

УДК 004.942:539.371

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

К.С. Курочка^а, И.Л. Стефановский^а

^а Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, 246746, Республика Беларусь
Адрес для переписки: Kurochka@gstu.by

Информация о статье

Поступила в редакцию 21.01.15, принята к печати 08.05.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-4-722-730

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Курочка К.С., Стефановский И.Л. Конечный элемент для моделирования напряженно-деформированного состояния двухслойных осесимметричных оболочек // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 4. С. 722–730.

Аннотация

Предмет исследования. Проведение расчетов конструкций из композитных материалов требует использования численных методов. Применение метода конечных элементов связано с проблемами аппроксимации поверхности. Использование объемных и пластинчатых элементов приводит к системам значительных размерностей, что требует большого объема вычислений и машинных ресурсов. В этой связи авторами рассматривается и предлагается методика построения математической модели для осесимметричного конечного элемента многослойных элементов конструкций. **Метод.** Для проведения расчетов предлагается осесимметричный конечный элемент, использующий соотношения для внутренней работы каждого слоя в отдельности, что позволяет учитывать геометрическую и физическую нелинейности, а также неоднородность по слоям оболочки. На основе метода конечных элементов с использованием принципа возможных перемещений и гипотез Кирхгофа–Лява построена дискретная математическая модель. В качестве конечного элемента выбран эрмитов элемент. В качестве искомой величины рассматривается прогиб конической оболочки. **Основные результаты.** Для верификации предложенной математической модели рассмотрены однослойная и двухслойная коническая оболочка, для которых известны аналитическое и численно-аналитическое решения соответственно. Максимальная погрешность решений не превышает 5,4% при количестве конечных элементов, равном 30. По сравнению с существующими типами элементов предлагаемый элемент позволяет уменьшить размерность матрицы жесткости, что приводит к экономии машинных ресурсов и позволяет достичь заданной точности расчетов при меньшем числе узлов. Вследствие этого значительно уменьшается время нахождения решения. **Практическая значимость.** Предлагаемую модель можно использовать при расчете многослойных конструкций под действием осесимметричных нагрузок – композитных баллонов высокого давления, цилиндрических стеклопластиковых труб, резервуаров для хранения взрывчатых и огнеопасных веществ, нефте- и газохранилищ.

Ключевые слова

численные методы, многослойные конструкции, осесимметричные оболочки, метод конечных элементов, конические оболочки.

FINITE ELEMENT FOR STRESS-STRAIN STATE MODELING OF TWO-LAYERED AXIALLY SYMMETRIC SHELLS

K.S. Kurochka^a, I.L. Stefanovski^a

^a P.O. Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, 246746, Republic of Belarus

Corresponding author: Kurochka@gstu.by

Article info

Received 21.01.15, accepted 08.05.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-4-722-730

Article in Russian

For citation: Kurochka K.S., Stefanovski I.L. Finite element for stress-strain state modeling of two-layered axially symmetric shells. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 4, pp. 722–730.

Abstract

Subject of Research. Computation of composite material designs requires application of numerical methods. The finite-element method usage is connected with surface approximation problems. Application of volumetric and laminar elements leads to systems with large sizes and a great amount of computation. The objective of this paper is to present an equivalent two-layer mathematical model for evaluation of displacements and stresses of cross-ply laminated cone shells subjected to uniformly distributed load. An axially symmetric element for shell problems is described. **Method.** Axially symmetric finite

element is proposed to be applied in calculations with use of correlation for the inner work of each layer separately. It gives the possibility to take into account geometric and physical nonlinearities and non-uniformity in the layers of the shell. Discrete mathematical model is created on the base of the finite-element method with the use of possible motions principle and Kirchhoff–Love assumptions. Hermite element is chosen as a finite one. Cone shell deflection is considered as the quantity sought for. **Main Results.** One-layered and two-layered cone shells have been considered for proposed mathematical model verification with known analytical and numerical analytical solutions, respectively. The axial displacements of the two-layered cone are measured with an error not exceeding 5.4 % for the number of finite elements equal to 30. The proposed mathematical model requires fewer nodes to define the finite element meshing of the system and much less computation time. Thereby time for finding solution decreases considerably. **Practical Relevance.** Proposed model is applicable for computation of multilayered designs under axially symmetric loads: composite high-pressure bottles, cylinder shaped fiberglass pipes, reservoirs for explosives and flammable materials, oil and gas storage tanks.

Keywords

numerical methods, multilayered designs, axially symmetric shells, method of finite elements, conic shells.

Введение

Конструкции, содержащие тонкостенные оболочки из композиционных материалов, используются в авиационной и ракетно-космической технике, судо- и автомобилестроении, энергетическом и химическом машиностроении, жилищном и промышленном строительстве. Постоянное расширение сферы применения композитных материалов стимулирует развитие исследований по методам расчета конструкций из них [1]. Данные конструкции являются многослойными, со слоями, значительно отличающимися по своим свойствам. Чередование несущих высокопрочных слоев с легкими маложесткими слоями придает конструкции высокую прочность и жесткость при относительно небольшой массе. Использование слоев со специальными свойствами позволяет создавать конструкции, которые могут обладать хорошей тепло-, электро- и звукоизоляцией, радиопрозрачностью, высокой стойкостью к агрессивным средам при обеспечении необходимых прочностных характеристик [2–4].

Проведение подобных расчетов требует использования численных методов, таких как метод конечных элементов (МКЭ) и вариационно-разностных методов. Аналитические и асимптотические методы в основном используются при исследовании однослойных пластин и оболочек. При использовании МКЭ существуют некоторые проблемы, связанные как с аппроксимацией поверхности, так и с объемом вычислений [4]. В частности, при расчете конструкций со сложной геометрией (здания и сооружения с большими профильными крышами) используются следующие типы конечных элементов:

1. объемные с 80 степенями свободы [5, С. 296];
2. пластинчатые с 20 степенями свободы [5, С. 235];
3. осесимметричные с 6 степенями свободы [5, С. 235], с одинаковыми физическими свойствами по всему объему.

При этом в реальных сооружениях оболочки являются лишь частью конструкции, что усложняет разрешающую систему в целом.

Использование объемных и пластинчатых элементов в конечном итоге приводит к системам значительных размерностей, что требует большого объема вычислений и машинных ресурсов.

Для решения этих проблем в настоящей работе при проведении расчетов предлагается осесимметричный конечный элемент, использующий соотношения для внутренней работы каждого слоя в отдельности, что позволяет учитывать геометрическую и физическую нелинейности, а также неоднородность по слоям оболочки. На основе МКЭ с использованием принципа возможных перемещений и гипотез Кирхгофа–Лява построена дискретная математическая модель. Порядок разрешающих уравнений при этом не зависит от количества слоев оболочки.

По сравнению с существующими типами элементов предлагаемый элемент позволяет уменьшить размерность матрицы жесткости, что приведет к экономии машинных ресурсов, и достичь заданной точности расчетов при меньшем числе узлов; как следствие, будет значительно уменьшено время нахождения решения. Предлагаемую модель можно обобщить на случай трехслойных осесимметричных оболочек.

Постановка задачи

Рассмотрим изгиб тонкой двухслойной конической оболочки под действием осесимметричной нагрузки. Решение данной задачи будем искать посредством МКЭ [3]. В качестве системы координат выберем цилиндрическую, для которой коэффициенты Ламе [4] $H_1 = 1$, $H_2 = r$; радиусы кривизны $R_1 = \infty$, $R_2 = r/\cos\theta$. Однослойный элемент оболочки в цилиндрической системе координат с координатными линиями s и φ представлен на рис. 1.

На рис. 1 u – осевое смещение, w – радиальное смещение в локальной системе координат; \tilde{u} – осевое смещение, \tilde{w} – радиальное смещение в глобальной системе координат; β – угол поворота вокруг оси, перпендикулярной меридиональной кривой; θ – угол конусности; Z – ось симметрии оболочки.

На рис. 2 s – длина дуги точки P ; $r(s)$ – радиус параллели; θ – угол конусности [5]; l – длина осесимметричного конечного элемента оболочки; точки 1, 2 – узлы конечного элемента; r_1, r_2 – радиусы параллели в точках 1 и 2 соответственно; \mathbf{n} – нормаль к срединной плоскости конечного элемента; \mathbf{e} – вектор, параллельный срединной плоскости конечного элемента; Z – ось симметрии оболочки. Радиус параллели определяется как

$$r(s) = s \sin \theta + r_1. \quad (1)$$

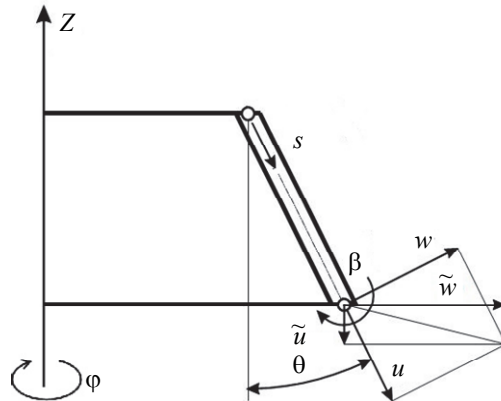


Рис. 1. Глобальные и локальные координаты осесимметричного элемента конической оболочки

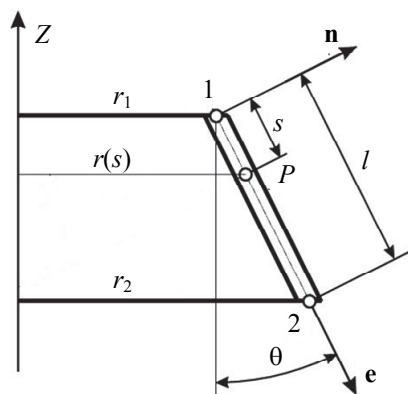


Рис. 2. Осесимметричный элемент конической оболочки

Согласно теории Кирхгофа–Лява [6], компоненты мембранных и изгибных деформаций имеют вид

$$\epsilon_{11} = \epsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_\varphi = \frac{u \sin \theta + w \cos \theta}{r}, \quad \gamma_{12} = 0, \quad (2)$$

$$\kappa_{11} = \kappa_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_{22} = \kappa_\varphi = -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \kappa_{12} = 0,$$

где ϵ_s и ϵ_φ – линейные деформации в направлении координатных линий s и φ ; γ_{12} – деформация сдвига; κ_s , κ_φ – изменение кривизны в направлении координатных линий s и φ ; κ_{12} – деформация скручивания.

Компоненты перемещений имеют вид

$$w = w(s); \quad u = u(s); \quad v = 0; \quad \beta = -\frac{\partial w(s)}{\partial s}; \quad (3)$$

где u – осевое смещение, w – радиальное смещение, β – угол поворота вокруг оси, перпендикулярной меридиональной кривой.

В качестве искомой величины рассмотрим прогиб конической оболочки $w = w(s)$, для моделирования которого воспользуемся осесимметричными конечными элементами с двумя узлами по три степени свободы в каждом: $\{\mathbf{g}_0\}^T = \{u \ w \ \beta\}$, где $\{\mathbf{g}_0\}$ – вектор узловых степеней свободы конечного элемента; β – угол поворота в радиальном направлении (рис. 1). Для построения математической модели применим вариационный принцип Лагранжа [7], который в случае конической оболочки можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{matrix} - \\ \end{matrix} \right\}^T \{\mathbf{R}\} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{matrix} - \\ \end{matrix} \right\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dz d\varphi ds, \quad (4)$$

где $\{\mathbf{g}\}^T = \{u_i \quad w_i \quad \beta_i \quad u_{i+1} \quad w_{i+1} \quad \beta_{i+1}\}$ – вектор перемещений; $\{\mathbf{R}\}^T = \{R_{s_i} \quad R_{\varphi_i} \quad M_{\beta_i} \quad R_{s_{i+1}} \quad R_{\varphi_{i+1}} \quad M_{\beta_{i+1}}\}$ – вектор усилий; $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = \{\varepsilon_s \quad \varepsilon_\varphi \quad \kappa_s \quad \kappa_\varphi\}$ – вектор деформаций; $\{\boldsymbol{\sigma}\}^T = \{\sigma_s \quad \sigma_\varphi \quad \chi_s \quad \chi_\varphi\}$ – вектор напряжений; s_i – координата i -го узла; черта над переменной означает вариацию признака.

Вспользуемся следующими функциями формы:

$$u(s) = a_1 + a_2 s; \quad w(s) = a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3, \quad (5)$$

тогда поле перемещений, используя (3), будем аппроксимировать как

$$\{\mathbf{g}\} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{bmatrix} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{a}\} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2s & -3s^2 \end{bmatrix} \{\mathbf{a}\}, \quad (6)$$

где $\mathbf{a}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6\}$.

Так как соотношения (5) и (6) справедливы для всех точек конечного элемента, для его узлов получим

$$\{\mathbf{g}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{a}\},$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_i & s_i^2 & s_i^3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2s_i & -3s_i^2 \\ 1 & s_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_{i+1} & s_{i+1}^2 & s_{i+1}^3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2s_{i+1} & -3s_{i+1}^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{g}\}. \quad (8)$$

Осесимметричный конечный элемент для моделирования прогибов тонкой конической оболочки

Для тонкой конической оболочки будут отсутствовать сдвиговые деформации, т.е. векторы деформаций и напряжений будут содержать только по четыре компоненты [8]. Тогда принцип возможных перемещений (4) можно будет переписать следующим образом:

$$\{\bar{\mathbf{g}}\}^T \{\mathbf{R}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\bar{\varepsilon}_s \sigma_s + \bar{\varepsilon}_\varphi \sigma_\varphi + \bar{\kappa}_s \chi_s + \bar{\kappa}_\varphi \chi_\varphi) dz ds d\varphi. \quad (9)$$

Закон Гука [1, 6] примет вид

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & -z\nu \\ 0 & 0 & -z\nu & -z \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}. \quad (10)$$

Вспользовавшись формулами Коши (2) и соотношениями (6), получим

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\varphi \\ \kappa_s \\ \kappa_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ u \sin \theta + w \cos \theta \\ \frac{r}{\partial s^2} \\ -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r \\ \mathbf{C}_{\varphi u} \sin \theta + \mathbf{C}_{\varphi w} \cos \theta \\ -\mathbf{C}_s \\ -\frac{\sin \theta}{r} \mathbf{C}_\varphi \end{bmatrix} \{\mathbf{a}\}. \quad (11)$$

где

$$\{\mathbf{C}_r\} = \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}; \quad \{\mathbf{C}_{\varphi u}\} = \{1 \quad s \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}; \quad \{\mathbf{C}_{\varphi w}\} = \{0 \quad 0 \quad 1 \quad s \quad s^2 \quad s^3\};$$

$$\{\mathbf{C}_s\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6s\}; \quad \{\mathbf{C}_\varphi\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2s \quad 3s^2\}.$$

Подставляя (7) в (10), можно получить выражение

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\varphi \\ \kappa_s \\ \kappa_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_r \\ C_{\varphi u} \sin \theta + C_{\varphi w} \cos \theta \\ r \\ -C_s \\ -\frac{\sin \theta}{r} C_\varphi \end{Bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{g}\}. \quad (12)$$

После выполнения необходимых преобразований, учитывая (1), несложно вычислить $\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{k}]\{\mathbf{g}\}$, (13)

где

$$[\mathbf{k}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\varepsilon_s \sigma_s + \varepsilon_\varphi \sigma_\varphi + \kappa_s \chi_s + \kappa_\varphi \chi_\varphi) r dr ds d\varphi. \quad (14)$$

Преобразуем матрицу жесткости (14) и вектор усилий (13) в глобальную систему координат. В соответствии с рис. 1 w, u – перемещения в локальной системе координат, \tilde{w}, \tilde{u} – перемещения в глобальной системе координат, углы поворота β и $\tilde{\beta}$ в локальной и глобальной системах совпадают. Преобразование задается следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{Bmatrix} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{g}_0\}, \quad (15)$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{L} – матрица преобразования из локальной в глобальную систему координат для одного узла конечного элемента; \mathbf{T} – матрица преобразования из локальной в глобальную систему координат для конечного элемента оболочки, состоящего из двух узлов.

Локальная матрица жесткости в глобальной системе координат имеет вид

$$[\tilde{\mathbf{k}}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{k}][\mathbf{T}]. \quad (16)$$

Глобальная матрица жесткости формируется следующим образом:

$$[\mathbf{K}_{3j,3i}^{glob}] = [\mathbf{K}_{3j,3i}^{glob}] + [\tilde{\mathbf{k}}_j], j = 1, N. \quad (17)$$

где $[\mathbf{K}_{3j,3i}^{glob}]$ – подматрица глобальной матрицы жесткости; $[\tilde{\mathbf{k}}_j]$ – локальная матрица жесткости j -го конечного элемента, вычисляемая по формуле (14); N – количество конечных элементов.

Вектор узловых усилий $\{\mathbf{R}\}$, содержащий нагрузки, действующие на элемент оболочки, равен

$$\{\mathbf{R}\} = \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{\mathbf{u}\} \{\mathbf{p}\} ds d\varphi, \quad (18)$$

$$\{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} p_s \\ p_n \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где p_s содержит распределенную нагрузку в направлении координатной линии s , p_n – распределенную нагрузку, перпендикулярную срединной плоскости оболочки.

Подставляя (6) и (8) в (18), можно получить выражение

$$\{\mathbf{R}\} = \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{\mathbf{u}\} \{\mathbf{p}\} ds d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{\mathbf{N}\}^T [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{p}\} ds d\varphi. \quad (19)$$

Локальный вектор усилий в глобальной системе координат имеет вид

$$\{\tilde{\mathbf{R}}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{R}\}. \quad (20)$$

Формируется вектор узловых усилий $\{\mathbf{R}\}$, содержащий суммарные нагрузки, действующие на всю оболочку.

Глобальный вектор узловых усилий формируется следующим образом:

$$\{\mathbf{R}_{3j}^{glob}\} = \{\mathbf{R}_{3j}^{glob}\} + \{\tilde{\mathbf{R}}_j\}, j = 1, N. \quad (21)$$

В результате получаем

$$\{\mathbf{R}^{glob}\} = [\mathbf{K}^{glob}] \{\mathbf{g}\}. \quad (22)$$

После формирования вектора внешних узловых нагрузок учитываются граничные условия, и решается система линейных алгебраических уравнений вида (22) с глобальной матрицей, вычисленной по формуле (17).

После определения перемещений возможно вычисление компонентов тензоров деформаций и напряжений.

Конечноэлементное моделирование двухслойной конической оболочки

При моделировании прогибов тонкой двухслойной конической оболочки для слоев применим гипотезы Кирхгофа–Лява [9].

Воспользуемся принципом возможных перемещений (4), который в случае двухслойной конической оболочки перепишем в виде

$$\{\bar{\mathbf{g}}\}^T \{\mathbf{R}\} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^0\} dzd\varphi ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}+h} \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^1\} dzd\varphi ds, \quad (23)$$

где цифра в индексе означает номер слоя оболочки, 0 соответствует внутреннему слою.

Используя (23), выражения (9) и (14) перепишем в виде

$$\{\bar{\mathbf{g}}\}^T \{\mathbf{R}\} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^0 \boldsymbol{\sigma}_s^0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varphi^0 \boldsymbol{\sigma}_\varphi^0 + \bar{\boldsymbol{\kappa}}_s^0 \boldsymbol{\chi}_s^0 + \bar{\boldsymbol{\kappa}}_\varphi^0 \boldsymbol{\chi}_\varphi^0) dzdsd\varphi + \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}+h} \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^1 \boldsymbol{\sigma}_s^1 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varphi^1 \boldsymbol{\sigma}_\varphi^1 + \bar{\boldsymbol{\kappa}}_s^1 \boldsymbol{\chi}_s^1 + \bar{\boldsymbol{\kappa}}_\varphi^1 \boldsymbol{\chi}_\varphi^1) dzdsd\varphi, \\ \{\mathbf{k}\} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\boldsymbol{\varepsilon}_s^0 \boldsymbol{\sigma}_s^0 + \boldsymbol{\varepsilon}_\varphi^0 \boldsymbol{\sigma}_\varphi^0 + \boldsymbol{\kappa}_s^0 \boldsymbol{\chi}_s^0 + \boldsymbol{\kappa}_\varphi^0 \boldsymbol{\chi}_\varphi^0) dzdsd\varphi + \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}+h} \int_0^{2\pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\boldsymbol{\varepsilon}_s^1 \boldsymbol{\sigma}_s^1 + \boldsymbol{\varepsilon}_\varphi^1 \boldsymbol{\sigma}_\varphi^1 + \boldsymbol{\kappa}_s^1 \boldsymbol{\chi}_s^1 + \boldsymbol{\kappa}_\varphi^1 \boldsymbol{\chi}_\varphi^1) dzdsd\varphi. \quad (24)$$

Закон Гука [10] в случае конструктивно неоднородного анизотропного, армированного в меридиональном направлении слоя оболочки примет вид

$$\{\boldsymbol{\sigma}^0\} = \begin{Bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -zD_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -zD_{22} \end{Bmatrix} \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\}. \quad (25)$$

$$B_{11} = \frac{(1-\omega_z)E_c}{1-\nu_c^2} + \omega_z E_{11}; \quad B_{22} = \frac{(1-\omega_z)E_c}{1-\nu_c^2} + \omega_z E_{22}; \quad B_{12} = \frac{(1-\omega_z)E_c}{1-\nu_c^2} \nu_c + \omega_z E_{12};$$

$$\|D_{11}\| = \|Q_{11}\|^{-1}; \quad \|D_{22}\| = \|Q_{22}\|^{-1};$$

$$Q_{11} = \frac{2(1-\omega_z)(1+\nu_c)}{E_c} + \omega_z \Gamma_{11}; \quad Q_{22} = \frac{2(1-\omega_z)(1+\nu_c)}{E_c} + \omega_z \Gamma_{22},$$

где B, D, Q – эффективные тангенциальные и поперечные сдвиговые жесткости и податливости армированного слоя.

Физические составляющие (25) определяются следующими равенствами:

$$E_{11} = \omega E_a + (1-\omega)E_c + \frac{E_c E_a (\omega \nu_a + (1-\omega)\nu_c)^2}{\omega(1-\nu_a^2)E_c + (1-\omega)(1-\nu_c^2)E_a}; \\ E_{12} = \frac{E_c E_a (\omega \nu_a + (1-\omega)\nu_c)}{\omega(1-\nu_a^2)E_c + (1-\omega)(1-\nu_c^2)E_a}; \quad E_{22} = \frac{E_c E_a}{\omega(1-\nu_a^2)E_c + (1-\omega)(1-\nu_c^2)E_a}; \\ \Gamma_{11} = \frac{2(1+\nu_c)(1+\nu_a)}{\omega(1+\nu_c)E_a + (1-\omega)(1+\nu_a)E_c}; \quad \Gamma_{22} = 2 \frac{\omega(1+\nu_a)E_c + (1-\omega)(1+\nu_c)E_a}{E_a E_c}, \quad (26)$$

где E_a, E_c, ν_a, ν_c – модуль Юнга и коэффициент Пуассона армирующего волокна и связующего материала соответственно.

Формулами (27) задаются структурные параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω) и по высоте слоя (ω_z):

$$\omega = \frac{d}{l}; \quad \omega_z = \frac{\delta}{h}; \quad (27)$$

где δ, d – размеры армирующих волокон по высоте и ширине; h, l – размеры элемента по высоте и ширине.

Закон Гука [10] в случае конструктивно неоднородных анизотропных оболочек, армированных в окружном направлении, примет вид

$$\{\sigma^1\} = \begin{Bmatrix} B_{22} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -zD_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -zD_{11} \end{Bmatrix} \{\epsilon^1\}. \quad (28)$$

Слой оболочки армированы волокнами постоянного сечения.

Остальные матрицы вычисляются по формулам (15)–(22).

Так как края оболочки жестко защемлены, граничные условия запишем следующим образом:

$$w(s) = 0; u(s) = 0; \beta = -\frac{\partial w(s)}{\partial s} = 0; \quad (29)$$

при $s = a, b$; где a, b – координаты точек 1 и 2 соответственно на рис. 2.

Алгоритм решения задачи.

1. Вычисляем локальную матрицу жесткости $[k]$ для осесимметричного элемента оболочки по формуле (24), используя (7), (11), (12). Зависимости между напряжениями и деформациями вычисляются по формулам (25)–(28).
2. Преобразуем локальную матрицу жесткости в глобальную систему координат по (15), (16).
3. Глобальная матрица жесткости $[K_{3j,3i}^{glob}]$ формируется по (17).
4. Вычисляем локальный вектор узловых усилий $\{R\}$, содержащий нагрузки, действующие на элемент оболочки (19).
5. Получаем локальный вектор усилий $\{\tilde{R}\}$ в глобальной системе координат (20).
6. Формируем глобальный вектор узловых усилий $\{R_{3j}^{glob}\}$, содержащий суммарные нагрузки, действующие на всю оболочку (21).
7. Учитываем граничные условия (для жестко защемленной оболочки – (29)), решая систему линейных алгебраических уравнений вида (22), получаем вектор перемещений $\{g\}$ оболочки, содержащий прогибы оболочки.

Верификация предложенной математической модели

Для верификации предложенной математической модели рассмотрим однослойный и двухслойный конус, для которых известны аналитическое и численно-аналитическое решения соответственно [11, 12].

Модельная задача 1. Рассмотрим конус, находящийся под действием осесимметричной нагрузки (рис. 3).

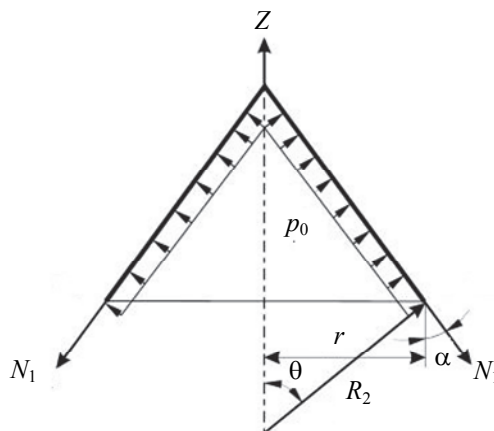


Рис. 3. Конус под действием осесимметричной нагрузки

На рис. 3 p_0 – интенсивность равномерно распределенной нагрузки; R_2 – главный радиус кривизны; α – угол полураствора конуса; r – радиус параллели; N_1 – усилия в меридиональном направлении; Z – ось симметрии оболочки; θ – меридиональный угол.

Как известно [13, 14], деформации в направлении параллели, перемещение вдоль s и прогибы в направлении нормали к оболочке будут вычисляться по следующим формулам:

$$\varepsilon_2 = \frac{p_0 R_2 \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)}{Eh},$$

$$u = \frac{p_0 r^2}{Eh \sin 2\alpha} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + C,$$

$$w = \varepsilon_2 R_2 - \frac{u R_2 \cos \theta}{r},$$

где константа C определяется из условий закрепления оболочки. В случае защемления $u = 0, r = S \sin \alpha$.

Примем угол полураствора конуса $\alpha = 30^\circ$, высоту конуса $L = 2$ м, толщину $h = 0,01$ м, модуль упругости $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $p_0 = 1$ МПа. Будем дискретизировать конус на десять конечных элементов. Результаты решения показаны в табл. 1. Локальную матрицу жесткости будем вычислять по формулам (14).

Решение	$s, \text{ м}$								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
Аналитическое	0,092	0,112	0,144	0,189	0,248	0,319	0,403	0,500	0,610
МКЭ	0,102	0,121	0,153	0,199	0,257	0,328	0,412	0,506	0,664
Погрешность, %	9,22	7,68	6,04	4,65	3,59	2,80	2,28	1,15	8,04

Таблица 1. Прогиб (w) в направлении нормали к оболочке, мм

Максимальный прогиб, найденный с помощью предложенного алгоритма, составил для защемленной оболочки – 0,66 мм, с помощью аналитического решения – 0,61 мм. Максимальная погрешность для максимального прогиба не превышала 8,04% при небольшом числе конечных элементов.

Модельная задача 2. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние двухслойной жестко защемленной конической оболочки, нулевой (внутренний) слой которой армирован волокнами постоянного сечения в меридиональном направлении, первый – в окружном. Примем угол полураствора конуса $\alpha = 30^\circ, h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = 0,5h, b/h = 20, a/b = 0,2, \nu_c = \nu_a = 0,3, E_0^c = E_1^c = E_c, E_0^a = E_1^a = E_a, \nu_1^a = \nu_0^a = \nu_a, \nu_1^c = \nu_0^c = \nu_c$.

Интенсивность армирования нулевого слоя является переменной:

$$\omega = \omega_a a / b,$$

где ω_a – значение рассматриваемой интенсивности в сечении $s = a$ оболочки ($0 < a \leq s \leq b$).

Интенсивности армирования слоев:

$$\omega_{z_0} = \omega_{z_1} = \omega_1 = 0,5; \omega_0 \Big|_{x=a/b} = 0,9.$$

Максимальные значения модулей безразмерного прогиба без учета поперечных сдвигов приведены в табл. 2.

Решение	E_d/E_c								
	1	5	10	15	20	30	40	50	
Численно-аналитическое [10]	0,718	0,480	0,359	0,289	0,245	0,186	0,153	0,129	
МКЭ	10	0,707	0,474	0,352	0,281	0,235	0,176	0,141	0,117
Погрешность, %	элементов	1,53	1,25	1,94	2,76	4,08	5,37	7,84	9,3
МКЭ	30	0,708	0,475	0,352	0,282	0,237	0,180	0,146	0,122
Погрешность, %	элементов	1,4	1,0	1,9	2,4	3,3	3,2	4,6	5,4

Таблица 2. Максимальные значения модулей безразмерного прогиба ($w \cdot 10^{-2}$) двухслойной жестко защемленной конической оболочки

Конус дискретизировался десятью и тридцатью осесимметричными конечными элементами.

Решение с помощью предложенного алгоритма сравнивалось с численно-аналитическим решением из [10]. Матрица жесткости вычислялась по формулам (24). Максимальная погрешность решений не превышала 9,3% при количестве элементов, равном 10, и 5,4% при количестве конечных элементов, равном 30.

Заключение

В работе предложен осесимметричный конечный элемент, позволяющий экономить машинные ресурсы, достичь заданной точности расчетов при меньшем числе узлов и, как следствие, значительно

уменьшить время нахождения решения за счет «парной» осесимметричности – осесимметричности объекта плюс осесимметричности конечного элемента.

Полученные результаты исследования напряженно-деформированного состояния двухслойных осесимметричных оболочек методом конечных элементов могут служить основой как при выработке конкретных технологических решений, так и при формулировке общих рекомендаций по вопросам проектирования конструкций.

Предлагаемую модель можно использовать при расчете многослойных конструкций [15] под действием осесимметричных нагрузок – композитных баллонов высокого давления, цилиндрических стеклопластиковых труб, резервуаров для хранения взрывчатых и огнеопасных веществ, нефте- и газохранилищ.

References

1. Golovanov A.I., Kornishin S.M. *Vvedenie v Metod Konechnykh Elementov Statiki Tonkikh Obolochek* [Introduction to Finite Element Method of Thin Shells Static]. Kazan', 1989, 269 p.
2. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. *Plastinki i Obolochki* [Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p.
3. Chappelle D., Bathe K.-J. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Berlin, Springer, 2011, 426 p. doi: 10.1007/978-3-642-16408-8
4. Gallagher R.H. Finite element representations for thin shell instability analysis. In *Buckling of Structures*. Ed. B. Budiansky. Berlin-NY, Springer-Verlag, 1976, pp. 40–51.
5. Zenkevich O. *Metod Konechnykh Elementov v Tekhnike* [Finite Element Method in the Technique]. Moscow, Mir Publ., 1975, 541 p.
6. Hinton E., Owen J.R. *Finite Element Programming*. London, Academic Press, 1980, 305 p.
7. Moaveni S. *Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS*. 3rd ed. Prentice Hall, 2008, 880 p.
8. Singiresu S.R. *The Finite Element Method in Engineering*. 4th ed. Elsevier, 2004, 688 p.
9. Bathe K.-J. *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice Hall, 1996, 1052 p.
10. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogosloynye Anizotropnye Obolochki i Plastiny: Izgib, Ustoichivost', Kolebaniya* [Multilayered Anisotropic Shells and Plates: Bend, Stability, Fluctuations]. Novosibirsk, Nauka, 2001, 288 p.
11. Hughes T.J.R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey, Prentice Hall Inc., 1987, 832 p.
12. Cook R.D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. NY, John Wiley and Sons, Inc., 1995, 336 p.
13. Hutton D.V. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. 1st ed. NY, McGraw-Hill, 2003, 512 p.
14. Chou P.C., Pagano N.J. *Elasticity: Tensor, Dyadic and Engineering Approaches*. Dover Publ., 1992, 290 p.
15. Kurochka K.S. Konechnoelementnoe modelirovanie progibov tonkikh kruglykh trekhsloinykh plastin [Finite-element modeling of thin circular deflections of 3-layer plates]. *Informatika*, 2014, no. 41, pp. 25–34.

- Курочка Константин Сергеевич** – кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой, Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, 246746, Республика Беларусь, Kurochka@gstu.by
- Стефановский Игорь Леонидович** – аспирант, Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, 246746, Республика Беларусь, igorstgstu@gmail.com
- Kanstantsin S. Kurochka** – PhD, Associate professor, Head of Chair, P. O. Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, 246746, Republic of Belarus, Kurochka@gstu.by
- Igor L. Stefanovski** – postgraduate, P. O. Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, 246746, Republic of Belarus, igorstgstu@gmail.com