



УДК 681.518

## ОПТИМИЗАЦИЯ ЗОНЫ ПОКРЫТИЯ СЕТИ СОТОВОЙ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И.А. Зикратов<sup>a</sup>, Ф.Н. Шаго<sup>a</sup>, А.В. Гуртов<sup>b</sup>, И.И. Иванинская<sup>a</sup><sup>a</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация<sup>b</sup> Хельсинский институт информационных технологий, Хельсинки, FI-00014, Финляндия

Адрес для переписки: zikratov@cit.ifmo.ru

### Информация о статье

Поступила в редакцию 21.01.15, принята к печати 10.02.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-2-313-321

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Зикратов И.А., Шаго Ф.Н., Гуртов А.В., Иванинская И.И. Оптимизация зоны покрытия сети сотовой связи на основе математического программирования // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 2. С. 313–321.

**Аннотация.** Предложен метод планирования радиосетей оператором сотовой связи. Актуальность задачи обусловлена стремлением поставщиков услуг минимизировать издержки на расстановку и содержание необходимого количества базовых станций при обеспечении требуемого уровня сигнал/шум в пределах зоны покрытия. Задача решается путем рационального выбора местоположения точек базирования ретрансляторов в несколько этапов. В первую очередь осуществляется анализ участка местности и предварительный выбор на нем множества точек, на которых потенциально возможно размещение базовых станций. Как правило, такая задача решается с использованием специализированных геоинформационных систем. На втором этапе осуществляется расчет дальности радиосвязи при условии расположения ретрансляторов в выбранных точках. На третьем этапе на основе предварительных расчетов осуществляется непосредственно выбор позиций базовых станций. В работе предлагается использовать стохастический подход для рационального выбора позиций. Целесообразность этого подхода обусловлена большим количеством случайных неконтролируемых факторов, влияющих на отношение сигнал/шум в точке приема. В этом случае задача оптимального выбора позиции рассматривается как экстремальная задача, в которой параметры условий представляют собой случайные величины. Реализация предлагаемого авторами метода в работе иллюстрируется на примере планирования радиосвязи на загородном участке местности, который пересекается двумя автотрассами. В качестве входных параметров в примере используются протяженность участков дорог, пересекающих зоны покрытия ретрансляторов, и концентрация абонентов на трассах. Целевая функция и система ограничений составляются таким образом, чтобы обеспечить нахождение абонентов в пределах зоны покрытия и минимизировать участки пересечения зон покрытий соседних ретрансляторов. Использование данной методики позволит получить статистически оптимальную расстановку базовых станций на заданном участке местности, что подтверждается имитационным моделированием.

**Ключевые слова:** дальность радиосвязи, зоны покрытия, оптимизация планирования, выбор позиции, сотовая связь.

## OPTIMIZATION OF THE COVERAGE ZONE FOR A CELLULAR NETWORK BASED ON MATHEMATICAL PROGRAMMING

I.A. Zikratov<sup>a</sup>, F.N. Shago<sup>a</sup>, A.V. Gurtov<sup>b</sup>, I.I. Ivaninskaya<sup>a</sup><sup>a</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation<sup>b</sup> Helsinki Institute for Information Technology HIIT, Helsinki, FI-00014, Finland

Corresponding author: zikratov@cit.ifmo.ru

### Article info

Received 21.01.15, accepted 10.02.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-2-313-321

Article in Russian

**For citation:** Zikratov I.A., Shago F.N., Gurtov A.V., Ivaninskaya I.I. Optimization of the coverage zone for a cellular network based on mathematical programming. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 2, pp. 313–321. (in Russian)

**Abstract.** The method is offered for planning radio networks by the cellular operator. The problem relevance is caused by the service providers effort to minimize costs for arrangement and content of necessary quantity of base stations with the support of the required signal/noise level within a coverage zone. The problem is solved in several stages by a rational choice of basing location points for retranslators. First of all, we carry out the terrain section analysis and a preliminary choice of a point set on it where the placement of base stations is potentially possible. As a rule, such problem is solved by means of specialized geoinformation systems. At the second stage we make calculation of a radio communication range, on condition that retranslators are located in the selected points. At the third stage we directly make selections of line items for basic stations on the ground of predesigins. The paper deals with stochastic approach for a rational choice of the line items.

Feasibility of this approach is caused by a large number of the arbitrary uncontrollable factors influencing the signal/noise ratio in a reception point. In this case we consider the task of a line item optimum choice as an extremum problem where parameters of conditions are represented as random variables. Implementation of the method offered by the authors is illustrated on the example of a radio communication planning on an out-of-town region crossed by two highways. The input parameters in this example are: road section length, crossing coverage zones of retranslators, and concentration of subscribers on the highways. The target function and system of restrictions are formed accordingly to provide finding of subscribers within a coverage zone and to minimize intersections of coverage zones for adjacent retranslators. This technique application gives the possibility for receiving statistically optimum arrangement of base stations on the given terrain section that is confirmed by simulation modeling.

**Keywords:** radio communication range, coverage zones, planning optimization, choice of line items, cellular communication.

### Введение

Развитие операторов, предоставляющих услуги радиосвязи, приводит к необходимости рационального размещения на ограниченных площадях большого количества источников электромагнитных волн различного частотного диапазона. Операторы сотовой связи заинтересованы, с одной стороны, в качестве радиосвязи, которое в первую очередь достигается путем создания базовыми станциями зон покрытия участков местности, в пределах которых обеспечивается требуемый (заданный) уровень сигнал/шум на входе приемного устройства. С другой стороны, ключевым вопросом для поставщиков услуг является снижение затрат на закупку, размещение и содержание избыточного количества базовых станций. Такая постановка задачи является основой для планирования и оптимизации сети сотовых операторов.

Базовой процедурой при оптимизации размещения базовых станций является расчет зон устойчивого приема радиосигнала с учетом геометрии и радиофизических свойствах местности, технических характеристик средств связи и других факторов, влияющих на отношение сигнал/шум. Для этого используют соответствующие модели земной поверхности и методы расчета напряженности электромагнитного поля в точке наблюдения<sup>1,2,3,4</sup>. Использование различных моделей подстилающей поверхности позволяет аппроксимировать препятствия и неровности поверхности Земли геометрическими примитивами – импедансными и диэлектрическими клиньями [1], полуцилиндрами, статистически шероховатой поверхностью.

Автоматизация расчета радиолиний с учетом влияния подстилающей поверхности стала возможной с появлением и широким внедрением в различных областях деятельности геоинформационных систем, которые являются гибким и удобным инструментом для использования в расчетных задачах априорной цифровой картографической информации (ЦКИ) о земной поверхности. В составе ЦКИ содержится семантическая информация о характере местности и наличии на ней точечных, линейных и площадных объектов («река», «береговая линия», «дорога», «заболоченный участок леса», «кустарник», «одинокое строение» и т. д.) в принятых форматах, а также метрическая информация о координатах точек (линий), описывающих рельеф местности и объекты на ней, представленная с определенной погрешностью.

Полученные в результате расчетов прогнозные значения зон покрытия используются в качестве входных данных в задачах планирования и оптимизации местоположения и конфигурации ретрансляторов. Существует большое количество работ, посвященных решению задач планирования сети с учетом особенностей функционирования стандартов UMTS [2–6], CDMA и LTE [7, 8], использующих методы линейного целочисленного программирования [9–12], метаэвристические [13], игровые [14] и другие алгоритмы оптимизации.

Таким образом, результат решения задачи оптимальной расстановки базовых станций зависит от ряда факторов, к основным из которых можно отнести: условия распространения радиоволн с учетом геометрических и радиофизических свойств подстилающей поверхности, времени года и суток, погодных условий; время появления абонентов в зонах видимости базовых станций, их количество и расположение на местности; режим функционирования передающих и приемных устройств в текущий момент времени; выбранный способ расчета дальности радиосвязи и модели подстилающей земной поверхности, их адекватность реальным условиям радиосвязи; используемый при расчетах масштаб цифровой карты местности [15] и точность представления в цифровых картах местности (ЦКМ) картографической информации [16]; используемый метод оптимизации и планирования, его чувствительность к входным данным и адек-

<sup>1</sup> Рекомендация МСЭ-R P.526-9. Распространение радиоволн за счет дифракции. (Вопрос МСЭ -R 202/3). 2005. 37 с. (<http://www.itu.int/rec/R-REC-P.526-9-200508-I/en>).

<sup>2</sup> Рекомендация МСЭ-R P.834-5. Влияние тропосферной рефракции на распространение радиоволн. (Вопрос МСЭ-R 201/3). 2005. 14 с. (<http://www.itu.int/rec/R-REC-P.834-5-200503-I/en>).

<sup>3</sup> Recommendation ITU-R P.453-9. The radio refractive index: its formula and refractivity data. (Question ITU-R 201/3). 2003. 27 p. (<http://www.itu.int/rec/R-REC-P.453-9-200304-I/en>).

<sup>4</sup> Рекомендация МСЭ-R P.452-12. Процедура прогнозирования для оценки микроволновых помех между станциями, находящимися на поверхности Земли, на частотах выше приблизительно 0,7 ГГц. (Вопрос МСЭ-R 208/3). 2005. 56 с. (<http://www.itu.int/rec/R-REC-P.452-12-200503-I/en>).

ватность решаемой задаче, а также иные допущения и ограничения, принятые при расчете дальности радиосвязи.

Очевидно, что значительная часть перечисленных факторов носит стохастический характер, и их статистические закономерности не всегда могут быть определены и учтены. В этих условиях повышение качества планирования может достигаться двумя путями. Первый путь направлен на совершенствование моделей, описывающих геометрические и диэлектрические свойства неровностей Земли, методик расчета дальности радиосвязи с учетом влияния таких неровностей на процессы дифракции радиоволн, использование цифровых карт высокой точности, исследование статистических особенностей моделируемых явлений и процессов. Вторым путем, который предлагают авторы в настоящей работе, состоит в том, что задачу оптимизации изначально предлагается рассматривать как относящуюся к классу задач с риском и неопределенностью. Такие задачи являются предметом исследования так называемого стохастического программирования [17].

Настоящая работа организована следующим образом. Для лучшего понимания предлагаемого стохастического подхода в работе приведено решение задачи рационального выбора позиции для детерминированной постановке задачи. Показано, какие параметры используются при записи целевой функции и системы ограничений. Решение основано на методе линейного программирования и сопровождается рассмотрением тривиального примера. Также в работе приводится решение для стохастической постановки задачи с вероятностными ограничениями, которое иллюстрируется результатами имитационного моделирования.

### Детерминированная постановка задачи

Рассмотрим некоторый ограниченный участок местности площадью  $P$ , в пределах которого могут находиться площадные (населенные пункты) или линейные (дороги) объекты. Необходимо с минимальными издержками расставить ретрансляторы базовых станций в пределах этого участка местности, чтобы абоненты, находящиеся в населенных пунктах или передвигающиеся по дорогам, были обеспечены мобильной связью.

Первый шаг решения задачи заключается в анализе данного участка местности по цифровой карте местности и формировании исходного множества координатных  $X$  точек возможных позиций расположения базовых станций. Эти точки должны удовлетворять ряду условий, например: иметь транспортную доступность для технического персонала, возможность электроснабжения аппаратуры, вблизи этих позиций не должно быть экранирующих препятствий, ограничивающих дальность радиосвязи. Зоны покрытия ретрансляторов в случае расположения в этих точках должны охватывать места пребывания абонентов. Из этого исходного множества точек необходимо выбрать минимальное количество  $N$  таких позиций, которые позволят расположенным на них базовым станциям обеспечить устойчивую связь в местах концентрации абонентов. Решение задачи рассмотрим на примере обеспечения связью абонентов в пределах линейных объектов (дорог).

В пригородных участках местности службы связи стремятся обеспечить устойчивую связь, прежде всего, вблизи транспортных коммуникаций, пересекающих эти участки. Положим, что на границах рассматриваемого участка зона покрытия достаточна. Тогда при выполнении условия

$$P \leq S', \quad (1)$$

где  $S'$  – площадь зоны покрытия, создаваемого одной базовой станцией, задача выбора ее места расположения тривиальна.

Если условие (1) не выполняется, задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в пределах участка площадью  $P$  имеется  $M$  позиций, пригодных для размещения базовых станций с ретрансляторами. Зададим вектор  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ . Причем  $x_i$  равно 1, если на  $i$ -й позиции установлена базовая станция, и 0 в противном случае. Тогда необходимо выбрать такое множество позиций  $N$  ( $N \subset M$ ,  $N \rightarrow \min$ ), при котором любые точки всех трасс, пересекающих этот участок, будут находиться в зоне покрытия хотя бы одной базовой станции. В рамках настоящей работы подход к формализации и решению поставленной задачи нагляднее иллюстрировать на элементарном примере (рис. 1).

Пусть необходимо выбрать минимальное количество из четырех возможных мест расположения на ограниченном участке местности базовых станций таким образом, чтобы обеспечить зону радиосвязи, охватывающую трассы  $A$  и  $B$ . Суммарная протяженность трасс равна  $L_{\Sigma}$ . Пусть в качестве исходного множества  $X$  по результатам расчета дальности радиосвязи и прогнозирования параметров зон покрытия на основе ЦКМ выбраны точки  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ , которые удовлетворяют приведенным выше условиям. Зоны покрытия базовых станций при их расположении в этих точках для наглядности аппроксимированы окружностями.

Формализуем задачу.

Из постановки задачи следует, что  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  могут принимать двоичные значения. Это означает, что физический смысл этих переменных следующий: если  $x_j = 1$ , то на  $i$ -й позиции ретранслятор установлен, если  $x_j = 0$ , то нет.

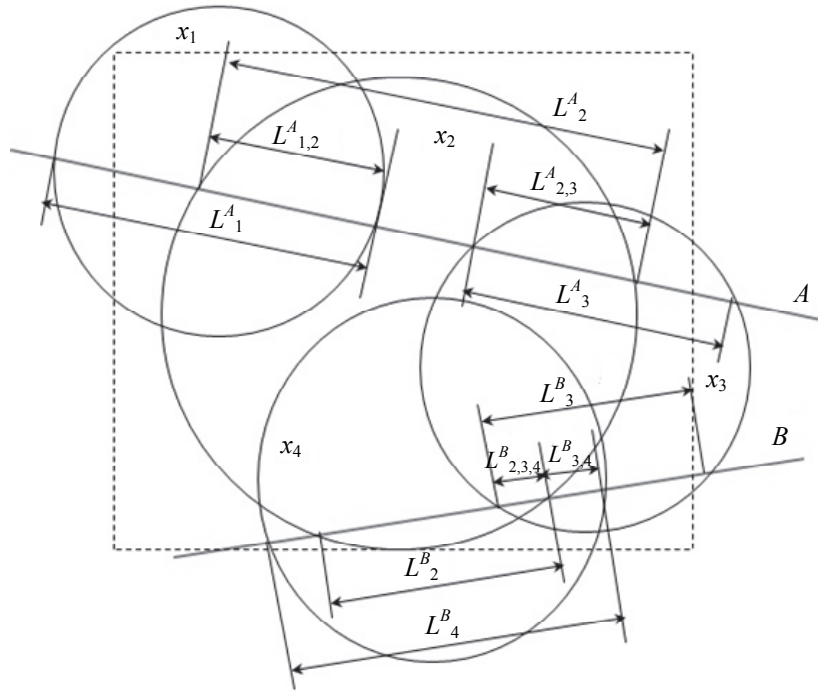


Рис. 1. Детерминированная постановка задачи рационального выбора позиции

Тогда целевую функцию представим в виде

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min.$$

Пусть диаграмма направленности ретранслятора  $x_1$  охватывает участок трассы  $A$  длиной  $L_1^A$ , ретранслятора  $x_2 - L_2^A$ , и ретранслятора  $x_3 - L_3^A$  соответственно. По аналогии для трассы  $B$  можно определить величины  $L_2^B$ ,  $L_3^B$  и  $L_4^B$ . Кроме того, необходимо учесть, что часть трассы  $A$  пересекает места перекрытия диаграмм направленности ретрансляторов  $x_1$  и  $x_2$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Длины этих участков соответственно обозначим как  $L_{1,2}^A$  и  $L_{2,3}^A$ . Для трассы  $B$  имеются участки перекрытия диаграмм направленности ретрансляторов  $x_2$  и  $x_4$ , который обозначим  $L_{2,4}^B$ , и участок перекрытия  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_4$ , который обозначим  $L_{2,3,4}^B$ . Отсюда следует, что ограничение можно записать в виде полиномиальной функции

$$L_1^A x_1 + L_2^A x_2 + L_3^A x_3 + L_4^B x_4 - L_{1,2}^A x_1 x_2 - L_{2,3}^A x_2 x_3 - L_{2,4}^B x_2 x_4 - L_{2,3,4}^B x_2 x_3 x_4 \geq L_\Sigma. \quad (2)$$

Анализ полученного неравенства (2) показывает, что сформулированная задача сведена к задаче нелинейного программирования. В качестве ограничения отметим, что переменные  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_4$  могут принимать двоичные значения. В монографии [18] показано, что подобные задачи можно заменить эквивалентными линейными задачами с булевыми переменными.

Суть преобразований сводится к введению также булевых вспомогательных переменных, которыми замещают слагаемые исходного полинома. Так, вспомогательная переменная для  $k$ -го слагаемого полинома (2) будет иметь вид

$$y_k = \prod_{j=1}^{n_k} x_j,$$

где  $n_k$  – количество сомножителей в  $k$ -ом слагаемом. Для обеспечения условий  $y_k = 1$  при всех  $x_j = 1$  и  $y_k = 0$  в противном случае на каждую переменную  $y_k$  накладываются очевидные условия:

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_j - (n_k - 1) \leq y_k;$$

$$\frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} x_j \geq y_k.$$

Введем переменные  $y_1 = x_1 x_2$ ,  $y_2 = x_2 x_3$ ,  $y_3 = x_2 x_4$  и  $y_4 = x_2 x_3 x_4$ ; после наложения дополнительных ограничений на  $y_k$ , получим следующую формулировку задачи:

целевая функция  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$ ,

ограничения:

$$L_1^A x_1 + L_2^A x_2 + L_3^A x_3 + L_4^B x_4 - L_{1,2}^A y_1 - L_{2,3}^A y_2 - L_{2,4}^B y_3 - L_{2,3,4}^B y_4 \geq L_\Sigma;$$

$$L_1^A x_1 + L_2^A x_2 + L_3^A x_3 + L_4^B x_4 - L_{1,2}^A y_1 - L_{1,2,3}^A y_2 - L_{1,3}^A y_3 - y_4 (L_{2,3}^A + L_{2,3}^B) \geq L_\Sigma;$$

$$x_1 + x_2 - 1 \leq y_1;$$

$$x_2 + x_3 - 1 \leq y_2;$$

$$x_2 + x_4 - 1 \leq y_3;$$

$$x_2 + x_3 + x_4 - 2 \leq y_4;$$

$$\frac{1}{2} (x_1 + x_2) \geq y_1;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4) &\geq y_4; \\ \frac{1}{2}(x_2 + x_3) &\geq y_2; \\ \frac{1}{2}(x_2 + x_4) &\geq y_3, \end{aligned}$$

где  $y_1, y_2, y_3, y_4, x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  – булевы переменные.

Пусть, например,  $L_1^A = 4, L_2^A = 3, L_3^A = 2, L_4^A = 1, L_2^B = 4, L_3^B = 2, L_{1,2}^A = L_{2,3}^A = L_{2,4}^B = L_{2,3,4}^B = 1, L_\Sigma = 16$ . Тогда для вектора  $\mathbf{X} = \{1, 1, 1, 0\}$  ограничение (2) выполняется ( $17 > 16$ ), а для других вариантов, например,  $\mathbf{X} = \{1, 0, 1, 1\}$  или  $\{0, 1, 1, 1\}$  – нет ( $9 < 16$  и  $15 < 16$  соответственно). Таким образом для обеспечения связи на трассах  $A$  и  $B$  в пределах рассматриваемого участка местности достаточно разместить базовые станции в точках  $x_1, x_2$  и  $x_3$ .

Очевидно, что алгоритмизация такой задачи для решения на ЭВМ существенно проще по сравнению с алгоритмизацией задач нелинейного программирования, решаемых, например, методом Лагранжа. Это обусловлено отсутствием процедур дифференцирования, матричных операций и т.д.

Однако следует учитывать, что переменные  $L_{k,l}^m$  получены в результате априорных расчетов дальности радиосвязи. На практике, как ранее было сказано, точность расчетов дальности радиосвязи определяется адекватностью моделей подстилающей поверхности, ограничениями и допущениями выбранного метода расчета, величиной ошибок в определении координат точек множества  $X$ , линейных (площадных) размеров и координат экранирующих препятствий, параметров их радиофизических свойств, а также характеристиками приемника и передатчика в мобильном телефоне абонента. В этом случае дальность действия  $i$ -го ретранслятора можно рассматривать как случайную величину, изменяющуюся в пределах  $\Delta R_i = |R_i^{\max} - R_i^{\min}|$  (рис. 2). Как следствие, длины участков дорог  $A$  и  $B$ , охваченных диаграммой направленности  $i$ -го ретранслятора  $L_i^{AB}$ , и участков перекрытия зон ретрансляторов  $L_{i,j,k}^X$  также будут являться случайными величинами. Учитывая влияние большого количества случайных независимых факторов, согласно центральной предельной теореме Ляпунова эти величины можно полагать гауссовыми.

### Стохастическая постановка задачи

В этом случае рассмотренную задачу представим как одноэтапную задачу стохастического программирования с построчными вероятностными ограничениями.

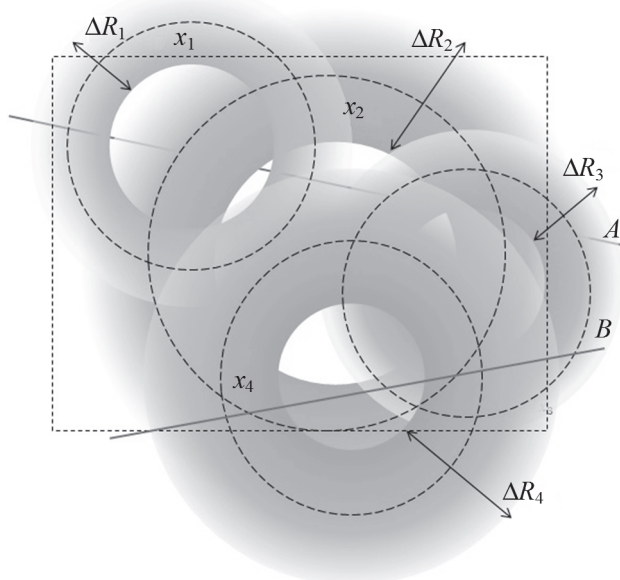


Рис. 2. Стохастическая постановка задачи рационального выбора позиций

Как и в предыдущем примере, из множества точек возможных позиций  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  необходимо выбрать минимальное количество  $N$  таких позиции, которые позволят расположенным на них базовым станциям обеспечить устойчивую связь абонентов,двигающихся по маршрутам  $A$  и  $B$  в пределах участка, ограниченного пунктирной линией. Положим, что концентрация абонентов на трассах  $A$  и  $B$  различна. Вероятность появления абонентов на трассах  $A$  и  $B$  обозначим соответственно  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ .

В общем виде модель с вероятностными ограничениями определяется следующим образом [17]:

$$\text{минимизировать } z = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j,$$

при ограничениях

$$P\{\sum_{j=1}^n L_j^i x_j \leq b_i\} \geq \alpha_i. \tag{3}$$

Применительно к рассматриваемой задаче  $n$  – количество возможных позиций для размещения базовых станций;  $i = 1, 2, \dots, m$ , где  $m$  – количество маршрутов движения абонентов в рассматриваемом участке;  $c_j, L_j$  и  $b_i$  – случайные величины.

Известно, что если переменные  $L_j^i$  распределены нормально, с математическими ожиданиями  $M\{L_j^i\}$  и дисперсиями  $\text{var}\{L_j^i\}$ , а также заданы (рассчитаны) ковариации  $K_{L_j^i, L_{j'}^{i'}} = \text{cov}\{L_j^i, L_{j'}^{i'}\}$  случайных величин  $L_j^i$  и  $L_{j'}^{i'}$ , то исходные ограничения вида (3) эквивалентны неравенству

$$\sum_{j=1}^n M\{L_j^i\}x_j + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{D}_i \mathbf{X}} \leq b_i. \quad (4)$$

Здесь  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$  – нормальная функция распределения стандартизированной случайной величины;  $\mathbf{X}^T \mathbf{D}_i \mathbf{X}$  – квадратичная форма;  $\mathbf{D}_i$  –  $i$ -я матрица ковариаций.

Переменные  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), как и в детерминированной постановке задачи, будем полагать булевыми переменными  $x_j = \{0, 1\}$ . Пусть переменные  $L_j^i$  суть длины участков  $i$ -й трассы, охватываемых диаграммой направленности  $j$ -го ретранслятора, в предположении, что они установлены на позициях анализируемого множества  $n$ . Тогда, придерживаясь обозначений, принятых при рассмотрении детерминированной задачи, и учитывая (3) и (4), составим целевую функцию и ограничения для задачи стохастического программирования (рис. 2):

– целевая функция:

$$\sum_{j=1}^4 x_j \rightarrow \min;$$

– ограничение для трассы  $A$

$$\begin{aligned} & M\{L_1^A\}x_1 + M\{L_2^A\}x_2 + M\{L_3^A\}x_3 + M\{L_4^A\}x_4 - \\ & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 M\{L_{i,j}^A\}x_i x_j - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \sum_{k=j+1}^4 M\{L_{i,j,k}^A\}x_i x_j x_k - \\ & - M\{L_{1,2,3,4}^A\}x_1 x_2 x_3 x_4 + \Phi^{-1}(\alpha_A)\sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{D}_A \mathbf{X}} \leq L_{\Sigma}^A; \end{aligned}$$

– ограничение для трассы  $B$

$$\begin{aligned} & M\{L_1^B\}x_1 + M\{L_2^B\}x_2 + M\{L_3^B\}x_3 + M\{L_4^B\}x_4 - \\ & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 M\{L_{i,j}^B\}x_i x_j - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \sum_{k=j+1}^4 M\{L_{i,j,k}^B\}x_i x_j x_k - \\ & - M\{L_{1,2,3,4}^B\}x_1 x_2 x_3 x_4 + \Phi^{-1}(\alpha_B)\sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{D}_B \mathbf{X}} \leq L_{\Sigma}^B; \end{aligned}$$

здесь, как было принято при рассмотрении детерминированной задачи,  $L_{k,l}^i$  – протяженность участков  $i$ -й трассы, проходящей через зоны покрытия  $k$ -го и  $l$ -го ретрансляторов. Решением задачи является также детерминированный вектор булевых переменных  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ , которые могут принимать значение 1 (базовая станция на позиции устанавливается) или 0 (базовая станция не устанавливается).

При составлении матриц ковариаций  $\mathbf{D}_A$  и  $\mathbf{D}_B$  следует учитывать, что если случайные величины независимы между собой, то их ковариации равны нулю. В общем виде матрица ковариаций  $\mathbf{D}_A$  для трассы  $A$  будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{D}_A = \begin{pmatrix} \text{var}\{L_1^A\} & \text{cov}\{L_1^A, L_2^A\} & \dots & \text{cov}\{L_1^A, L_{1,3,4}^A\} & \text{cov}\{L_1^A, L_{1,2,3,4}^A\} \\ 0 & \text{var}\{L_2^A\} & \dots & \text{cov}\{L_2^A, L_{1,3,4}^A\} & \text{cov}\{L_2^A, L_{1,2,3,4}^A\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}\{L_{1,3,4}^A, L_1^A\} & \text{cov}\{L_{1,3,4}^A, L_2^A\} & \dots & \text{var}\{L_{1,3,4}^A\} & \text{cov}\{L_{1,3,4}^A, L_{1,2,3,4}^A\} \\ \text{cov}\{L_{1,2,3,4}^A, L_1^A\} & \text{cov}\{L_{1,2,3,4}^A, L_2^A\} & \dots & \text{cov}\{L_{1,2,3,4}^A, L_{1,3,4}^A\} & \text{var}\{L_{1,2,3,4}^A\} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вектор  $\mathbf{X}$  в квадратичной форме для рассматриваемого примера имеет вид

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}, x_{1,2,3}, x_{1,2,4}, x_{1,3,4}, x_{2,3,4}, x_{1,2,3,4}\}.$$

По аналогии составляется матрица ковариаций для второго ограничения (трасса  $B$ ). Решение системы неравенств осуществляется в соответствии с [16, 17].

### Результаты эксперимента

Проведено имитационное моделирование рассмотренной задачи на цифровой карте местности масштаба 1:100000 с учетом погрешности представления метрической картографической информации, сезонных и суточных изменений радиофизических свойств поверхности. Эксперимент состоял в проведении серии статистических испытаний, в результате которых осуществлялся расчет дальности радиосвязи базовыми станциями при условии их расположения на позициях  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  для следующих ис-

ходных данных: рельеф местности – равнинный; высота подъема антенны на позициях  $x_1$  и  $x_3$  – 5 м, на позиции  $x_2$  – 9 м, на позиции  $x_4$  – 18 м; длина волны – 0,33 м; вид поляризации – вертикальная линейная; относительная диэлектрическая проницаемость подстилающей поверхности в пределах от  $\epsilon \approx 2$  (сухой грунт) до  $\epsilon \approx 80$  (морская вода); удельная проводимость  $\sigma = (0,1 \dots 5)$  См/м [19]; погрешность в положении на карте (плане) предметов и контуров местности – 0,5 мм. Расчет дальности осуществлялся в соответствии с рекомендациями, отраженными в разделе «Введение», в условиях гладкой поверхности.

По результатам эксперимента получено 100 реализаций переменных  $L_{i,j,k}^{A,B}$  для трасс А и В, которые сведены в табл. 1 и 2.

	1	2	3	4	5	...	96	97	98	99	100
$L_1^A$	20,71	19,55	17,52	16,58	22,39	...	21,33	19,55	19,82	22,43	16,43
$L_2^A$	28,20	24,51	18,88	22,89	26,28	...	16,01	26,09	21,30	21,63	23,07
$L_3^A$	17,44	19,31	11,47	7,03	18,97	...	14,83	0,00	10,29	15,89	8,49
$L_4^A$	18,52	17,17	28,53	22,93	19,30	...	23,15	17,22	13,13	26,21	19,44
$L_{1,2}^A$	9,70	6,46	0,00	4,31	6,53	...	0,19	7,94	7,38	1,65	4,40
$L_{1,3}^A$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{1,4}^A$	0,00	0,00	1,16	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{2,3}^A$	0,00	0,87	0,00	0,00	0,45	...	0,00	0,00	0,80	0,00	0,00
$L_{2,4}^A$	3,01	2,50	10,00	9,93	2,60	...	3,28	12,87	7,45	3,54	10,89
$L_{3,4}^A$	0,03	0,00	8,10	2,73	0,00	...	7,33	0,00	0,00	6,23	0,77
$L_{1,2,3}^A$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{1,2,4}^A$	4,19	4,98	5,51	4,34	6,57	...	7,70	4,35	1,49	9,30	2,92
$L_{1,3,4}^A$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{2,3,4}^A$	11,30	9,69	3,37	4,30	10,13	...	4,85	0,00	4,18	7,14	4,85
$L_{1,2,3,4}^A$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 1. Значения переменных  $L_1^A - L_{1,2,3,4}^A$  для трассы А

	1	2	3	4	5	...	96	97	98	99	100
$L_1^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_2^B$	20,94	17,87	2,69	11,27	19,20	...	0,00	21,28	13,91	14,58	18,25
$L_3^B$	15,92	18,29	12,06	0,00	21,51	...	14,83	0,00	9,53	14,06	6,11
$L_4^B$	35,40	33,40	39,61	37,90	35,15	...	37,71	33,93	31,73	39,69	33,79
$L_{1,2}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{1,3}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{1,4}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{2,3}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{2,4}^B$	13,24	10,51	2,69	11,27	9,81	...	0,00	21,28	12,35	11,34	16,47
$L_{3,4}^B$	8,21	8,12	12,06	0,00	8,35	...	14,83	0,00	7,96	10,81	4,32
$L_{1,2,3}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{1,2,4}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{1,3,4}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$L_{2,3,4}^B$	7,73	7,39	0,00	0,00	9,42	...	0,00	0,00	1,63	3,28	1,85
$L_{1,2,3,4}^B$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 2. Значения переменных  $L_1^B - L_{1,2,3,4}^B$  для трассы В

Согласно выражению (5), матрицы ковариаций  $D_A$  и  $D_B$  будут иметь следующий вид:

$$D_A = \begin{pmatrix} 10,1 & -0,2 & 1,5 & \dots & -6,1 & 0,6 & 0,2 \\ -0,2 & 12,9 & 1,5 & \dots & 0,6 & 5,4 & -4,2 \\ 1,5 & 1,5 & 19,4 & \dots & -9,4 & 9,6 & 1,3 \\ -0,7 & 1,5 & 0,9 & \dots & 6,8 & 7,6 & 11,0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -6,1 & 0,6 & -9,4 & \dots & 9,9 & -3,0 & 0,4 \\ 0,6 & 5,4 & 9,6 & \dots & -3,0 & 9,4 & -0,3 \\ 0,2 & -4,2 & 1,3 & \dots & 0,4 & -0,3 & 6,1 \end{pmatrix},$$

$$D_B = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 & \dots & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 37,0 & 2,4 & \dots & 21,9 & 12,9 & -11,7 \\ 0,0 & 2,4 & 23,5 & \dots & -6,0 & 9,9 & 11,3 \\ 0,0 & -1,2 & 0,5 & \dots & -0,6 & -0,4 & 2,2 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,0 & 21,9 & -6,0 & \dots & 20,6 & 3,3 & -9,0 \\ 0,0 & 12,9 & 9,9 & \dots & 3,3 & 9,2 & -0,9 \\ 0,0 & -11,7 & 11,3 & \dots & -9,0 & -0,9 & 12,3 \end{pmatrix}.$$

При равных величинах концентрации абонентов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  решение для рассматриваемого примера представляет собой вектор  $\{1, 0, 0, 1\}$ . Таким образом, для обеспечения абонентов связью на заданном участке местности минимально необходимо установить две базовые станции на позициях  $x_1$  и  $x_4$  (рис. 2).

Чувствительность решения определяется:

- величинами дисперсий значений дальности радиосвязи при определении (расчете) зон покрытия ретрансляторов на анализируемых позициях, что влияет на значение компонентов матриц ковариаций;
- степенью концентрации абонентов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ .

Очевидно, что для определения этих величин необходимо иметь достаточную статистику передвижения абонентов по соответствующим трассам в пределах рассматриваемого участка местности.

### Заключение

В работе предложен метод выбора позиций. Достоинствами предлагаемого метода является следующее.

1. Рандомизация задачи планирования на этапе составления целевой функции и системы ограничений. Это обстоятельство позволяет учитывать сезонные и суточные изменения условий распространения радиоволн, нестабильность работы аппаратуры, вероятность появления абонентов и другие стохастические факторы, влияющие на качество радиосвязи в пределах зоны покрытия.
2. Относительная простота реализации в геоинформационных системах, так как методика не предъявляет высоких требований к погрешности представления метрической и семантической информации в цифровых картах местности, к сложности моделей препятствий и методам расчета дальности радиосвязи.

В рассмотренном примере рассмотрена и решена задача обеспечения зоны покрытия абонентов, передвигающихся по линейным объектам (дорогам). Методика применима также для случая, когда возникает задача радиопланирования для обеспечения связью площадных объектов, например, населенных пунктов. Очевидно, что тогда в системе ограничений (5) в качестве входных переменных (случайных величин) необходимо рассматривать не длины, а площади объектов, перекрываемых диаграммами направленности соседних ретрансляторов.

### Литература

1. Зикратов И.А. Расчет параметров радиолиний в условиях холмистой местности // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. Т. 48. № 1. С. 3–9.
2. Amaldi E., Capone A., Malucelli F., Signori F. UMTS radio planning: optimizing base station configuration // Proc. 56<sup>th</sup> Virtual Technology Conference. Vancouver, Canada, 2002. V. 56. N 2. P. 768–772.
3. Abdel Khalek A., Al-Kanj L., Dawy Z., Turkiyyah G. Optimization models and algorithms for joint up-link/downlink UMTS radio network planning with SIR-based power control // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2011. V. 60. N 4. P. 1612–1625. doi: 10.1109/TVT.2011.2132745
4. Eisenblatter A., Wessaly R., Martin A., Fugenschuh A., Wegel O., Koch T., Achterberg T., Koster A. Modeling feasible network configurations for UMTS // Operations Research/Computer Science Interfaces Series. 2003. V. 23. P. 1–22. doi: 10.1007/978-1-4757-3762-2
5. Amaldi E., Capone A., Malucelli F., Signori F. Optimization models and algorithms for downlink UMTS radio planning // Proc. Wireless Communications and Networking Conference (WCNC'03). New Orleans, USA, 2003. V. 2. P. 827–831. doi: 10.1109/WCNC.2003.1200478
6. Berruto E., Gudmundson M., Menolascino R., Mohr W., Pizarroso M. Research activities on UMTS radio interface, network architectures, and planning // IEEE Communications Magazine. 1998. V. 36. N 2. P. 82–94. doi: 10.1109/35.648769
7. Amaldi E., Capone A., Malucelli F. Radio planning and coverage optimization of 3G cellular networks // Wireless Networks. 2008. V. 14. N 4. P. 435–447. doi: 10.1007/s11276-006-0729-3
8. Siomina I., Yuan D. Analysis of cell load coupling for LTE network planning and optimization // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2012. V. 11. N 6. P. 2287–2297. doi: 10.1109/TWC.2012.051512.111532



9. Mathar R., Niessen T. Optimum positioning of base stations for cellular radio networks // *Wireless Networks*. 2000. N 6. P. 421–428. doi: 10.1023/A:1019263308849
10. Mathar R., Schmeink M. Optimal base station positioning and channel assignment for 3G mobile networks by integer programming // *Annals of Operations Research*. 2001. V. 107. N 1–4. P. 225–236. doi: 10.1023/A:1014959317542
11. Mathar R., Schmeink M. Integrated optimal cell site selection and frequency allocation for cellular radio networks // *Telecommunication Systems*. 2002. V 21. N 2–4. P. 339–347. doi: 10.1023/A:1020958901292
12. Зикратов И.А., Зикратова Т.В. К вопросу об оптимизации зоны покрытия систем сотовой связи на загородных участках местности // *Информационно-управляющие системы*. 2007. № 3. С. 52–55.
13. Gerdenitsch A., Jakl S., Toeltsch M., Neubauer T. Intelligent algorithms for system capacity optimization of UMTS FDD networks // *Proc. IEEE 4<sup>th</sup> Int. Conf. on 3G Mobile Communication Technologies*. London, UK, 2003. P. 222–226.
14. Liyanage M., Chirkova J.V., Gurtov A. Access Point selection game for mobile wireless users // *Proc. 15<sup>th</sup> IEEE Int. Symposium on a World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks*. Sydney, Australia, 2014. Art. 6918913.
15. Зикратов И.А., Степаненко К.В. Обоснование масштаба цифровых карт местности используемых при расчете напряженности поля радиосигналов // *Информационно-управляющие системы*. 2005. № 1. С. 10–15.
16. Зикратов И.А., Степаненко К.В. Обоснование требований к точности цифровой картографической информации в геоинформационных системах проектирования и анализа радиолиний // *Информационно-управляющие системы*. 2004. № 2. С. 21–25.
17. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Советское радио, 1974. 400 с.
18. Taha H.A. *Operations Research: An Introduction*. NY: Macmillan/McGraw-Hill, 1982. 848 p.
19. Зикратов И.А., Самотонин Д.Н. Геоинформационный анализ радиолокационных отражений. СПб.: Политехника, 2004. 144 с.

- Зикратов Игорь Алексеевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, zikratov@cit.ifmo.ru
- Шаго Федор Николаевич* – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, dreamcast73@yandex.ru
- Гуртов Андрей Валерьевич* – PhD, главный научный сотрудник, Хельсинкский институт информационных технологий, Хельсинки, FI-00014, Финляндия, gurtov@hiit.fi
- Иванинская Ирина Игоревна* – студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ira.ivaninskaya@gmail.com
- Igor A. Zikratov* – D.Sc., Professor, Head of Department, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, zikratov@cit.ifmo.ru
- Fedor N. Shago* – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, dreamcast73@yandex.ru
- Andrei V. Gurtov* – PhD, Principal Scientist, Helsinki Institute for Information Technology HIIT, Helsinki, FI-00014, Finland, gurtov@hiit.fi
- Irina I. Ivaninskaya* – student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ira.ivaninskaya@gmail.com