

УДК 681.5.015

УПРАВЛЕНИЕ КВАДРОКОПТЕРОМ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ВЕТРОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

И.В. Петраневский^a, О.И. Борисов^a, В.С. Громов^a, А.А. Пыркин^a

^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: igor.petranevsky@corp.ifmo.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 15.06.15, принята к печати 29.07.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-6-1045-1053

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Петраневский И.В., Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А. Управление квадрокоптером с компенсацией ветровых возмущений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 6. С. 1045–1053.

Аннотация

Предмет исследования. В работе представлен алгоритм управления по выходу для нелинейных многоканальных систем. Модель квадрокоптера выбрана для наглядной демонстрации эффективности метода последовательного компенсатора для стабилизации объектов этого класса. **Базовые положения исследования.** Динамические свойства квадрокоптера могут быть описаны с помощью нелинейной многоканальной системы. Соответственно, первым этапом совершается ее декомпозиция, в результате чего модель делится на две части – статическое преобразование и несколько динамических каналов с одним входом и выходом. После этого осуществляется вывод упрощенной математической модели квадрокоптера, вводится, помимо абсолютной системы координат, локальная система, жестко связанная с роботом. Принимается в расчет соответствующее преобразование координат. **Промежуточные результаты.** Декомпозиция математической модели позволяет осуществить построение системы управления в два шага. Во-первых, применяется закон, в соответствии с которым формируются так называемые виртуальные управляющие сигналы для каждого из каналов модели квадрокоптера. Здесь используется известный метод робастного управления «последовательный компенсатор», удачно зарекомендовавший себя как наиболее простой в реализации с инженерной точки зрения и позволяющий управлять по выходу объектом в условиях его параметрической неопределенности. Во-вторых, осуществляется обратное преобразование, в результате чего получаются реальные управляющие сигналы, распределяемые между исполнительными приводами системы. В данной работе предполагается, что на каждый из каналов объекта действует ветровое возмущение, причем значения и направления этих возмущений меняются пренебрежимо медленно. Таким образом, мы можем рассматривать их как неизвестные константы, которые подлежат компенсации. **Основной результат.** В работе была осуществлена декомпозиция математической модели, осуществлены необходимые преобразования, получена упрощенная модель, синтезировано управление по выходу на основе метода последовательного компенсатора. Получившаяся замкнутая система была промоделирована, получены соответствующие результаты.

Ключевые слова

управление по выходу, робастное управление, нелинейные системы, нелинейные многоканальные системы.

Благодарности

Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01, Госзадание 2014/190 (проект 2118)). Работа была поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект 14.Z50.31.0031)

CONTROL FOR QUADROCOPTER WITH COMPENSATION OF WIND DISTURBANCE

I.V. Petranevsky^a, O.I. Borisov^a, V.S. Gromov^a, A.A. Pyrkin^a

^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: igor.petranevsky@corp.ifmo.ru

Article info

Received 15.06.15, accepted 29.07.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-6-1045-1053

Article in Russian

For citation: Petranevsky I.V., Borisov O.I., Gromov V.S., Pyrkin A.A. Control for quadrocopter with compensation of wind disturbance. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 6, pp. 1045–1053.

Abstract

Subject of Research. The paper presents an output control approach for a class of nonlinear MIMO (Multiple Input Multiple Output) systems. Quadrocopter is chosen to illustrate proposed adaptive control approach based on the high-gain principle, the so-called, “consecutive compensator”. **Basic Concepts.** The dynamic properties of quadrocopter can be described by a

non-linear multi-channel system. Accordingly, the first step is accomplished by its decomposition, whereby the model is divided into two parts: static conversion and several dynamical channels with one input and one output). After the decomposition, a derivation of the simplified mathematical model of the quadcopter is carried out; and, in addition to the absolute coordinate system, the local system rigidly connected with the robot is introduced. The appropriate coordinate transformation is taken into account. **Interim Results.** Decomposition of the mathematical model gives the possibility to create control system in two steps. Firstly, the law is applied; in accordance with it the so-called virtual control actions for each model channel of the quadcopter are generated. A well-known method of robust control, "consecutive compensator", is used here, successfully well-accepted as the most easily implemented one from an engineering point of view. This method gives the possibility to control an object output under its uncertainty quantification. Secondly, the inverse transformation is performed, resulting in real control actions distributed between the system actuators. We assume that wind disturbance affects each channel of the object. What is more, the values and directions of these disturbances are changed negligibly slow. Thus, we can treat them as unknown constants, subject to compensation. **Main Result.** We have developed a multi-channel control system for the quadcopter by different methods (decomposition of the mathematical model and the output of its simplified analogue, coordinate transformation, "consecutive compensator"). The obtained closed-loop system has been successfully simulated and corresponding results have been received.

Keywords

output control, robust control, nonlinear systems, MIMO systems.

Acknowledgements

This article is supported by Government of Russian Federation (GOSZADANIE 2014/190 (project 2118)) and the Ministry of Russian Federation (project 14.Z50.31.0031).

Введение

С практической точки зрения важно не только решить проблему самого управления, но и разработать легко реализуемый подход. Регуляторы с простой настройкой параметров регулирования привлекательны в реализации для инженеров различных областей, включая такие, как аэрокосмическое приборостроение, робототехника [1–6]. В частности, метод робастного управления по выходному сигналу находит применение во многих практических задачах, где измерение переменных вектора состояния не просто или даже невозможно реализовать.

Настоящая работа посвящена вопросам практического применения робастного метода управления по выходу «последовательного компенсатора», который подробно рассмотрен в работах [1, 7–9], для стабилизации многоканальных систем на примере модели квадрокоптера.

В работах [1, 7, 9] рассматриваются модели линейных систем с неизвестными параметрами и статическими нелинейными составляющими. В основе предполагаемого подхода лежит метод пассивации [см. 9, 10]. Регулятор имеет простую структуру и может быть реализован как пропорциональная обратная связь, при условии строгой вещественной положительности системы с замкнутым контуром. В этом смысле разработанный алгоритм очень близок к результатам, представленным в работах [3, 11, 12], но с более низкими требованиями для объекта. Известно, что строгая вещественная положительность эквивалентна гипер-минимальной-фазности [13]. В свою очередь, числитель передаточной функции гурвицев, что является достаточным условием для нашего алгоритма динамических одноканальных систем. Таким образом, мы расширили подход к неустойчивым разомкнутым системам с произвольной относительной степенью линейной части. Это стало допустимым вследствие разработки линейного фильтра специальной структуры.

Экспоненциальная устойчивость невозмущенной замкнутой системы с обратной связью и L_{∞} устойчивость для случая ограниченного возмущения соответственно были доказаны для «последовательного компенсатора» в [9, 14]. В работе [15] эти результаты были применены для распространяющейся во времени задержки. Предлагаемые алгоритмы управления продемонстрировали свою эффективность при наличии внешних возмущающих воздействий и неизвестном времени запаздывания.

В настоящей работе синтезирован регулятор для управления математической моделью квадрокоптера. Он имеет четыре симметрично расположенных исполнительных привода. Управляются они с помощью изменения скорости вращения двигателей и изменения подъемной силы соответственно. Квадрокоптеры – наиболее маневренные, вертикально взлетающие летательные аппараты. Они принадлежат к классу автономных роботов, движение которых происходит без соприкосновения с опорной поверхностью. Динамические свойства квадрокоптера могут быть описаны с помощью нелинейной многоканальной системы с несколькими входами и выходами. Первым этапом совершается ее декомпозиция, в результате чего модель делится на две части: статическое преобразование и несколько одноканальных систем (динамических систем с одним входом и одним выходом). После этого осуществляется вывод упрощенной математической модели квадрокоптера, вводится, помимо абсолютной системы координат, локальная система, жестко связанная с роботом. Принимается в расчет соответствующее преобразование координат. Декомпозиция математической модели позволяет осуществить построение системы управления в два шага. Во-первых, применяется закон, в соответствии с которым формируются так называемые виртуальные управляющие воздействия для каждого из каналов модели квадрокоптера. Здесь используется известный метод робастного управления «последовательный компенсатор», удачно зарекомендовав-

ший себя как наиболее простой в реализации с инженерной точки зрения и позволяющий управлять по выходу объектом в условиях его параметрической неопределенности. Во-вторых, осуществляется обратное преобразование, в результате чего получаются реальные управляющие воздействия, распределенные между исполнительными приводами системы. В данной работе предполагается, что на каждый из каналов объекта действует ветровое возмущение, причем значения и направления этих возмущений меняются пренебрежимо медленно. Таким образом, мы можем рассматривать их как неизвестные константы, которые подлежат компенсации.

Постановка задачи

Зададим нелинейную динамическую систему следующим образом:

$$y_i(t) = G_i(u_1, u_2, \dots, u_r, f_i), \quad (1)$$

где $i=1\dots l$, $y_i(t)$ – выходные переменные, u_1, u_2, \dots, u_r – сигналы управления, G_i – нелинейный дифференциальный оператор в общем случае, f – неизвестные ветровые возмущения, изменяющиеся пренебрежимо медленно.

Регулятор для нелинейной многоканальной системы может быть построен в два шага. Сначала необходимо совершить декомпозицию модели в статическую функцию и независимые динамические одноканальные системы (будем считать, что объект управления такой, что для него данный метод осуществим). Каждый канал соответствует выходной переменной $y_i, i = 1 \dots l$. Для каждого из каналов введем виртуальный сигнал управления $U_i, i = 1 \dots l$, являющийся суперпозицией реальных управляющих сигналов.

После декомпозиции модель (1) примет вид

$$y_i(t) = \bar{G}_i(U_i, f_i), \quad U_i = \tilde{G}_i(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (2)$$

где $\bar{G}_i, i = 1, \dots, l$ – одноканальные динамические каналы, $\tilde{G}_i, i = 1, \dots, l$ статическая многоканальная функция.

Если динамическая нелинейная многоканальная система может быть представлена как многоканальная статическая и несколько одноканальных динамических систем, как в выражении (2), то мы можем синтезировать закон управления для виртуальных входов $U_i, i = 1, \dots, l$ каждого динамического линейного канала. Следующим шагом выразим закон управления для реальных приводов $u_j, j = 1 \dots r$, основываясь на виртуальных управлениях для динамических одноканальных подсистем $U_i, i = 1, \dots, l$, полученных на первых шагах обратного преобразования статической нелинейности.

Представим нелинейную одноканальную систему как

$$a(p)y_i(t) = b(p)U_i(t) + f_i, \quad (3)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – дифференциальный оператор; $y_i(t)$ – выходная измеряемая величина, но ее производные не измеряемы; $b(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$, и $a(p) = p^n + \dots + a_1 p + a_0$ – нормированные взаимно простые полиномы с неизвестными коэффициентами; $r \leq n - 1$; передаточная функция $\frac{b(p)}{a(p)}$ имеет отно-

сительную степень $p = n - m$; полином $b(p)$ – гурвицев, параметр $b_m > 0$; f_i – неизвестная константа, представленная пренебрежимо медленно изменяющимися ветровыми возмущениями для всех каналов.

Во-первых, необходимо обеспечить экспоненциальную устойчивость нелинейной системы (3), во-вторых, применить результаты первого шага для математической модели квадрокоптера в следящем режиме при условиях пренебрежения медленно изменяющимися ветровыми возмущениями. Входные данные представлены тремя линейными координатами в пространстве и углом рыскания. Задачей контроллера является обеспечение стабилизации квадрокоптера с некоторой требуемой ориентацией в заданной точке.

Синтез регулятора для одноканальной линейной системы

В этом разделе индексирование i , которое соответствует определенной одноканальной системе (2), будет опущено для краткости.

После дифференцирования модели (3), мы получим:

$$[pa(p)]y(t) = [pb(p)]u(t) + pf, \quad (4)$$

где $pf = 0$. Выразим $u(t) = \frac{1}{t}U(t)$, и затем (4) примет следующий вид:

$$[pa(p)]y(t) = b(p)U(t). \quad (5)$$

По результатам [15–17] выберем управление $U(t)$

$$U(t) = -\mu\alpha(p)\hat{y}(t), \quad (6)$$

где число μ и полином $\alpha(p)$ таковы, что передаточная функция $\frac{\mu b(p)a(p)}{pa(p) + \mu\alpha(p)b(p)}$ строго вещественно положительна и функция $\hat{y}(t)$ – оценка выходной $y(t)$. Это вычисляется в соответствии со следующим алгоритмом:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \sigma \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \sigma \xi_3, \\ \dots \\ \dot{\xi}_{p-1} = \sigma (-k_1 \xi_1 - \dots - k_{p-1} \xi_{p-1} + k_1 (y - y^*)), \end{cases} \quad (7)$$

$$\hat{y} = \xi_1, \quad (8)$$

где $\sigma > \mu$ (доказательство теоремы 1, неравенство (41) в работе [16]) и параметр k_i рассчитываются из условия экспоненциальной устойчивости системы (7). Подобный закон управления известен как «последовательный компенсатор», описанный в работе [7, 9].

Подставляя (6) в уравнение (5), мы получим:

$$pa(p)y(t) = -b(p)\mu a(p)\hat{y}(t). \quad (9)$$

Представим ошибку, как $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ и перепишем (9)

$$pa(p) + \mu ab(p)]y(t) = b(p)\mu a(p)\varepsilon(t). \quad (10)$$

После простых преобразований для модели (10) мы получим:

$$y(t) = \frac{\mu b(p)a(p)}{pa(p) + \mu a(p)b(p)} \varepsilon(t), \quad (11)$$

где передаточная функция $W(p) = \frac{\mu b(p)a(p)}{pa(p) + \mu a(p)b(p)}$ строго вещественно положительна.

Представим модель (11) в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mu\varepsilon(t), \quad (12)$$

$$y(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t), \quad (13)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния системы (12); \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – соответствующие матрицы перехода от модели (11) к (12), (13).

Так как передаточная функция $W(p)$ строго вещественно положительна, то существуют некоторые матрицы $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ такие, что

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

Перепишем модели (7), (8) в следующем виде:

$$\dot{\xi}(t) = \sigma(\Gamma \xi(t) + \mathbf{d}y(t)),$$

$$\hat{y}(t) = \mathbf{h}^T \xi(t),$$

$$\text{где } \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{p-1} \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_1 \end{bmatrix}, \text{ и } \mathbf{h}^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0].$$

Примем во внимание вектор

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{h}y(t) - \xi(t).$$

Далее, исходя из структуры вектора \mathbf{h} , ошибка $\varepsilon(t)$ примет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{h}y(t) - \mathbf{h}^T \xi(t) = \mathbf{h}^T (\mathbf{h}y(t) - \xi(t)) = \mathbf{h}^T \boldsymbol{\eta}(t).$$

Для производной $\boldsymbol{\eta}(t)$ мы получим

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{h}\dot{y}(t) - \sigma(\Gamma(\mathbf{h}y(t) - \boldsymbol{\eta}(t)) + \mathbf{d}y(t)) = \mathbf{h}\dot{y}(t) + \sigma\Gamma\boldsymbol{\eta}(t) - \sigma(\mathbf{d} + \Gamma\mathbf{h})y(t).$$

Поскольку $\mathbf{d} = -\Gamma\mathbf{h}$ (можно проверить путем замены), получим

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{h}\dot{y}(t) + \sigma\Gamma\boldsymbol{\eta}(t), \quad \varepsilon(t) = \mathbf{h}^T \boldsymbol{\eta}(t), \quad (14)$$

где матрица Γ гурвицева в силу рассчитанных параметров k_i системы (7), и

$$\Gamma^T \mathbf{N} + \mathbf{N} \Gamma = -\mathbf{M},$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{N}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$.

Теорема 1. Рассмотрим нелинейные системы (12)–(14). Пусть $p = n - m \geq 1$. Существуют такие параметры κ_0 и σ_0 , зависящие от параметров объекта управления, что для всех $\kappa \geq \kappa_0 > 0$ и $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ нелинейная система (11)–(13) экспоненциально устойчива в смысле следующей нормы:

$$\sqrt{(\|x(t)\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2)}.$$

Соответствующее доказательство этой теоремы можно найти в [15, 16] в качестве частного случая.

Применение регулятора для математической модели квадрокоптера

Теперь применим представленный подход к реальной многоканальной динамической системе, а именно к математической модели квадрокоптера. Его положение по отношению к фиксированной системе координат может быть задано с помощью преобразования векторов с компонентами (x, y, z) , тангажа, крена, угла рысканья (θ, ψ, φ) . Вращение твердого тела вокруг декартовых осей в трехмерном пространстве в соответствии с вышеуказанными углами может быть представлено матрицей вращения \mathbf{R} в следующем виде:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\psi & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix},$$

где $s_\gamma \equiv \sin \gamma$, $c_\gamma \equiv \cos \gamma$, $\gamma \equiv \{\theta, \psi, \varphi\}$.

Рассмотрим трехмерную схему квадрокоптера, показанную на рис. 1, а, где $Y_i, i = \{1,2,3,4\}$ – это составляющая подъемной силы вектора i -го ротора (другими составляющими предполагается пренебречь), T_i – скорость ротора. Предположим, что первый и третий роторы вращаются по часовой стрелке, а второй и четвертый из них вращаются в направлении против часовой стрелки. Также примем, что вращение всех роторов происходит в одной плоскости, оси вращения которых перпендикулярны плоскости X_q, Y_q и пересекают ее в точках $(l, -l, 0)$, $(l, l, 0)$, $(-l, l, 0)$, $(-l, -l, 0)$.

В соответствии с информацией, упомянутой ранее, выходные переменные данной многоканальной динамической системы представлены тремя линейными координатами в декартовом пространстве (x, y, z) и тремя углами (θ, ψ, φ) . Таким образом, соответствующая модель может быть представлена в виде системы из шести дифференциальных уравнений вида (1). Далее будем использовать следующую динамическую модель квадрокоптера:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (\sum Y_i)(\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) + f_x, \\ m\ddot{y} = (\sum Y_i)(\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + f_y, \\ m\ddot{z} = (\sum Y_i)(\cos \theta \cos \psi) - mg + f_z, \\ J_1 \ddot{\theta} = l(-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4) + f_\theta, \\ J_2 \ddot{\psi} = l(-Y_1 + Y_2 + Y_3 - Y_4) + f_\psi, \\ J_3 \ddot{\varphi} = C(Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4) + f_\varphi, \end{cases} \quad (15)$$

где m – масса; J_1, J_2, J_3 – основные моменты инерции масс; $f_x, f_y, f_z, f_\theta, f_\psi$ и f_φ – медленно изменяющиеся ветровые возмущения на каждом из каналов.

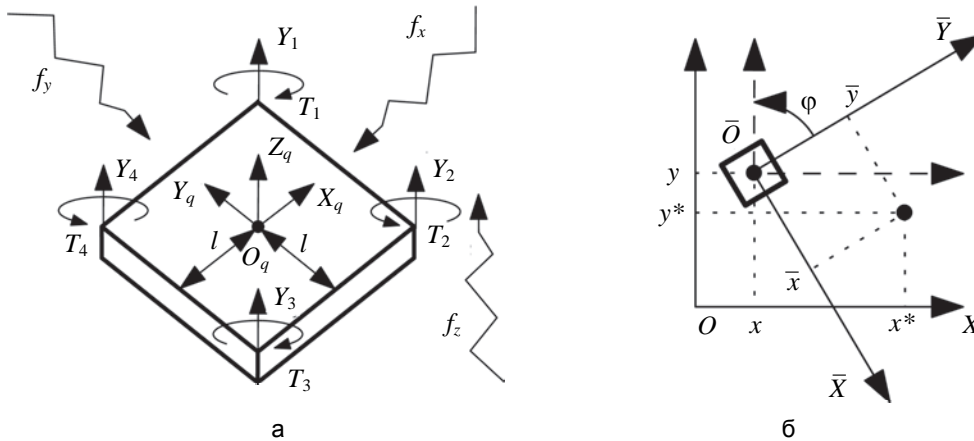


Рис. 1. Схемы квадрокоптера: трехмерная схема (а); система координат (б)

Выполним разложение сложной динамической модели на независимые одноканальные линейные модели и соответствующие статические соотношения. Введем следующие виртуальные сигналы управления, которые находятся в суперпозиции с Y_i :

$$\begin{cases} U_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \\ U_2 = -Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4, \\ U_3 = -Y_1 + Y_2 + Y_3 - Y_4, \\ U_4 = Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4. \end{cases} \quad (16)$$

Указанные выше виртуальные управления будут генерироваться в соответствии с заданными координатами и ориентацией квадрокоптера в пространстве. Значения Y_i рассчитываются по введенной системе линейных уравнений (16).

После подстановки (16) в (15) мы получим первую упрощенную модель:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = U_1(\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) + f_x, \\ m\ddot{y} = U_1(\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + f_y, \\ m\ddot{z} = U_1(\cos \theta \cos \psi) - mg + f_z, \\ J_1 \ddot{\theta} = lU_2 + f_\theta, \\ J_2 \ddot{\psi} = lU_3 + f_\psi, \\ J_3 \ddot{\varphi} = CU_4 + f_\varphi. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим первые два уравнения системы (17). Запишем их в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где U_5 и U_6 – дополнительные входы виртуальных управлений, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} U_5 &= U_1 \sin \theta \cos \psi, \\ U_6 &= -U_1 \sin \psi. \end{aligned} \quad (19)$$

В соответствии с особенностями задачи синтезирование регулятора для квадрокоптера должно быть выполнено с учетом привязки к фиксированной земной системе координат (O, X, Y) . Тем не менее, воспользуемся для удобства вспомогательной системой координат $(\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y})$, жестко зафиксированной по отношению к квадрокоптеру (рис. 1, б).

Введем координаты перемещения в продольном \bar{x} и поперечном \bar{y} направлениях. В самом деле, любое преобразование модели квадрокоптера может быть выполнено как в абсолютной, так и в локальной системе координат. Выразим соотношение, показывающее связь между этими координатами:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где (x^*, y^*) и (x, y) – желаемые и текущие координаты квадрокоптера соответственно в абсолютной системе координат. Квадратная матрица в заданном уравнении является матрицей поворота для плоских систем координат.

Выразим координаты \bar{x} и \bar{y} из уравнения (20):

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* - x \\ y^* - y \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Умножим (21) на m . Затем, учитывая, что φ медленно изменяется и $\dot{\varphi}$ пренебрежимо мало, после двойного дифференцирования мы получим

$$\begin{bmatrix} m\ddot{\bar{x}} \\ m\ddot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m\ddot{x} \\ -m\ddot{y} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Заменим (18) в (22) получим модель перехода к координатам \bar{x} и \bar{y} :

$$\begin{bmatrix} m\ddot{\bar{x}} \\ m\ddot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_5 + f_x \\ -U_6 + f_y \end{bmatrix}.$$

Понятно, что изменение крена или угла тангажа является вспомогательным процессом для обеспечения перехода к координатам \bar{x} и \bar{y} . Изменение этих значений должно быть разрешено в небольшом диапазоне, например, $[-\pi/6, \pi/6]$. В этом случае допустимо воспользоваться приближениями $\sin \gamma \approx \gamma$, $\cos \gamma \approx 1$, при $|\gamma| \leq \pi/6$. Затем перепишем третье выражение из (17) и равенства (19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= U_1 - mg + f_z, \\ U_5 &= U_1 \theta, \end{aligned} \quad (23)$$

$$U_6 = -U_1 \psi. \quad (24)$$

Теперь мы можем записать окончательную упрощенную модель для квадрокоптера:

$$\begin{cases} m\ddot{\bar{x}} = -U_5 + f_x, \\ m\ddot{\bar{y}} = -U_6 + f_y, \\ m\ddot{z} = U_1 - mg + f_z, \\ J_1 \ddot{\theta} = lU_2 + f_\theta, \\ J_2 \ddot{\psi} = lU_3 + f_\psi, \\ J_3 \ddot{\phi} = cU_4 + f_\phi, \end{cases} \quad (25)$$

где локальные координаты \bar{x} и \bar{y} могут быть рассчитаны в соответствии с желаемыми координатами по отношению к абсолютной системе координат с помощью выражения (21), в то время как желаемые значения θ и ψ могут быть получены из (23) и (24):

$$\theta^* = \frac{U_5}{U_1}, \quad \psi^* = -\frac{U_6}{U_1}. \quad (26)$$

Замечание 1. Уравнения (26) могут иметь нуль в знаменателе. Чтобы избежать этого, целесообразно изменить способ расчета искомых значений θ^* и ψ^* . Во-первых, если U_1 близко к нулю, значения θ^* и ψ^* должны быть равны нулю. Это означает, что движение вдоль координатной оси z предпочтительно управлять с помощью U_1 . Когда абсолютное значение U_1 больше или равно некоторым представленным константам, мы можем использовать (26). Во-вторых, если результат (26) является слишком большим, т.е. желаемый крен и угол тангажа больше, чем критическое значение $\pi/6$, имеет смысл связать желаемые значения θ^* или ψ^* некоторой константой.

Система (25) содержит шесть динамических каналов. Воспользуемся законом управления по выходу (6)–(8) для математической модели, представленной виртуальными управлениями для $U_i, i = 1 \dots 6$, при $p = 2$ и $\alpha(p) = 2p^2 + p + 1$:

$$U_i(t) = \mu_i \left(2\dot{\xi}_i + \xi_i + \int_0^t \xi_i \right), \tag{27}$$

$$\dot{\xi}_i = \sigma_i (-\xi_i + e_i),$$

где $e_i = \{z^* - z, \theta^* - \theta, \psi^* - \psi, \varphi^* - \varphi, \bar{x}, \bar{y}\}$ – ошибка соответствующего канала, \bar{x} и \bar{y} могут быть получены из (21), $\mu_i, \sigma_i, i = 1 \dots 6$ – настраиваемые коэффициенты, которые могут быть выбраны без знания параметров объекта.

Замечание 2. Полином $\alpha(p)$ может быть произвольным, но обязательно гурвицев. Важен выбор коэффициентов полинома, чтобы гарантировать желаемое качество переходных процессов. Таким образом, мы решили усилить воздействие $\dot{\xi}_i$ во входном управлении (27), чтобы уменьшить завышения параметров.

В результате получили все виртуальные управляющие входы $U_i, i = 1 \dots 6$. Напомним, что последние два входа, т.е. U_5 и U_6 , были необходимы для расчета искомым значений углов крена и тангажа. Чтобы получить закон управления для двигателей в общем случае, мы должны сделать обратное преобразование статической нелинейности. Но в нашем случае достаточно заменить первые четыре управляющих входа, т.е. U_1, U_2, U_3 и U_4 , в системе линейных уравнений (16). И тогда мы получим значения реальных управляющих сигналов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 :

$$\begin{cases} Y_1 = (U_1 - U_2 - U_3 + U_4)/4, \\ Y_2 = (U_1 - U_2 + U_3 - U_4)/4, \\ Y_3 = (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)/4, \\ Y_4 = (U_1 + U_2 - U_3 - U_4)/4. \end{cases}$$

Компьютерное моделирование замкнутой системы

Результаты моделирования представлены на рис. 2, предложенный подход предполагает, что выходные переменные $x, y, z, \theta, \psi, \varphi$ измеряются без шумов. В данном случае мы рассматриваем математическую модель квадрокоптера с параметрами $m = 1, l = 0,5, C = 1, J_1 = 1, J_2 = 1, J_3 = 1, g = 9,8$. Начальное положение имеет координаты $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, и исходная ориентация $\varphi_0 = 0$. Заданная точка имеет координаты $x^* = 10$ [м], $y^* = 20$ [м], $z^* = 30$ [м], и желаемая ориентация $\varphi^* = 20$ [град]. Значения ветрового возмущения для каждого канала следующие: $f_x=10, f_y=10, f_z=10, f_\theta=0,1, f_\psi=0,1, f_\varphi=10$. Полет квадрокоптера представлен с использованием заданного регулятора с коэффициентами $\mu_1=10, \mu_2=2, \mu_3=2, \mu_4=10, \mu_5=10, \mu_6=10, \sigma_1=30, \sigma_2=30, \sigma_3=30, \sigma_4=30, \sigma_5=30, \sigma_6=30$.

На рис. 2, а, представлены переходные процессы для линейных координат, рис. 2, б, демонстрирует переходные процессы для угловых координат.

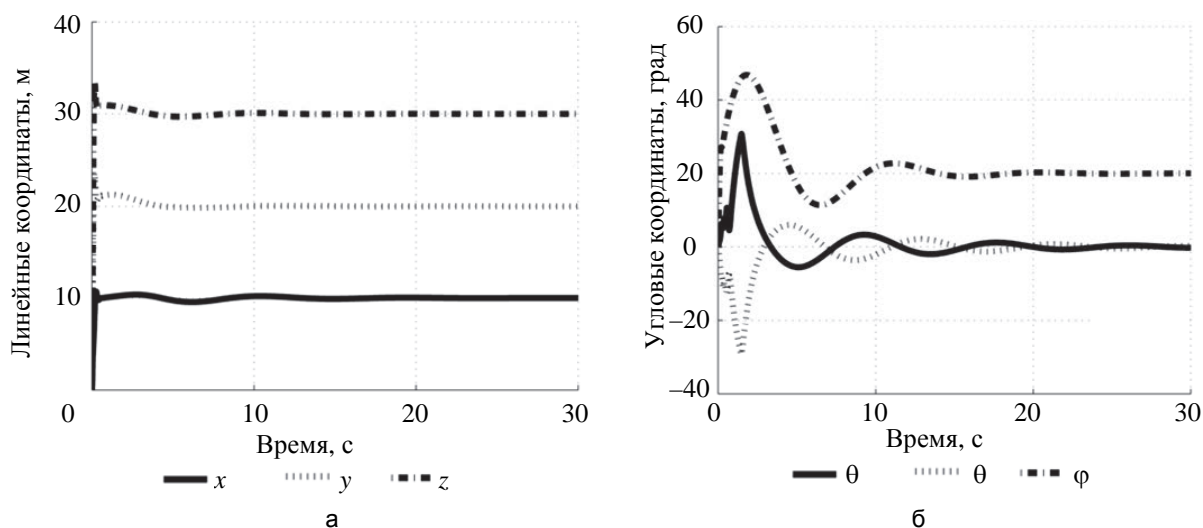


Рис. 2. Графики переходных процессов в системе управления с обратной связью: линейных координат (а); угловых координат (б)

Заключение

В данной работе применен метод робастного управления «последовательный компенсатор». Получен алгоритм управления по выходу с помощью обратной связи для нелинейных многоканальных систем. Практическое применение полученных результатов моделирования в ходе экспериментов будет представлено в дальнейших работах. Наиболее интересна задача управления по выходному сигналу нелинейной системы с параметрическими и функциональными неопределенностями и временным запаздыванием. В работах [17, 18] задача управления рассматривается для линейных систем с запаздыванием по входу. Ре-

гулятор с обратной связью на основе подходов, представленных в [19–21], позволяет пренебречь неизвестными синусоидальными возмущениями для неустойчивых систем с запаздыванием по входу.

References

1. Bobtsov A.A., Nikolaev N.A. Fradkov theorem-based design of the control of nonlinear systems with functional and parametric uncertainties. *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 1, pp. 108–118.
2. Fradkov A.L., Andrievsky B.R., Peaucelle D. Adaptive passification-based fault-tolerant flight control. *Proc. 17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, ACA'2007*. Toulouse, France, 2007, vol. 17, pp. 715–720.
3. Kaufman H., Barkana I., Sobel K.S. *Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications*. 2nd ed. NY, Springer, 1998, 424 p.
4. Park B.S., Yoo S.J., Park J.B., Choi Y.H. A simple adaptive control approach for trajectory tracking of electrically driven nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, vol. 18, no. 5, pp. 1199–1206. doi: 10.1109/TCST.2009.2034639
5. Rusnak I., Barkana I., Weiss H.M. Improving the performance of existing missile autopilot using simple adaptive control. *Proc. 18th IFAC World Congress*. Milano, Italy, 2011, vol. 18, no. 1, pp. 6567–6572. doi: 10.3182/20110828-6-IT-1002.01659
6. Zhang S., Luo F.L. An improved simple adaptive control applied to power system stabilizer. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2009, vol. 24, no. 2, pp. 369–375. doi: 10.1109/TPEL.2008.2007490
7. Bobtsov A. A note to output feedback adaptive control for uncertain system with static nonlinearity. *Automatica*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 2177–2180. doi: 10.1016/j.automatica.2005.08.006
8. Bobtsov A.A. A robust control algorithm for tracking the command signal with compensation for the parasitic effect of external unbounded disturbances. *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 8, pp. 1287–1295. doi: 10.1007/s10513-005-0169-z
9. Bobtsov A.A., Nikolaev N.A., Slita O. Adaptive control of libration angle of a satellite. *Mechatronics*, 2007, vol. 17, no. 4-5, pp. 271–276. doi: 10.1016/j.mechatronics.2007.02.002
10. Fradkov A.L. Synthesis of adaptive stabilization system of linear dynamic object. *Automation and Remote Control*, 1974, no. 12, pp. 96–103. (In Russian)
11. Fradkov A.L. Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov Lemma. *European Journal of Control*, 2003, vol. 9, no. 6, pp. 577–586. doi: 10.3166/ejc.9.577-586
12. Barkana I. Parallel feedforward and simplified adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1987, vol. 1, no. 2, pp. 95–109. doi: 10.1002/acs.4480010202
13. Barkana I. Comments on "Design of strictly positive real systems using constant output feedback". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 2091–2093. doi: 10.1109/TAC.2004.837565
14. Andrievsky B.R., Fradkov A.L., Kaufman H. Necessary and sufficient conditions for almost strict positive realness and their application to direct implicit adaptive control systems. *Proc. American Control Conference*. Baltimore, USA, 1994, vol. 2, pp. 1265–1266.
15. Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Faronov M.V. Output control for time-delay nonlinear system providing exponential stability. *Proc. 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2011*. Corfu, Greece, 2011, pp. 512–520. doi: 10.1109/MED.2011.5983020
16. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Output control for nonlinear system with time-varying delay and stability analysis. *Proc. 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, USA, 2011, pp. 7392–7397. doi: 10.1109/CDC.2011.6160224
17. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Faronov M.V., Shavetov S.V., Kapitanyuk Y.A., Kapitonov A.A. Output control approach "consecutive compensator" providing exponential and L_∞ -stability for nonlinear systems with delay and disturbance. *Proc. 20th Int. Conf. on Control Application*. Denver, USA, 2011, pp. 1499–1504. doi: 10.1109/CCA.2011.6044373
18. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay. *Proc. American Control Conference*. Baltimore, USA, 2010, pp. 5688–5693.
19. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance. *Proc. 9th IFAC Workshop on Time Delay System*. Prague, Czech Republic, 2010, no. 1, pp. 39–44.
20. Krstic M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive and PDE Systems*. Birkhauser Boston, 2009, 466 p. doi: 10.1007/978-0-8176-4877-0
21. Krstic M., Smyshlyaev A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*. New Orleans, USA, 2007, pp. 225–230. doi: 10.1109/CDC.2007.4434474

22. Pyrkin A. Adaptive algorithm to compensate parametrically uncertain biased disturbance of a linear plant with delay in the control channel. *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 8, pp. 1562–1577. doi: 10.1134/S0005117910080060

- Петраневский Игорь Владимирович*** – студент, инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, igor.petranevsky@corp.ifmo.ru
- Борисов Олег Игоревич*** – аспирант, инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, borisov@corp.ifmo.ru
- Громов Владислав Сергеевич*** – аспирант, инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, gromov@corp.ifmo.ru
- Пыркин Антон Александрович*** – кандидат технических наук, доцент, доцент, ведущий научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, a.pyrkin@gmail.com
- Igor V. Petranevsky*** – student, engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, igor.petranevsky@corp.ifmo.ru
- Oleg I. Borisov*** – postgraduate, engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, borisov@corp.ifmo.ru
- Vladislav S. Gromov*** – postgraduate, engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, gromov@corp.ifmo.ru
- Anton A. Pyrkin*** – PhD, Associate professor, Associate professor, Leading Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, a.pyrkin@gmail.com