsilon)a_1^2} \left( [u]_1 - \sqrt{[u]_1^2 + 4(1-\varepsilon)^2 a_1^2} \right) \\
 J_2 &= 1 + \frac{\gamma [u]_2}{2(1-\varepsilon)a_2^2} \left( [u]_2 - \sqrt{[u]_2^2 + 4(1-\varepsilon)^2 a_2^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

и волн Римана:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \left( 1 - (\gamma-1)[u]_1 / 2a_1 \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \\
 J_2 &= \left( 1 + (\gamma-1)[u]_2 / 2a_2 \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Отношения  $E_1$  и  $E_2$  плотностей газа до и за ударными волнами (адиабата Рэнкина–Гюгонио) определяются как

$$E_1 = (1 + \varepsilon J_1) / (J_1 + \varepsilon), \quad E_2 = (1 + \varepsilon J_2) / (J_2 + \varepsilon),
 \tag{8}$$

а для изоэнтропных волн Римана (адиабата Пуассона) – как

$$E_1 = J_1^{-1/\gamma}, \quad E_2 = J_2^{-1/\gamma}.
 \tag{9}$$

В отличие от аналогичной задачи о взаимодействии наклонных сверхзвуковых стационарных потоков, система (4)–(9) всегда имеет единственное решение, получаемое численно.

**Аналитическое решение Ошера–Соломона для слабых волн.** Как правило, перепады параметров течения на границах вычислительных ячеек в разностных методах невелики, и разрывы в решении в задаче Римана можно считать слабыми. Разностная схема Ошера–Соломона использует этот факт, заменяя точную постановку задачи Римана приближенной [11], в которой формулы (5), (7), (9) связывают интенсивности, скорости и плотности потока и на волнах разрежения, и на ударных волнах. Задача о распаде разрыва в приближенной постановке решается аналитически:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \left[ \frac{(\gamma-1)(u_1 - u_2) + 2(a_1 + a_2)}{2(a_1 + a_2/I)} \right]^{2\gamma/(\gamma-1)} \\
 J_2 &= \left[ \frac{(\gamma-1)(u_1 - u_2) + 2(a_1 + a_2)}{2(a_1 I + a_2)} \right]^{-2\gamma/(\gamma-1)}, \\
 [u]_1 &= \frac{2a_2(1-I) + (\gamma-1)I(u_2 - u_1)}{a_1 I + a_2} \cdot \frac{a_{j-1}}{\gamma-1} \\
 [u]_2 &= \frac{2a_1(1-I) + (\gamma-1)I(u_1 - u_2)}{a_1 I + a_2} \cdot \frac{a_2}{\gamma-1}
 \end{aligned}$$

где  $I = (p_2 / p_1)^{(\gamma-1)/2\gamma}$ .

**Численный алгоритм метода Годунова.** При решении гиперболической системы квазилинейных уравнений в частных производных, записанной в дивергентной форме,

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{H},$$

простейшая схема первого порядка для определения вектора  $\mathbf{Q}_j$  в разностной ячейке  $j$  в новый момент времени  $t + \Delta t$  (рис. 3, а) выглядит следующим образом:

$$\Delta x_j^N \cdot \mathbf{Q}_j(t + \Delta t) = \Delta x_j \cdot \mathbf{Q}_j(t) + (\mathbf{F}_{j-1/2} - V_{j-1/2} \cdot \mathbf{Q}_{j-1/2}) \Delta t - (\mathbf{F}_{j+1/2} - V_{j+1/2} \cdot \mathbf{Q}_{j+1/2}) \Delta t + S_j \cdot \mathbf{H}_j(t).$$

Здесь  $\Delta x_j$  и  $\Delta x_j^N$  – размеры ячейки  $j$  до и после шага  $\Delta t$  интегрирования,  $V_{j-1/2}$  и  $V_{j+1/2}$  – скорости движения ее границ,  $S_j = (\Delta x_j + \Delta x_j^N) \cdot \Delta t / 2$ , а  $\mathbf{Q}_j(t)$  и  $\mathbf{H}_j(t)$  – известные векторы консервативных переменных и источниковых членов в начальный момент времени. Значения консервативных переменных ( $\mathbf{Q}_{j-1/2}$  и  $\mathbf{Q}_{j+1/2}$ ) и их потоков ( $\mathbf{F}_{j-1/2}$  и  $\mathbf{F}_{j+1/2}$ ) через границы ячеек необходимо определить.

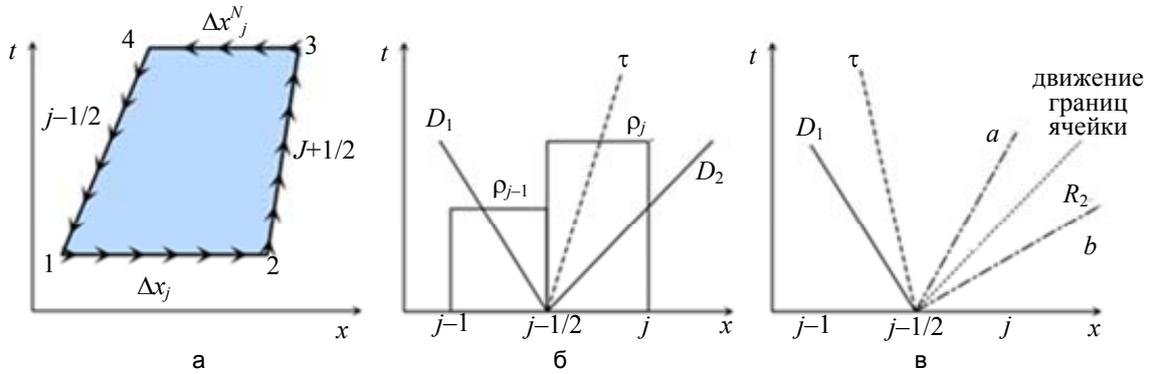


Рис. 3. К обоснованию метода Годунова: разностная ячейка (а); разрыв параметров на границе ячеек (б); распад разрыва с исходящими ударной волной  $D_1$  и волной Римана  $R_2$  (в).  $\tau$  – тангенциальный разрыв,  $\rho$  – плотность;  $a$  – первая характеристика волны разрежения и  $b$  – последняя характеристика волны разрежения (рис. 3, в)

Основная проблема при построении разностных схем расчета заключается в желании повысить порядок аппроксимации и одновременно обеспечить получение монотонного численного решения при наличии сильных и слабых разрывов. В работе Годунова [5] показано, что монотонная разностная схема не может иметь порядок аппроксимации выше первого. Выход из противоречия между необходимостью получения монотонного решения и повышением порядка аппроксимации предложен в работе Колгана [12], смысл которого заключается в создании нелинейных механизмов, обеспечивающих непрерывный переход от немонотонной схемы второго порядка аппроксимации с центральными разностями к монотонной схеме первого порядка с односторонними разностями в узлах сетки. Разностные схемы с повышенным порядком аппроксимации используются в узлах, в которых численное решение является гладким, а в точках, в которых решение имеет разрывы, используются монотонные разностные схемы низкой точности. Схема Годунова обладает аппроксимационной вязкостью, поэтому для расчета сильных разрывов нет необходимости вводить искусственную вязкость. При расчете слабых разрывов типа волн разрежения погрешность аппроксимации становится достаточно большой, что проявляется в их сильном размазывании (которое тем сильнее, чем меньше число Куранта).

В классической схеме С.К. Годунова значения  $\mathbf{Q}_{j-1/2}$ ,  $\mathbf{F}_{j-1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j-1/2})$  и им подобные определяются из решения задачи о распаде разрыва параметров потока ( $\mathbf{Q}_{j-1}$  и  $\mathbf{Q}_j$ , рис. 3, б) на границах ячеек. В качестве времени может выступать любая пространственная координата.

После решения задачи Римана в точной или приближенной постановке рассчитываются скорости движения всех волн и разрывов. Скорости  $W_1$  и  $W_2$  перемещения ударных волн  $\bar{D}_1$  и  $\bar{D}_2$  определяются зависимостями

$$W_1 = u_{j-1} - a_{j-1} \sqrt{(J_1 + \varepsilon)/(1 + \varepsilon)}, W_2 = u_j + a_j \sqrt{(J_2 + \varepsilon)/(1 + \varepsilon)}.$$

Легко вычисляются и скорости распространения контактного разрыва ( $W_\tau$ ), а при образовании волн разрежения  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  – их передних ( $W_{1a}$  и  $W_{2a}$ ) и задних ( $W_{1b}$  и  $W_{2b}$ ) фронтов (рис. 3, с):

$$W_\tau = u_1 = u_3, W_{1a} = u_{j-1} - a_{j-1}, W_{2a} = u_j + a_j,$$

$$W_{1b} = u_1 - a_1 = u_{j-1} + [u]_1 - a_{j-1} \cdot J_1^{(\gamma-1)/2\gamma},$$

$$W_{2b} = u_2 + a_2 = u_j + [u]_2 - a_j \cdot J_2^{(\gamma-1)/2\gamma}.$$

Рассчитанные значения сравниваются со скоростью  $V_{j-1/2}$  движения границы ячеек. Если скорость перемещения границы меньше или больше скоростей перемещения всех волн, то свойства потока на ней – такие же, как в левой ( $\mathbf{Q}_{j-1/2} = \mathbf{Q}_{j-1}$ ) или в правой ( $\mathbf{Q}_{j-1/2} = \mathbf{Q}_j$ ) ячейках до распада разрыва. Если скорость границы меньше скорости одной из волн и больше скорости другой, то вектор  $\mathbf{Q}_{j-1/2}$  определяется значениями физических переменных  $(\rho_1, u_1, p_1)$  и  $(\rho_2, u_2, p_2)$ , соответственно.

Если же траектория границы пролегает внутри веера характеристик волны  $\bar{R}_1$  или  $\bar{R}_2$ , искомые свойства потока зависят от значения скорости:

в волне  $\bar{R}_1$

$$u_{j-1/2} = (1 - \varepsilon)(V_{j-1/2} + a_{j-1}) + \varepsilon u_{j-1},$$

$$a_{j-1/2} = \varepsilon \left( \frac{2a_{j-1}}{\gamma - 1} - u_{j-1} - V_{j-1/2} \right),$$

$$\rho_{j-1/2} = \rho_{j-1} \cdot \left( \frac{a_{j-1/2}}{a_{j-1}} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p_{j-1/2} = p_{j-1} \cdot \left( \frac{a_{j-1/2}}{a_{j-1}} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

в волне  $\bar{R}_2$

$$u_{j-1/2} = (1 - \varepsilon)(V_{j-1/2} - a_j) + \varepsilon u_j,$$

$$a_{j-1/2} = \varepsilon \left( \frac{2a_j}{\gamma - 1} - u_j + V_{j-1/2} \right),$$

$$\rho_{j-1/2} = \rho_j \cdot \left( \frac{a_{j-1/2}}{a_j} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p_{j-1/2} = p_j \cdot \left( \frac{a_{j-1/2}}{a_j} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

Последние соотношения являются следствием условия сохранения инвариантов Римана в изоэнтропных волнах:

$$\bar{R}_1: u + \frac{2a}{\gamma - 1} = u_{j-1/2} + \frac{2a_{j-1/2}}{\gamma - 1} = u_{j-1} + \frac{2a_{j-1}}{\gamma - 1},$$

$$\bar{R}_2: u - \frac{2a}{\gamma - 1} = u_{j-1/2} - \frac{2a_{j-1/2}}{\gamma - 1} = u_j - \frac{2a_j}{\gamma - 1}.$$

Они выводятся из уравнения Менделеева–Клапейрона, адиабаты Лапласа–Пуассона, а также равенства скоростей границы ячеек и одной из прямолинейных характеристик соответствующей волны разрежения:  $V_{j-1/2} = u_{j-1/2} - a_{j-1/2}$  или  $V_{j-1/2} = u_{j-1/2} + a_{j-1/2}$ .

Таким образом, общую схему построения численного метода на основе схемы Годунова можно представить в следующем виде.

1. Экстраполяция неизвестных для нахождения состояния потока на его гранях по величинам, заданным в центре (reconstruction). На практике используются кусочно-постоянное (схема Годунова), кусочно-линейное (схема Ван Лира) и кусочно-параболическое (схема Чакраварти–Ошера) распределение параметров потока в пределах ячейки и различные ограничители потока.
2. Решение задачи Римана для каждой грани контрольного объема с учетом локального направления потока (в направлении нормали к грани контрольного объема). Точное решение задачи Римана представляется достаточно затратным с вычислительной точки зрения, поэтому широкое применение находят приближенные подходы, например, схемы Роэ или Ошера.
3. Реализация шага по времени (evolution).

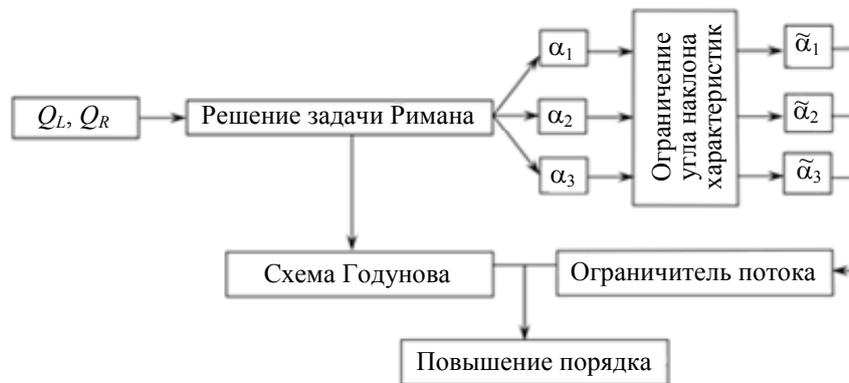


Рис. 4. Типичная реализация схемы Годунова с использованием монотонизирующих ограничителей потоков.  $Q_L$  – левая сторона ячейки,  $Q_R$  – правая сторона ячейки

Общим во всех методах подобного класса является использование разнообразных монотонизирующих ограничителей потоков (рис. 4) с переключателями, зависящими от локальных свойств решения

(под  $\alpha_i$  понимается  $i$ -я характеристика). Большинство ограничителей имеют дискретные переключатели типа  $\max\{f_1, f_2\}$ , что приводит к разрыву первой производной и снижению точности (использование абсолютных значений контрольных функций имеет тот же смысл и приводит к тем же последствиям), в связи с чем применяются и гладкие ограничители.

### Анализ

**Анализ скоростной функции.** Скоростная функция волны Римана  $U_R(J)$  и ударной волны  $U_D(J)$  имеют при  $J = 1$  порядок касания не ниже второго, а при  $\gamma = 5/3$  – третий. При  $\gamma < 5/3$  спутная скорость за волной сжатия Римана всегда меньше, чем за ударной волной, равной интенсивности. Различие тем больше, чем больше интенсивность волн. При  $\gamma > 5/3$  ситуация иная. Скоростные функции  $U_R(J)$  и ударной волны  $U_D(J)$  имеют еще одну точку пересечения  $U_R(J_x) = U_D(J_x)$ . Зависимость  $J_x$  от показателя адиабаты  $\gamma$  показана на рис. 5.

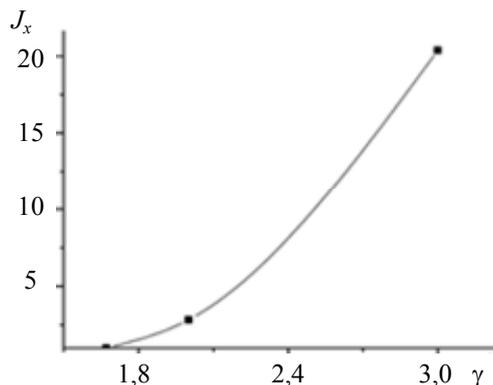


Рис. 5. Зависимость от показателя адиабаты  $\gamma$  особой интенсивности  $J_x$ , при которой скоростные функции ударной волны и волны Римана равны

Если  $J > J_x$ , то спутная скорость за волной сжатия Римана меньше, чем за ударной волной, равной интенсивности. Если  $1 < J < J_x$ , то меньше спутная скорость за ударной волной. Особая интенсивность  $J_x$  имеет определенное прикладное значение. В ряде технических приложений, например, в упрочнении поверхности металлов, используется метание частиц с помощью волн. При  $J_x$  достигается наименьшее значение затрат энергии на единицу увеличения кинетической энергии частицы.

**Анализ решения Ошера–Соломона для слабых волн.** На рис. 6, а, приведены значения интенсивностей волн  $J_1$  и  $J_2$  (кривые 1 и 2 – точное решение, кривые 1' и 2' – решение Ошера–Соломона) и перепадов скорости потока  $[u] = [u]_1 = [u]_2$  (кривые 3 и 3') (рис. 6, б) на волнах, образующихся в ударной трубе при распаде разрыва давления  $P$  двух первоначально покоящихся газов с одинаковой температурой и показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ .

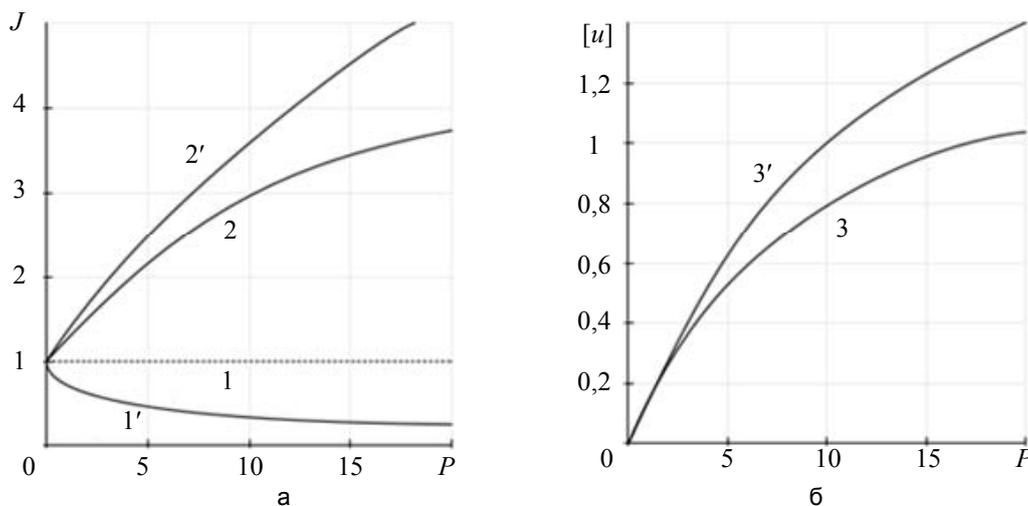


Рис. 6. Точное приближенно-аналитическое решение задачи Римана: значения интенсивностей волн  $J_1$  и  $J_2$  (кривые 1 и 2 – точное решение, кривые 1' и 2' – решение Ошера–Соломона (а); перепадов скорости потока  $[u] = [u]_1 = [u]_2$  (кривые 3 и 3') (б)

Видно, что при больших начальных перепадах статического давления ( $P > 5$ ) неточность приближенного решения становится заметной. В области же слабых разрывов совпадение вполне достаточное. Поскольку решение задачи о распаде произвольного разрыва в ходе численных расчетов производится множество раз, то использование приближенной модели считается оправданным.

**Решение тестовой задачи Сода методом Годунова в точной постановке и в приближении Ошера–Соломона.** Модельные задачи играют роль испытательного полигона для проверки новых методологических концепций и оценки точности результатов, полученных с помощью сконструированных на их основе программных средств. Для тестирования вычислительной процедуры используется задача расчета эволюции бегущих волн различного профиля и различные конфигурации задачи Римана. Задача об эволюции бегущих волн служит для проверки шага реконструкции решения, а задача Римана – для проверки шага эволюции. Результаты расчетов (рис. 7) позволяют судить о монотонности и точности численного метода.

Образующаяся ударно-волновая структура соответствуют двум различным решениям задачи Сода [13]. В первом случае (рис. 7, а–в) имеет место дозвуковое течение, а во втором случае (рис. 7, г–е) – сверхзвуковое. В качестве рабочей среды принимается воздух  $\gamma = 1,4$ . Приведенные решения соответствуют малому промежутку времени с момента начала распада разрыва, когда в численном решении наблюдаются наибольшие отклонения от точного решения. В отличие от классической постановки задачи Сода, в которой начальные условия заданы в относительных переменных, в настоящей работе используются размерные величины.

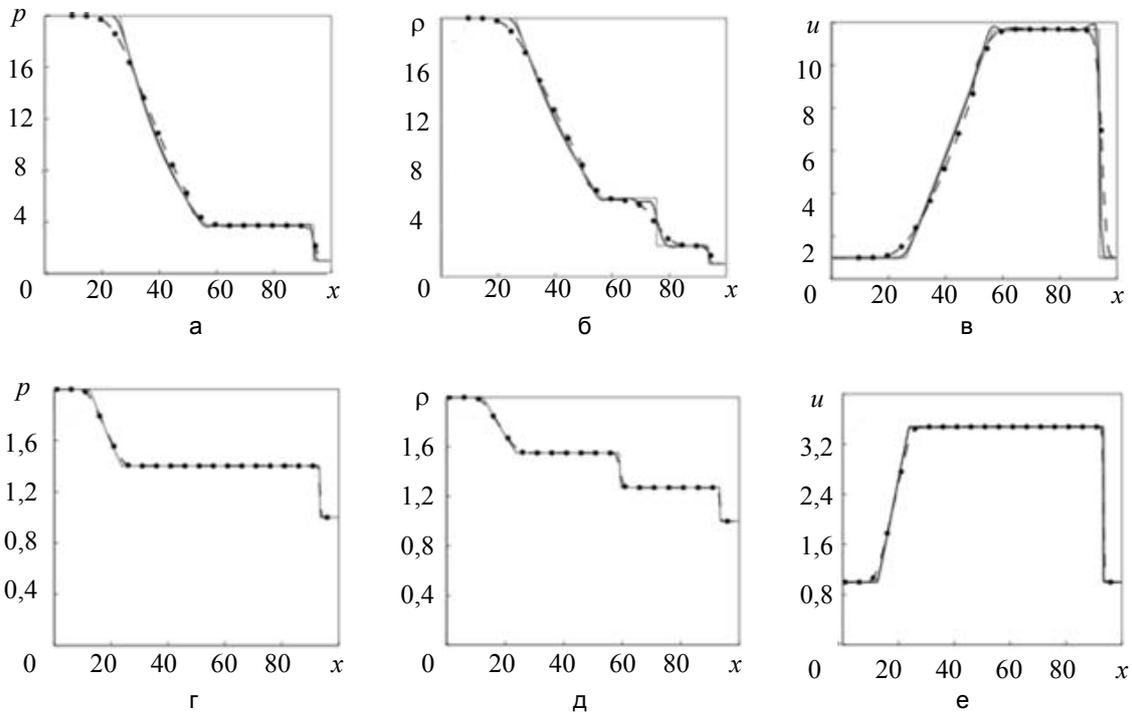


Рис. 7. Тестовая задача Сода. Фрагменты а–в соответствуют дозвуковому течению, фрагменты г–е – сверхзвуковому; а, г – распределения давления; б, д – распределения плотности; в, е – распределения скорости. Сплошная линия соответствует точному решению задачи, пунктирная линия – расчету по схеме Годунова, утолщенная линия --- расчету по схеме MUSCL 3-го порядка, кружки – по схеме Чакраварти–Ошера

Различные разностные схемы показывают примерно одинаковые результаты. В целом схема Чакраварти–Ошера дает более точное решение, чем другие схемы. При этом схема Годунова требует примерно в 4,2 раза больше расчетного времени, чем схемы, основанные на приближенном решении задачи Римана.

Преимущества схем высокого порядка точности хорошо заметны при рассмотрении профилей контактного разрыва и ударной волны. Имеет место немонотонность численного профиля, полученного при помощи обычной схемы второго порядка, которая проявляется вблизи разрывов. С другой стороны, профили плотности и давления, полученные на основе схем высокого порядка, являются монотонными.

Порядок точности разностных схем при наличии разрывов решений и их производных, как правило, не соответствует классическому порядку аппроксимации по тейлоровскому разложению на гладких решениях. Для оценки точности разностных схем применяется метод, основанный на экспериментальном определении сходимости численных расчетов к точному решению исходной задачи.

### Заключение

Задача изучения распада произвольного разрыва остается актуальной уже много лет. Необходимость ее решения возникает в численных методах, использующих схему типа Годунова. Требование оптимального сочетания приемлемой точности аппроксимации с высокой скоростью вычислений требует продолжения исследований приближенных методов решения задачи о распаде разрыва, например, схемы Ошера–Соломона, в которой для расчета слабых ударных волн используются соотношения для изоэнтропических волн сжатия. Расчеты показали, что приближенный метод может использоваться до интенсивности ударных волн, меньших пяти, что чаще всего выполняется на границах разностных ячеек в типичных случаях.

Актуальным является разработка новых алгоритмов по расчету областей существования различных решений.

В целом ряде технических приложений (обтекание острой кромки профиля крыла, отражение ударной волны от препятствия, ударно-волновые процессы в струйных течениях) задачу о распаде разрывов необходимо решать в точной установке без каких-либо упрощений. С другой стороны, при реализации численных методов, использующих решение задачи Римана, например, методов типа Годунова, более рациональным представляется применение приближенных решений. Рассмотренное приближенное решение Ошера–Соломона обеспечивает, как показали тестовые расчеты, монотонность разностной схемы и приемлемую точность. В то же время имеется необходимость точного определения границ применимости приближенных решений. Для этого удобно использовать скоростную функцию интенсивности разрыва, которая равна спутной скорости за ударной волной, распространяющейся в покоящейся среде. В работе определена особая интенсивность волн, при которой скоростные функции ударной и простой волны одинаковы, т.е. погрешность приближенных методов минимальна. Прямое вычисление погрешности применения схемы Ошера–Соломона показало, что она применима до интенсивности разрыва, равной пяти.

### References

1. *Handbook of Shock Waves*. Eds. G. Ben-Dor, D. Igra, T. Elperin. NY, Academic Press, 2001, 824 p.
2. Uskov V.N. *Begushchie Odnomernye Volny* [Running One-Dimensional Waves]. St. Petersburg, BGTU "Voenmekh" Publ., 2000, 220 p.
3. Arkhipova L.P., Uskov V.N. Universal'noe reshenie zadachi ob otrazhenii odnomernykh begushchikh voln ot tverdoi stenki i ego analiz dlya voln uplotneniya [Universal solution of problem of 1D moving waves reflection from a solid wall and analysis for waves seal]. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 77–81.
4. Arkhipova L.P. Skorostnaya funktsiya intensivnosti odnomernoï nestatsionarnoi volny i ee analiz dlya voln uplotneniya [The speed function of intensity of one-dimensional moving wave and it's analysis for shock and compression waves]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Aerokosmicheskogo Universiteta im. Akadematika S.P. Koroleva*, 2012, no. 3–1(34), pp. 57–62.
5. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Sbornik: Mathematics*, 1959, vol. 47, no. 8–9, pp. 357–393.
6. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Kraiko A.N. *Chislennoe Reshenie Mnogomernykh Zadach Gazovoi Dinamiki* [Numerical Solution of Multi-Dimensional Problems in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 400 p.
7. Gel'fand B.E., Sil'nikov M.V., Mikhailin A.I., Orlov A.V. Attenuation of blast overpressures from liquid in an elastic shell. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2001, vol. 37, no. 5, pp. 607–612.
8. Silnikov M.V., Mikhaylin A.I. Protection of flying vehicles against blast loads. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 97, no. 1, pp. 30–37. doi: 10.1016/j.actaastro.2013.12.012
9. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Mathematics of Computation*, 1982, vol. 38, no. 158, pp. 339–374. doi: 10.1090/S0025-5718-1982-0645656-0
10. Volkov K.N. Primenenie i realizatsiya raznostnykh skhem vysokoi razreshayushchei sposobnosti dlya resheniya zadach gazovoi dinamiki na nestruturirovannykh setkakh [Application and implementation of high-resolution difference schemes for solution of gas dynamics problems on unstructured meshes]. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2014, no. 6, pp. 153–162.
11. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems*. Chapman & Hall/CRC Press, 2001, 560 p.
12. Kolgan V.P. Primenenie printsipa minimal'nykh znachenii proizvodnoi k postroeniyu konechno-raznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh reshenii gazovoi dinamiki [Applying the principle of the minimum values of the derivative to the construction of finite-difference schemes for computation of discontinuous solution of gas dynamics]. *TsAGI Science Journal*, 1972, vol. 3, no. 6, pp. 68–77.
13. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1978, vol. 27, no. 1, pp. 1–31. doi: 10.1016/0021-9991(78)90023-2

- Булат Павел Викторович** – кандидат физико-математических наук, руководитель научной лаборатории, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, pavelbulat@mail.ru
- Волков Константин Николаевич** – доктор физико-математических наук, старший лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk
- Сильников Михаил Владимирович** – член-корреспондент РАН, доктор технических наук, профессор, директор Института военно-технического образования и безопасности, Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация; генеральный директор, НПО Специальных материалов, Санкт-Петербург, 194044, Российская Федерация, director@npo-sm.ru
- Чернышев Михаил Викторович** – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Экстремальные процессы в материалах и взрывобезопасность» Института военно-технического образования и безопасности, Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация; НПО Специальных материалов, ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербург, 194044, Российская Федерация, chernyshov@npo-sm.ru
- Pavel V. Bulat** – PhD, scientific supervisor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru
- Konstantin N. Volkov** – D.Sc., senior lecturer, Kingston University, London, SW15 3DW, UK, k.volkov@kingston.ac.uk
- Mikhail V. Silnikov** – RAS corresponding member, D.Sc., Professor, Director, Institute of Military-Technical Education and Security, Saint Petersburg State Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation; CEO, "Special Materials", Corp., Saint Petersburg, 194044, Russian Federation, General Director, director@npo-sm.ru
- Mikhail V. Chernyshev** – D.Sc., Associate professor, Head of Department, Institute of Military-Technical Education and Security, Saint Petersburg State Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation; leading scientific researcher, "Special Materials", Corp., 194044, Saint Petersburg, Russian Federation, chernyshov@npo-sm.ru