



УДК 512.643: 62.50

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МОДУЛЯЦИЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРОНЕКЕРОВСКИХ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А.С. Васильев<sup>а</sup>, А.В. Ушаков<sup>а</sup><sup>а</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: ushakov-AVG@yandex.ru

### Информация о статье

Поступила в редакцию 10.04.15, принята к печати 19.06.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-5-839-848

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Васильев А.С., Ушаков А.В. Моделирование динамических систем с модуляцией с использованием кронекеровских векторно-матричных представлений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 5. С. 839–848.

### Аннотация

Предметом исследования является проблема моделирования динамических систем с модуляцией с использованием возможностей метода пространства состояний. Метод пространства состояний, который стал основой современной теории управления, опирающейся на возможности векторно-матричного формализма линейной алгебры, позволил решить многие задачи управления техническими объектами непрерывной и дискретной природы, инвариантные относительно размерности их «вход–выходных» отношений, но обошел вниманием широкий класс систем управления, аппаратная среда которых осуществляет модуляцию сигналов. Отмеченный системный пробел частично компенсируется предлагаемой вниманию читателей работой, в которой для процессов с модуляцией сигналов использован метод кронекеровских векторно-матричных представлений. Основным результатом является векторно-матричное представление процессов с модуляцией, формально не отличающееся от процессов в непрерывных системах. Модельные представления процессов описаны с использованием кронекеровских произведений. Способы вычисления собственных чисел кронекеровских матричных сумм, являющихся матричной основой данных представлений, позволяют использовать модальное направление в исследовании динамики систем с модуляцией. Использование свойств управляемости собственных чисел матриц общего вида применительно к матрицам, представляющим собою кронекеровские структуры, позволило удачно разделить спектр собственных чисел на управляемые и неуправляемые компоненты. Результаты статьи, состоящие в решении проблем конструирования моделей динамических процессов с модуляцией на основе используемых возможностей кронекеровских векторных и матричных структур, инвариантных относительно размерности «вход–выходных» отношений, могут найти практическое применение в разработках следящих электроприводов переменного тока.

### Ключевые слова

система с модуляцией, моделирование, кронекеровские векторно-матричные представления, управляемость собственных чисел.

### Благодарности

Работа поддержана правительством Российской Федерации (Грант 074-U01) и Министерством образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031).

## MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS WITH MODULATION BY MEANS OF KRONECKER VECTOR-MATRIX REPRESENTATION

A.S. Vasilyev<sup>а</sup>, A.V. Ushakov<sup>а</sup><sup>а</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Vasilyev\_90@mail.ru

### Article info

Received 10.04.15, accepted 19.06.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-5-839-848

Article in Russian

**For citation:** Vasilyev A.S., Ushakov A.V. Modeling of dynamic systems with modulation by means of Kronecker vector-matrix representation. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 5, pp. 839–848.

### Abstract

The paper deals with modeling of dynamic systems with modulation by the possibilities of state-space method. This method, being the basis of modern control theory, is based on the possibilities of vector-matrix formalism of linear algebra and helps to solve various problems of technical control of continuous and discrete nature invariant with respect to the dimension of their “input-output” objects. Unfortunately, it turned its back on the wide group of control systems, which hardware

environment modulates signals. The marked system deficiency is partially offset by this paper, which proposes Kronecker vector-matrix representations for purposes of system representation of processes with signal modulation. The main result is vector-matrix representation of processes with modulation with no formal difference from continuous systems. It has been found that abilities of these representations could be effectively used in research of systems with modulation. Obtained model representations of processes with modulation are best adapted to the state-space method. These approaches for counting eigenvalues of Kronecker matrix summaries, that are matrix basis of model representations of processes described by Kronecker vector products, give the possibility to use modal direction in research of dynamics for systems with modulation. It is shown that the use of controllability for eigenvalues of general matrixes applied to Kronecker structures enabled to divide successfully eigenvalue spectrum into directed and not directed components. Obtained findings including design problems for models of dynamic processes with modulation based on the features of Kronecker vector and matrix structures, invariant with respect to the dimension of input-output relations, are applicable in the development of alternate current servo drives.

**Keywords**

system with modulation, modeling, Kronecker vector-matrix representation, eigenvalues controllability.

**Acknowledgements**

The work was partially financially supported by the Government of the Russian Federation (Grant 074-U01) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project 14.Z50.31.0031).

**Введение. Постановка задачи**

Проблема, вынесенная в заголовок работы, подсказана желанием использовать возможности метода пространства состояний [1] для исследования динамических систем с модуляцией. В широком понимании модуляцией сигнал-носителя называется процесс изменения (манипуляции) какого-либо его параметра с помощью информационного сигнала. Таким образом, видов модуляции существует много. Наиболее распространенной является амплитудная модуляция сигнала-носителя переменного тока, поэтому системы с амплитудной модуляцией именуется также системами на несущих переменного тока [2]. Системы управления и следящие системы с амплитудной модуляцией составляют заметную часть практики автоматического управления и следящих приводов. Модуляторами в таких системах являются сельсины, поворотные трансформаторы, индуктивные датчики, полудисковые модуляторы лучистой энергии и т.д. [3]. Однако теоретические исследования процессов в системах с амплитудной модуляцией в последнее время заметно сократились, причем это произошло на фоне интенсификации исследования динамических систем с использованием возможностей метода пространства состояния (МПС) [4, 5].

Метод пространства состояния характеризуется значительной алгебраизацией общей теории систем, одним из результатов которой является возможность использования кронекеровских (прямых) векторно-матричных структур [6]. Обнаруживается, что возможности этих структур могут быть эффективно использованы применительно к исследованию систем с амплитудной модуляцией. Это объясняется тем, что процесс амплитудной модуляции сигнала носителя переменного тока информационным сигналом представим операцией перемножения этих сигналов. Проблемы конструирования моделей динамических процессов с модуляцией на основе используемых возможностей кронекеровских векторных и матричных структур, инвариантных относительно размерности «вход-выходных» отношений, являются предметом настоящей работы. Свойства алгебраического спектра собственных чисел кронекеровской суммы матриц обнаруживают модальную прозрачность процессов в системе с модуляцией. Приводится иллюстративный пример.

**Аппарат исследования систем с модуляцией, основанный на использовании кронекеровских векторно-матричных структур**

Изучение возможностей использования кронекеровских векторно-матричных структур для построения аппарата исследования систем с модуляцией необходимо потому, что в современной линейной алгебре векторно-матричные кронекеровские структуры (ВМКС) относятся к классу матриц особой конструкции и поэтому в массовой литературе по линейной алгебре [7–10], за некоторым исключением [11], не представлены. Они используются в задачах вычисления системных грамианов и решении матричных уравнений [12, 13], но в задачах управления их использование весьма ограничено. В этой связи ниже приводятся свойства ВМКС, которые непосредственно ориентированы на построение матричной модели процессов с модуляцией.

**Определение 1 (О.1).** Кронекеровским произведением двух векторов (1)  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{y} \in R^m$ , называется вектор  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ , составленный из сепаратных бинарных произведений  $\{x_i \cdot y_j; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}\}$  их элементов так, что становится справедливым представление

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = col \left\{ x_i y_j; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m} \right\}, \text{ где } \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \in R^{nm}, \quad (1)$$

где  $\otimes$  – символ кронекеровского произведения векторных и матричных компонентов.

**Примечание 1 (П.1).** Очевидно, кроме кронекеровского произведения  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  векторов может быть построено также произведение  $\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$  векторов, причем в общем случае эти произведения оказываются некоммутативными:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}.$$

**Определение 2 (О.2).** Если размерности векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  одинаковы, то на их кронекеровском произведении  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  может быть построено согласованное сужение (2) (squeeze) этого произведения  $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})_s$ , задаваемое представлением

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})_s = \text{col}\{x_i y_i; i = \overline{1, n}\}. \quad (2)$$

**Примечание 2 (П.2).** Согласованное сужение кронекеровского векторного произведения  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  может быть осуществлено с помощью оператора сужения с матрицей  $\mathbf{S}$  вида

$$\mathbf{S} = \text{diag}\left\{\left[0_{i-1}^T \vdots 1 \vdots 0_{n-i}^T\right]; i = \overline{1, n}\right\}, \quad (3)$$

и становится справедливой запись:  $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})_s = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$ .

В качестве свойств кронекеровского произведения векторов рассмотрим правила дифференцирования кронекеровских векторных произведений по скалярному параметру, причем в основном сосредоточимся на случае, когда скалярным параметром является время. Дифференцирование векторной кронекеровской структуры в виде их кронекеровского произведения осуществляется по правилам дифференцирования сложной функции, представленной в мультипликативной форме:

$$\frac{d}{dt}(x(t) \otimes y(t)) \stackrel{\Delta}{=} \dot{(x(t) \otimes y(t))} = \dot{x}(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes \dot{y}(t),$$

$$\frac{d}{dt}(x(t) \otimes y(t) \otimes z(t)) \stackrel{\Delta}{=} \dot{(x(t) \otimes y(t) \otimes z(t))} = \dot{x}(t) \otimes y(t) \otimes z(t) + x(t) \otimes \dot{y}(t) \otimes z(t) + x(t) \otimes y(t) \otimes \dot{z}(t).$$

**Определение 3 (О.3).** Кронекеровским произведением прямоугольных матриц (4)  $\mathbf{A} \in R^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B} \in R^{p \times q}$  называется матрица  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$  размерности  $(np \times mq)$ , составленная в силу соотношения

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \text{col}\{\text{row}(A_{i,j} \cdot \mathbf{B}; j = \overline{1, m}); i = \overline{1, n}\}. \quad (4)$$

**Примечание 3 (П.3).** Кронекеровское произведение произвольных прямоугольных матриц не обладает коммутативностью, что позволяет записать:  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ .

Задача конструирования матричной модели динамических систем с модуляцией в своей основе использует квадратные матрицы, коими являются матрицы состояния системы, конечномерного источника внешнего воздействия и конечномерного источника модулирующего сигнала, поэтому ниже имеется в виду класс квадратных матриц.

**Определение 4 (О.4).** Кронекеровской суммой квадратных матриц (5)  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  и  $\mathbf{B} \in R^{m \times m}$  называется матрица  $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})$  размерности  $(nm \times nm)$ , составленная в силу соотношения

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A \otimes \mathbf{B}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B$  – единичные матрицы, согласованные по размерности соответственно с матрицами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  так, что  $\dim(\mathbf{I}_A) = \dim(\mathbf{A})$ ,  $\dim(\mathbf{I}_B) = \dim(\mathbf{B})$ ;  $\oplus$  – символ кронекеровской суммы векторных и матричных компонентов.

**Примечание 4 (П.4).** Для кронекеровской суммы квадратных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , а в общем случае и произвольного числа матриц, существует альтернативное название – преобразование Сильвестра (6) матриц, тогда

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A \otimes \mathbf{B} = \text{Si}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (6)$$

Для случая трех квадратных матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  кронекеровская сумма или их преобразование Сильвестра (7) будет записано в следующей форме:

$$\text{Si}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \oplus \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_B \otimes \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_A \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_A \otimes \mathbf{I}_B \otimes \mathbf{C}. \quad (7)$$

Кронекеровская сумма не коммутативна.

Кронекеровские матричные структуры обладают следующими свойствами.

**Свойство 1 (СВ.1).** Алгебраический спектр собственных чисел кронекеровского произведения  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  квадратных матриц  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  и  $\mathbf{B} \in R^{m \times m}$  как матричной функции от матриц обладает тем свойст-

вом, что его элементы образованы попарными произведениями собственных чисел кронекеровски перемножаемых матриц:

$$\sigma(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \left\{ \mu_k : \det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = 0; \mu_k = \lambda_{A_i} \cdot \lambda_{B_j}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; k = \overline{1, mn} \right\}. \quad (8)$$

**Свойство 2 (СВ.2).** Алгебраический спектр собственных чисел кронекеровской суммы  $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$  квадратных матриц  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  и  $\mathbf{B} \in R^{m \times m}$  как матричной функции от матрицы обладает тем свойством, что его элементы образованы попарными суммами собственных чисел кронекеровски суммируемых матриц:

$$\sigma(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = \left\{ \nu_l : \det(\nu \mathbf{I} - \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = 0; \nu_l = \lambda_{A_i} + \lambda_{B_j}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; l = \overline{1, mn} \right\}. \quad (9)$$

В (8) и (9)  $\lambda_{A_i}$  и  $\lambda_{B_j}$  – собственные числа матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

**Примечание 5 (П.5).** Алгебраические спектры собственных чисел кронекеровских произведений  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  и  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$  в силу (8) совпадают, аналогичным свойством обладают и спектры кронекеровских сумм  $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$  и  $\mathbf{B} \oplus \mathbf{A}$ .

**Свойство 3 (СВ.3).** Оператор сужения кронекеровского произведения векторов с матрицей сужения  $\mathbf{S}$  удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{S}(\mathbf{P}\mathbf{X} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{Z}) = \mathbf{S}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Z}). \quad (10)$$

Остальные свойства векторно-матричных кронекеровских структур можно найти в [6, 11, 14].

### Основной результат

Воспользуемся аппаратом кронекеровских векторно-матричных структур, элементы которого приведены в предыдущем разделе, для целей построения динамической модели процессов в линейном многомерном непрерывном объекте с модулированным сигналом на входе. При построении модели процессов будем предполагать, что источник входного немодулированного воздействия (ИВВ) конечномерен и представим автономной системой; будем также предполагать, что модулирующий сигнал является конечномерным, и потому источник модулирующего сигнала (ИМС) представим автономной системой. Таким образом, полное априорное описание задачи приобретает следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \mathbf{x}(0); \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Gamma}\mathbf{z}(t); \mathbf{z}(0); \mathbf{g}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t), \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_M(t) = \mathbf{\Gamma}_M\mathbf{z}_M(t); \mathbf{z}_M(0); \mathbf{g}_M(t) = \mathbf{P}_M\mathbf{z}_M(t). \quad (13)$$

В модели (11) многомерной непрерывной системы  $\mathbf{x}$  – вектор состояния;  $\mathbf{x}(0)$  – вектор начального состояния;  $\mathbf{v}$  – вектор входного модулированного воздействия;  $\mathbf{u}$  – вектор управляющего воздействия;  $\mathbf{y}$  – вектор выхода;  $\mathbf{x} \in R^n; \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{y} \in R^m$ ;  $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  – матрицы состояния, модулированного входа, управления и выхода соответственно;  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ ;  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \in R^{n \times m}$ ;  $\mathbf{C} \in R^{m \times n}$ .

В модели (12) источника входного немодулированного воздействия  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{g}$  – векторы состояния и выхода ИВВ соответственно;  $\mathbf{z} \in R^l; \mathbf{g} \in R^m$ ;  $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{P}$  – матрицы состояния и выхода;  $\mathbf{\Gamma} \in R^{l \times l}$ ;  $\mathbf{P} \in R^{m \times l}$ . В модели (13) источника модулирующего сигнала  $\mathbf{z}_M$  и  $\mathbf{g}_M$  – вектора состояния и выхода ИМС соответственно;  $\mathbf{z}_M \in R^h; \mathbf{g}_M \in R^m$ ;  $\mathbf{\Gamma}_M, \mathbf{P}_M$  – матрицы состояния и выхода ИМС,  $\mathbf{\Gamma}_M \in R^{h \times h}$ ;  $\mathbf{P}_M \in R^{m \times h}$ .

Процесс формирования модулированного входного воздействия  $\mathbf{v}(t)$  представим в форме

$$\mathbf{v}(t) = \text{col}\{g_j(t) \cdot g_{Mj}(t); j = \overline{1, m}\}. \quad (14)$$

Не трудно видеть, что процесс модуляции входного немодулированного воздействия  $\mathbf{g}(t)$  в форме (14) допускает представление его в виде кронекеровского произведения векторов (КПВ)  $\mathbf{g}(t) \otimes \mathbf{g}_M(t)$  с последующим сужением, что соответствует перемножению матрицы сужения  $\mathbf{S}$  (3) на КПВ:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{g}(t) \otimes \mathbf{g}_M(t)). \quad (15)$$

Если теперь учесть правила формирования  $\mathbf{g}(t)$  и  $\mathbf{g}_M(t)$  (12) и (13), то (15) в силу свойств кронекеровских произведений матриц можно записать:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{g}(t) \otimes \mathbf{g}_M(t)) = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{P}_M\mathbf{z}_M(t)) = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}_M)(\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}_M(t)). \quad (16)$$

Выражение (16) описывает модулированный сигнал  $\mathbf{v}(t)$  как функцию состояния системы с вектором состояния  $\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}_M(t)$ .

Сформируем динамическую систему в нормальной форме Коши с вектором состояния  $\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}_M(t)$ , опираясь на модели (12), (13), а также свойства матричных кронекеровских структур. В результате получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{z}(t) \otimes_{\mathbf{z}_M}(t)) & \stackrel{\Delta}{=} \dot{\mathbf{z}}(t) \otimes_{\mathbf{z}_M}(t) + \mathbf{z}(t) \otimes_{\dot{\mathbf{z}}_M}(t) = \\ & = \mathbf{\Gamma} \mathbf{z}(t) \otimes_{\mathbf{z}_M}(t) + \mathbf{z}(t) \otimes_{\mathbf{\Gamma}_M \mathbf{z}_M}(t) = (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{\Gamma}_M} + \mathbf{I}_{\mathbf{\Gamma}} \otimes \mathbf{\Gamma}_M)(\mathbf{z}(t) \otimes_{\mathbf{z}_M}(t)) = \\ & = (\mathbf{\Gamma} \oplus \mathbf{\Gamma}_M)(\mathbf{z}(t) \otimes_{\mathbf{z}_M}(t)); \quad \mathbf{z}(0) \otimes_{\mathbf{z}_M}(0). \end{aligned} \quad (17)$$

Для дальнейших исследований продолжим процесс построения модели динамических систем с модуляцией, для чего введем в рассмотрение составной вектор состояния

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \otimes_{\mathbf{z}_M} \end{bmatrix} \quad (18)$$

и сформулируем утверждение.

**Утверждение 1 (У.1).** Процессы в непрерывной системе (11) с модулированным входным воздействием вида (14), компоненты которого задаются (12) и (13), и немодулированным управляющим воздействием могут быть представлены системой

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t); \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = [\mathbf{x}^T(0), \mathbf{z}^T(0) \otimes_{\mathbf{z}_M}^T(0)]^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_x \tilde{\mathbf{x}}(t); \quad \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_y \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad (20)$$

где матричные компоненты соотношений (19), (20) формируются в силу соотношения

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{E}\mathbf{S}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}_M) \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & \mathbf{\Gamma} \oplus \mathbf{\Gamma}_M \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_x = [\mathbf{I}_X \vdots 0]; \quad \tilde{\mathbf{C}}_y = [\mathbf{C} \vdots 0]. \quad \square \quad (22)$$

**Доказательство.** Доказательство утверждения строится на покомпонентном формировании производной по времени от вектора состояния (18) с использованием исходной модели (11) многомерной системы, представления (16) процесса формирования внешнего модулированного сигнала, а также соотношения (17). ■

При  $\mathbf{u}(t) \equiv 0$  явное решение системы (19), (20) принимает вид

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) \tilde{\mathbf{x}}(0); \quad \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_x \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) \tilde{\mathbf{x}}(0); \quad \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_y \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) \tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что явное решение системы (19), (20) позволяет исследовать поведение системы (11) в случае как модулированных, так и немодулированных входных сигналов.

Очевидно, что в случае немодулированного входного сигнала может быть использована модель (21), в которой в качестве модулируемого сигнала следует использовать постоянный во времени сигнал единичного значения. Для этих целей в (21) следует положить  $\mathbf{\Gamma}_M = 0$ , а в (23) –

$\tilde{\mathbf{x}}(0) = [\mathbf{x}^T(0), \mathbf{z}^T(0) \otimes_{\mathbf{z}_M}^T(0)]^T$  такой, что  $\mathbf{z}_M(0) = 1$ , тогда получим представление (21) в форме

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{E}\mathbf{S}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}_M) \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & \mathbf{\Gamma} \oplus \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \otimes_{\mathbf{1}_{VM}} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где  $\mathbf{1}_{VM} = \text{col}\{q_j = 1; j = \overline{1, m}\}$ .

Для случая модулированного сигнала, т.е. сигнала, полученного модуляцией модулируемого сигнала (сигнала-носителя)  $\mathbf{g}_M(t)$  модулирующим сигналом (информационным)  $\mathbf{g}(t)$ , полезно отметить следующее. Матрица  $\tilde{\mathbf{A}}$  вида (21) позволяет определить модальный состав всех возможных движений системы при модулированном входном сигнале. Действительно, в силу треугольной формы матрицы спектр  $\sigma\{\tilde{\mathbf{A}}\}$  ее собственных чисел представляет собой объединение спектров собственных чисел матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{\Gamma} \oplus \mathbf{\Gamma}_M$ , так что оказывается справедливой запись  $\sigma\{\tilde{\mathbf{A}}\} = \sigma\{\mathbf{A}\} \cup \sigma\{\mathbf{\Gamma} \oplus \mathbf{\Gamma}_M\}$ .

Нетрудно видеть из приведенной записи, что, если входное информационное воздействие является полиномиальным и генерируется источником (12), матрица состояния которого имеет нулевые собственные числа [14], то модальные компоненты [15] движения в системе будут составлены из модальных компонентов системы (11) и модальных компонентов источника сигнала модуляции (13). Если входное информационное воздействие является гармоническим и матрица состояния источника (12) имеет комплексно-сопряженные чисто мнимые собственные числа, при этом сигнал модуляции также является гармоническим, то модальные компоненты движения в системе будет характеризоваться модальными

компонентами системы (11) и гармоническими компонентами с разностными и суммарными частотами входного воздействия и сигнала модуляции.

### Иллюстративный пример

Рассмотрение иллюстративного примера ставит своими задачами:

1. проверку возможности модели (19), (20) для воспроизведения процессов в системе без модуляции;
2. проверку модели (19), (20) с матрицами (21), (22) на адекватность процессов в ней физическим процессам в исходной модели объекта (11) и организацию процедуры модуляции прямым перемножением переменных при гармонических модулируемых сигналах;
3. анализ влияния структуры собственных чисел матрицы состояния (21) системы с модуляцией в форме (20) на модальные компоненты движения в этой системе для случаев полиномиального нулевого порядка входного воздействия и гармонического входного воздействия при различных частотах модуляции.

Если в качестве объекта управления взять колебательное звено с резонансной частотой  $\Omega_p$ , то максимальная полнота картины модального состава движения системы модуляции будет получена при четырех значениях частот сигнала модуляции:

1.  $\omega_M < \Omega_p$ ,
2.  $\omega_M = \Omega_p$ ,
3.  $\Omega_p < \omega_M < \Delta\omega$ ,
4.  $\omega_M > \Delta\omega$ ,

где  $\Delta\omega = \arg\left\{\|W(j\omega)\|_{\omega=\Delta\omega} \leq 0,05\right\}$ .

В примере зададим объект в форме передаточной функции

$$W(s) = \frac{\Omega_p^2}{s^2 + 2\zeta\Omega_p s + \Omega_p^2} \quad (25)$$

с параметрами  $\Omega_p = \pi$ ,  $\zeta = 1/\pi$ .

Переход к векторно-матричному описанию (11) дает для матричных компонентов представление в сопровождающем базисе

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_p^2 & -2\zeta\Omega_p \end{bmatrix}; \mathbf{E} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_p^2 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = [1 \quad 0].$$

В свою очередь, матричные компоненты модели (19), (20) в форме (21), (22) для предложенных случаев исследования системы с модуляцией принимают вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\Omega_p^2 & -2\zeta\Omega_p & \Omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_M \\ 0 & 0 & -\omega_M & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_p^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{C}}_x^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{C}}_y^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega_p^2 & -2\zeta\Omega_p & \Omega_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_M & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_M & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & \omega_M \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & -\omega_M & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_p^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{C}}_x^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{C}}_y^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Причем матрицы вида (26) описывают систему с амплитудной гармонической модуляцией для случая входного информационного сигнала в виде единичного воздействия, а матрицы вида (27) описывают ту же систему с амплитудной гармонической модуляцией для случая входного информационного сигнала в виде гармонического воздействия при произвольных сочетаниях частот  $\omega$  и  $\omega_M$ .

На рис. 1 приведена кривая переходного процесса в системе с передаточной функцией (25), построенная на основании модели (19), (20), матрица состояний которой в случае отсутствия модуляции принимает вид (24).

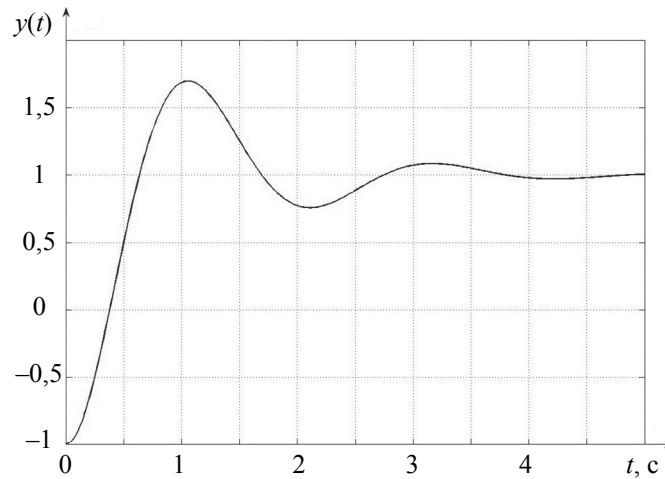


Рис. 1. Кривая переходного процесса

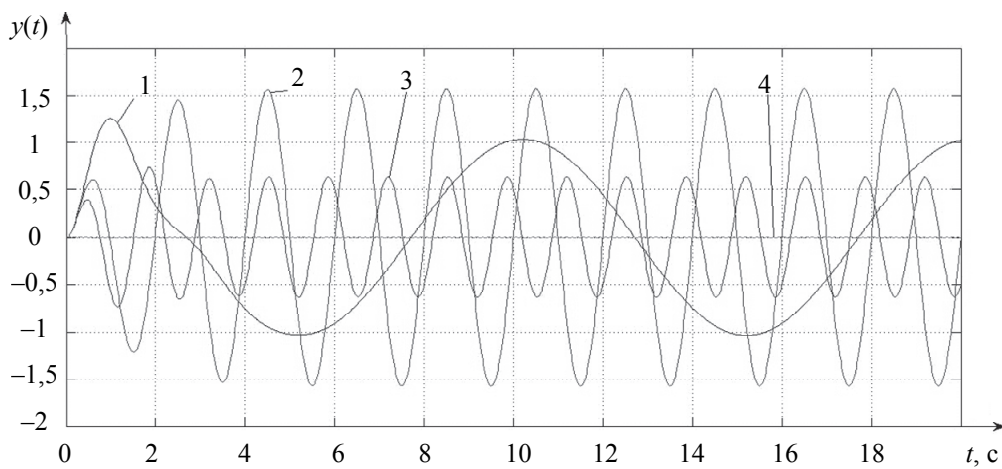


Рис. 2. Кривые модулированных сигналов при единичном входном информационном и косинусоидальном модулируемом сигналах со значениями частот:

$$1 - \omega_M = \frac{\pi}{4}; 2 - \omega_M = \pi; 3 - \omega_M = 1,5\pi; 4 - \omega_M = 16\pi$$

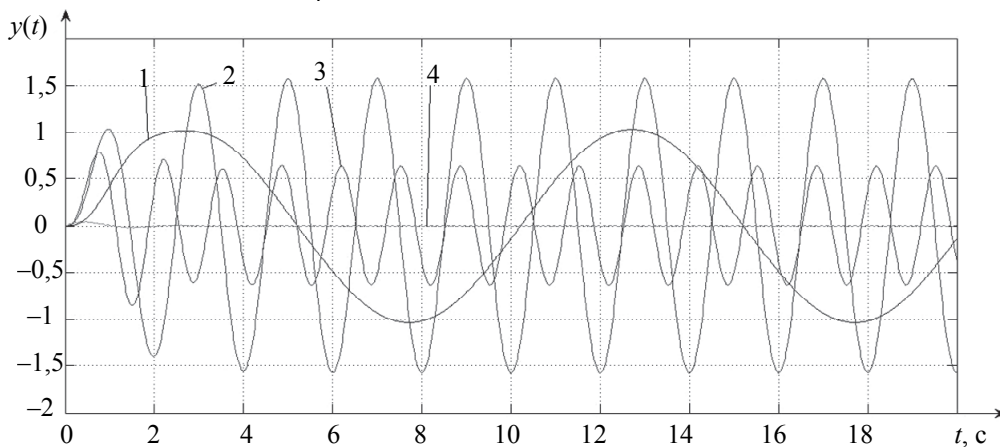


Рис. 3. Кривые модулированных сигналов при единичном входном информационном и синусоидальном модулируемом сигналах (значения частот соответствуют рис. 2)

На рис. 2, 3 приведены кривые процессов для всех четырех заявленных вариантов сочетаний параметров входных информационных сигналов и частот модулируемого гармонического сигнала при единичном скачке входного сигнала. При сигнале модуляции вида «1», который приходится на низкочастотную часть амплитудно-частотной характеристики  $M(\omega) = |W(j\omega)|$  объекта [16], модулированный сигнал

на выходе объекта будет соответствовать значению  $M(\omega)$ , близкому к единице. При сигнале модуляции вида «2», соответствующем окрестности пика  $M(\omega)$ , модулированный сигнал на выходе объекта будет близок к значению пика  $M(\omega)$ . При сигнале модуляции вида «3», соответствующем правой спадающей ветви частотной характеристики  $M(\omega)$ , модулированный сигнал на выходе объекта заметно уменьшится по сравнению с первыми двумя случаями. При сигнале модуляции вида «4», находящимся за пределами полосы пропускания системы  $\Delta\omega$ , он будет крайне малым.

На рис. 4 приведены кривые 4 рис. 2 и рис. 3, полученные при  $\omega_M = 16\pi$ , в увеличенном масштабе.

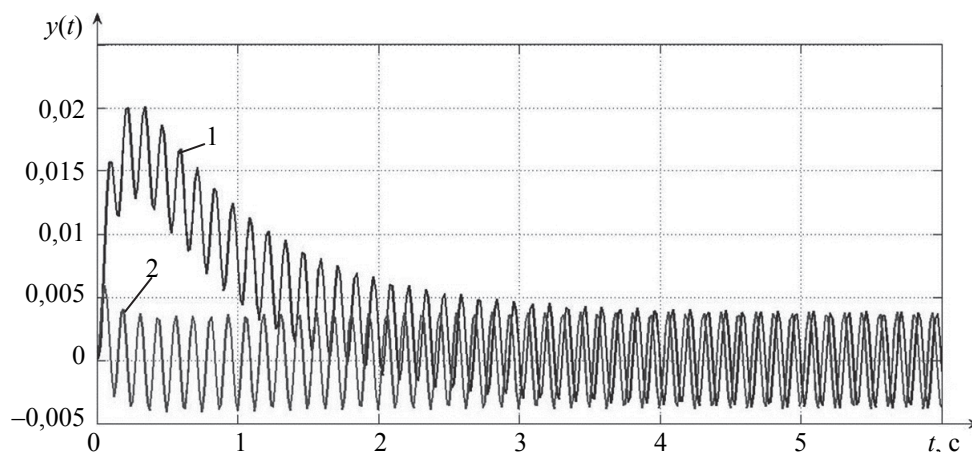


Рис. 4. Кривые модулированных сигналов при единичном входном информационном и синусоидальном-косинусоидальном модулируемых сигналах с частотой  $\omega_M = 16\pi$  (1 – синусоидальный модулируемый сигнал; 2 – косинусоидальный модулируемый сигнал)

На рис. 5–7 приведены кривые модулированных сигналов для трех значений частот входных гармонических информационных сигналов и модулируемого гармонического сигнала фиксированной частоты  $\omega_M = 16\pi$ , который приходится на участок характеристики  $M(\omega)$ , расположенный за пределами полосы пропускания, что позволяет фиксировать крайне низкое значение модулированного сигнала.

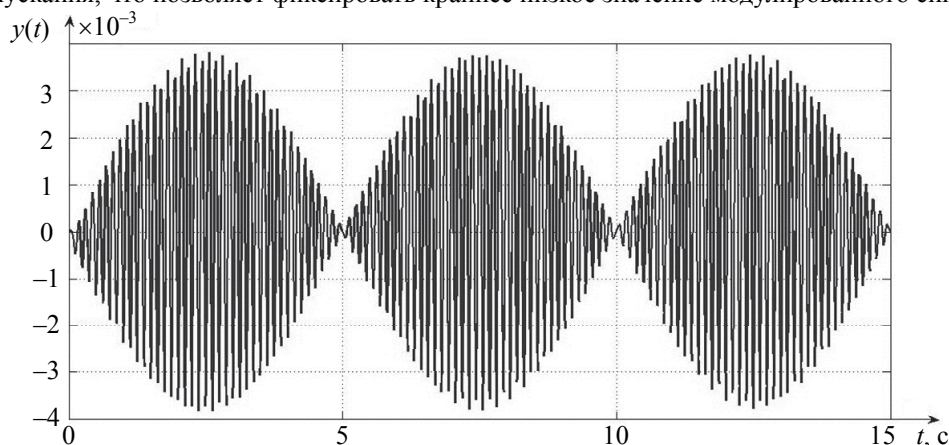


Рис. 5. Кривая модулированного сигнала при гармоническом входном информационном сигнале частоты  $\omega = 0,25\pi$

По результатам моделирования можно сказать, что цели, поставленные в работе, достигнуты. Иллюстративно продемонстрирована универсальность данного подхода как для систем с модуляцией, так и для систем без модуляции. Произведена проверка модели на адекватность процессов в ней физическим процессам в исходной модели объекта и организация процедуры модуляции прямым перемножением переменных при гармонических модулируемых сигналах. Иллюстративно произведен анализ проявления структуры собственных чисел матрицы состояния системы с модуляцией на модальные компоненты движения в этой системе для случаев полиномиального нулевого порядка входного воздействия и гармонического входного воздействия при различных частотах модуляции.



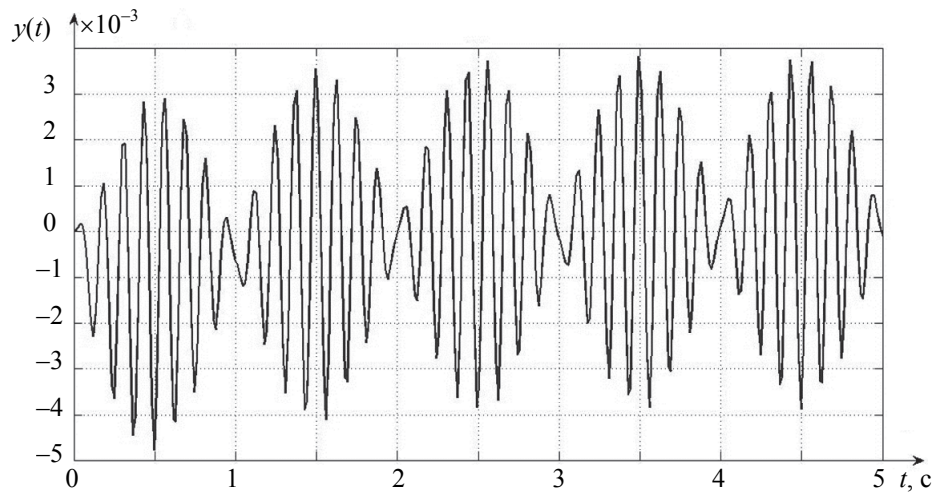


Рис. 6. Кривая модулированного сигнала при гармоническом входном информационном сигнале частоты  $\omega = \pi$

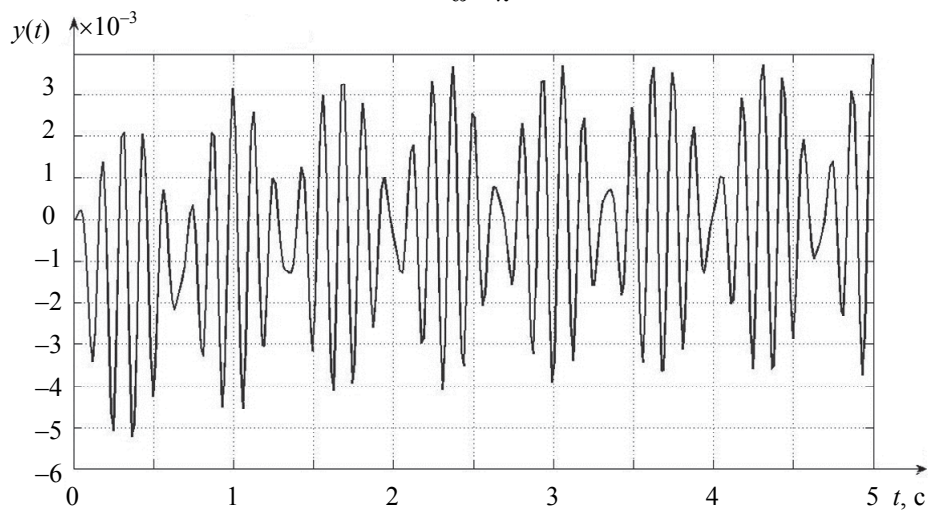


Рис. 7. Кривая модулированного сигнала при гармоническом входном информационном сигнале частоты  $\omega = 1,5\pi$

### Заключение

Модель динамических систем с модуляцией, построенная на основе использования кронекеровских векторно-матричных представлений, предоставляет исследователям возможность без процедур перемножения сигналов изучать динамические системы с произвольным сочетанием информационных и модулируемых сигналов. Модель также дает возможность исследовать свойства динамических систем без модуляции.

### References

1. Dudarenko N.A., Slita O.V., Ushakov A.V. *Matematicheskie Osnovy Sovremennoi Teorii Upravleniya: Apparat Metoda Prostranstva Sostoyanii* [Mathematical Foundations of Modern Control Theory: The Apparatus of the State Space Method] Ed. A.V. Ushakov. St. Petersburg, SPbSU ITMO Publ., 2008, 323 p.
2. Kurakin K.I., Kurakin L.K. *Analiz Sistem Avtomaticheskogo Regulirovaniya na Nesushchei Peremennogo Toka* [Analysis of Automatic Control Systems on the Carrier AC]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978, 240 p.
3. Sabinin Yu.A. *Pozitsionnye i Sledyashchie Elektromekhanicheskie Sistemy: Uchebnoe posobie* [Positional and Tracking Electromechanical Systems: Textbook]. St. Petersburg, Energoatomizdat Publ., 2001, 208 p.
4. Zadeh L.A., Desoer C.A. *Linear System Theory: The State Space Approach*. NY, McGraw-Hill Book Company Inc., 1963, 612 p.
5. Tou J.T. *Modern Control Theory*. NY, McGraw-Hill, 1964, 343 p.
6. Lancaster P., Tismenetskiy M. *The Theory of Matrices. 2<sup>nd</sup> ed. with Applications*. Ser. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1985, 570 p.

7. Gantmakher F.R. *Matrix Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1973, 575 p. (In Russian)
8. Wilkinson J.H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford, 1984, 680 p.
9. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1996, 728 p.
10. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. *Matritsy i Vychisleniya* [Matrices and Calculations]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 320 p.
11. Godsil Ch.D., Royle G. *Algebraic Graph Theory*. NY, Springer-Verlag, 2001, 443 p.
12. Biryukov D.S., Ushakov A.V. Cost control estimation for harmonic exogenous actions: gramian approach. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2011, no. 2 (72), pp. 117–122.
13. Akunov T.A., Alisherov S., Omorov R.O., Ushakov A.V. *Matrichnye Uravneniya v Zadachakh Upravleniya i Nablyudeniya Nepreryvnymi Ob"ektami* [Matrix Equations in Control and Continuous Monitoring Objects]. Bishkek, Ilim, 1991, 174 p.
14. Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis*. NY, McGraw-Hill, 1970.
15. Andreev Yu.N. *Upravlenie Konechnomernymi Lineinymi Ob"ektami* [Control of Finite Linear Objects]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 424 p.
16. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya Sistem Avtomaticheskogo Regulirovaniya* [The Theory of Automatic Control Systems]. St. Petersburg, Professiya Publ., 2003, 752 p.

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| <b>Васильев Андрей Сергеевич</b>    | – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Vasyliev_90@mail.ru  |
| <b>Ушаков Анатолий Владимирович</b> | – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ushakov-AVG@yandex.ru |
| <b>Andrey S. Vasilyev</b>           | – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Vasyliev_90@mail.ru                                      |
| <b>Anatoly V. Ushakov</b>           | – D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ushakov-AVG@yandex.ru                     |