



УДК 532.529

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА НАКЛОННОМ КОНТАКТНОМ РАЗРЫВЕ

П.В. Булат^a, К.Н. Волков^b^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация^b Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, ВеликобританияАдрес для переписки: pavelbulat@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 30.11.15, принята к печати 13.04.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-550-558

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат П.В., Волков К.Н. Численное моделирование рефракции ударной волны на наклонном контактно-м разрыве // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 3. С. 550–558. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-550-558

Аннотация

Рассмотрено численное моделирование рефракции ударной волны на плоском контактно-м разрыве, разделяющем газы с различными плотностями. Дискретизация уравнений Эйлера проведена при помощи метода конечных объемов и разностных схем WENO-типа, реализованных на неструктурированных сетках. Интегрирование по времени выполнено при помощи метода Рунге–Кутты третьего порядка. Для визуализации и интерпретации результатов численных расчетов применена процедура выделения и классификации газодинамических разрывов, основанная на использовании условий динамической совместности и методов цифровой обработки изображений. Определена структура течения и его количественные характеристики. Выполнено сравнение результатов численной и экспериментальной визуализации (теньевые картины, шлирен-изображения, интерферограммы).

Ключевые слова

численное моделирование, рефракция, ударная волна, контактный разрыв, визуализация, метод функции уровня

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.575.21.0057).

NUMERICAL SIMULATION OF SHOCK WAVE REFRACTION ON INCLINED CONTACT DISCONTINUITY

P.V. Bulat^a, K.N. Volkov^b^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation^b Kingston University, London, SW15 3DW, UKCorresponding author: pavelbulat@mail.ru

Article info

Received 30.11.15, accepted 13.04.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-550-558

Article in Russian

For citation: Bulat P.V., Volkov K.N. Numerical simulation of shock wave refraction on inclined contact discontinuity. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 550–558. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-550-558

Abstract

We consider numerical simulation of shock wave refraction on plane contact discontinuity, separating two gases with different density. Discretization of Euler equations is based on finite volume method and WENO finite difference schemes, implemented on unstructured meshes. Integration over time is performed with the use of the third-order Runge–Kutta stepping procedure. The procedure of identification and classification of gas dynamic discontinuities based on conditions of dynamic consistency and image processing methods is applied to visualize and interpret the results of numerical calculations. The flow structure and its quantitative characteristics are defined. The results of numerical and experimental visualization (shadowgraphs, schlieren images, and interferograms) are compared.

Keywords

numerical simulation, refraction, shock wave, contact discontinuity, visualization, level function method

Acknowledgements

The study was sponsored by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement No14.575.21.0057)

Введение

Ударно-волновыми процессами (УВП) называются процессы преобразования газодинамической системы, имеющей параметры f , в систему с параметрами \hat{f} , где f и \hat{f} – множества газодинамических переменных до и после УВП. Эти множества включают кинематические, термодинамические и теплофизические переменные, характеризующие параметры потока: кинематические (скорость, ускорение), термодинамические (давление, плотность, температура), параметры, изменение энтропии, изменение энтальпии, а также теплофизические параметры (теплоемкость, показатель адиабаты, вязкость и пр.), которые могут изменяться в ходе УВП.

Интенсивность УВП, как правило, характеризуется отношением статических давлений $J=p_1/p$ после и до УВП (p_1 и p). В некоторых случаях используется обозначение $J_c = p/\hat{p}$, где \hat{p} – давление после УВП. Значения $J_c > 1$ характеризуют уплотнение потока, а величины $J_c < 1$ – его расширение (разрежение).

Газодинамические разрывы (ГДР) представляют собой некоторую идеализацию области с резким изменением параметров, заменяя ее поверхностями, на которых газодинамические переменные изменяются скачком [1]. ГДР в сверхзвуковых течениях бывают нулевого порядка (центр волны разрежения/сжатия, скачок уплотнения и поверхность скольжения), на которых терпят разрыв газодинамические параметры течения (давление, полное давление, скорость, угол наклона вектора скорости), и первого порядка, называемые также слабыми разрывами (разрывные характеристики, слабые тангенциальные разрывы), на которых терпят разрыв первые производные газодинамических переменных.

Отличие волн от разрывов заключается в том, что волны имеют конечную ширину и занимают область изменения газодинамических переменных от значений f до \hat{f} , заключенную между передним и задним фронтами волны.

Все волны и разрывы могут быть разделены на две большие группы [2]. В первую группу входят контактные разрывы (поверхность, разделяющая среды с разной плотностью, но равным давлением и скоростью потока) и тангенциальные разрывы (поверхности скольжения, разделяющие потоки с равным давлением, но разной скоростью). Через такие поверхности газ не протекает, и они не могут считаться УВП. Остальные волны и разрывы называются нормальными (не путать с прямыми). Через нормальные волны и разрывы газ протекает, и они являются УВП.

Волны и разрывы могут взаимодействовать между собой. Можно выделить три типа взаимодействия волн [3]:

- пересечение ГДР (ударных волн и контактных разрывов) между собой;
- взаимодействие изоэнтропных волн Римана между собой;
- взаимодействие изоэнтропных волн с газодинамическими разрывами.

Кроме того, волны и разрывы могут взаимодействовать с твердыми поверхностями.

Контактные и тангенциальные разрывы между собой пересекаться не могут. Процесс взаимодействия ударной или изоэнтропной волны с контактным или тангенциальным разрывом называется рефракцией. Данный процесс сопровождается преломлением и отражением волн на контактном (тангенциальном) разрыве. Остальные случаи взаимодействия волн называются интерференцией. Ниже рассматривается рефракция бегущей ударной волны с косым контактным разрывом.

Рефракция ударных волн

Многие физические явления, связанные с движением газов, приводят к возникновению и развитию ударных волн. Интерес к задачам рефракции ударных волн обусловливается широким спектром практических приложений, к которым, в частности, относятся взаимодействие ударной волны с поверхностью океана и с пузырьковыми средами, подводный взрыв, горение жидких топлив. Наличие неоднородностей перед ударной волной (область повышенной температуры, граница раздела сред, пылевое облако) приводит к качественным изменениям в развитии течения, включая такие явления, как искривление фронта ударной волны, формирование новых ударных волн, высоконапорных струй и крупномасштабных вихрей, отрыв пограничного слоя, кумуляция струй [4, 5]. Взаимодействие косой ударной волны с границей раздела сред приводит к развитию сложных нестационарных ударно-волновых конфигураций [6–10]. Прохождение ударной волны по среде, содержащей пузырьки газа или капли жидкости, приводит к искривлению фронта волны, кумуляции скачков уплотнения и развитию множественных вихрей.

Теоретический анализ формирующихся ударно-волновых конфигураций с использованием ударных поляр дается в работе [11]. Определяются границы областей существования режимов рефракции с волной разрежения и область существования рефракции с отраженной ударной волной при изменении угла наклона контактного разрыва. Обсуждается генерация завихренности и эволюция вихревых структур, а также сеточная сходимости решения [12]. В работах [13, 14] дается точное решение задачи о рефракции плоской ударной волны на контактном разрыве (регулярный случай) и обсуждается подавление

неустойчивости Рихтмайера–Мешкова (Richtmyer–Meshkov instability) при наложении магнитного поля. Точные решения задачи даются как в одномерном, так и в двумерном случае регулярной рефракции ударной волны на контактном разрыве.

Различные режимы рефракции ударной волны при помощи экспериментальных и численных методов изучаются в работе [15]. Численные расчеты проводятся на основе TVD-схемы второго порядка точности и приближенного метода решения задачи Римана. Расчетные данные достаточно хорошо согласуются с результатами измерений и результатами теоретического анализа, за исключением высоких чисел Маха падающей ударной волны.

Двумерные расчеты на основе схемы типа Годунова второго порядка точности проводятся в работе [16]. Разрыв плотности ориентирован под углом 75° к горизонтали, а число Маха ударной волны составляет 1,2. Схема MUSCL используется в работе [17] для расчета структуры течения при различных углах наклона разрыва. Различные разностные схемы сравниваются в работе [18].

Численное исследование неустойчивости Рихтмайера–Мешкова при взаимодействии сильной ударной волны с разрывом плотности прямолинейной и синусоидальной формы проводится в работе [19]. Визуализация газодинамических разрывов при помощи различных подходов дается в работе [20]. Рефракция ударной волны при ее взаимодействии с пристенным слоем нагретого газа исследуется в работе [21]. Широкий круг вопросов, связанных с взаимодействием ударных волн с контактными разрывами и формирование неустойчивости Рихтмайера–Мешкова, обсуждается в работе [22].

Рефракция сферической ударной волны на границе раздела воздух–вода рассматривается в работе [23]. Сравниваются результаты расчетов по схеме сквозного счета и при помощи метода функции уровня, позволяющего выделить контактный разрыв и проследить его эволюцию во времени. Применение схем выделения разрывов применительно к рефракции ударных волн на границах раздела сред обсуждается в работах [24, 25]. Решение задачи в узлах сетки, расположенных вблизи границы раздела сред, получается при помощи метода характеристик. Разработанный подход применяется для изучения взаимодействия ударной волны с газовым пузырем. Для определения положения границы раздела фаз используется метод функции уровня [26]. Функция уровня удовлетворяет уравнению переноса, имеет нулевой уровень на интерфейсе и противоположные по знаку значения в областях разных фаз, что позволяет описывать изменение положения интерфейса. Обзор метод решения задач с контактными границами дается в работе [27].

В настоящей работе проводится численное моделирование рефракции плоской ударной волны на наклонном контактном разрыве, имеющем в начальный момент прямолинейную форму и разделяющем газы с различными плотностями. Рассматривается случай регулярной рефракции ударной волны с образованием тройной конфигурации газодинамических разрывов, состоящей из падающей ударной волны, отраженной ударной волны и прошедшей ударной волны. Результаты численных расчетов, обработанные в виде теневых картин, шлирен-изображений и интероферограмм, сравниваются с данными оптической визуализации потока.

Структура течения

При падении ударной волны на контактный разрыв, расположенный под некоторым углом к горизонтали и разделяющий газы с различными плотностями, возникают различные режимы рефракции, характеризующиеся фронтом преломленной волны, формированием волны разрежения или отраженной ударной волны. Ряд возникающих конфигураций обсуждается в работе [4] на основе данных физического эксперимента.

В результате взаимодействия падающей ударной волны (incident shock, I) с контактными разрывом (contact discontinuity, C) образуются прошедшая (transmitted shock, T) и отраженная волна (reflected shock, R), которые в зависимости от интенсивности падающей ударной волны и перепада плотности на контактном разрыве являются ударными волнами или волнами разрежения (рис. 1). Под ϕ понимается угол наклона отраженной волны к горизонтали.

Скорость прошедшей ударной волны зависит от отношения плотностей на контактном разрыве, $\sigma = \rho_2/\rho_1$. При этом скорость прошедшей ударной волны больше (slow–fast refraction, S/F) или меньше (fast–slow refraction, F/S) скорости падающей ударной волны в зависимости от отношения плотностей [6, 7, 9]. При этом скорость относится к акустическим импедансам сред, а порядок слов определяет направление распространения волны. В случае slow–fast (S/F, $\sigma > 1$) отраженная волна является волной разрежения, а в случае fast–slow (F/S, $\sigma < 1$) – ударной волной. Каждая группа (S/F и F/S) разделяется на ряд дополнительных конфигураций в зависимости от интенсивности падающей ударной волны [10]. В работах [6, 7] при изменении условий эксперимента наблюдается 8 различных режимов рефракции в случае S/F и 4 различных режима рефракции – в случае F/S. Условия существования и перехода от одного режима к другому рассматриваются в работе [10], а устойчивость возникающих конфигураций исследуется в работе [28].

При определенных параметрах имеет место переход от регулярной рефракции, когда три волны встречаются в одной точке, к нерегулярной рефракции с образованием ножки Маха. Детальное описание и анализ различных режимов рефракции ударной волны на контактном разрыве даются в работах [8, 10].

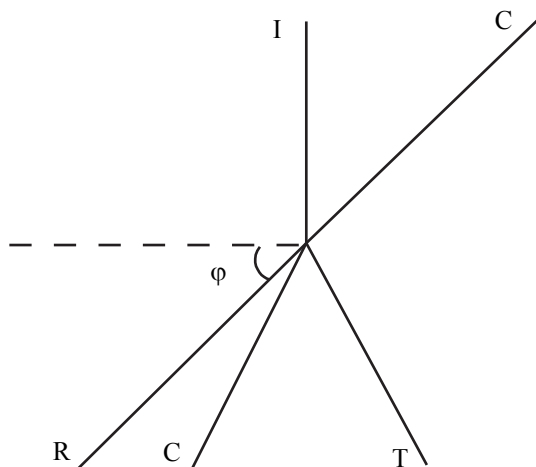


Рис. 1. Рефракция ударной волны на контактном разрыве

Расчетная область и граничные условия

Рассмотрим взаимодействие плоской ударной волны, движущейся слева направо и имеющей число Маха, равное M , с контактными разрывом, расположенным под углом α к направлению потока. Контактный разрыв разделяет газы с плотностями ρ_1 (слева от разрыва) и ρ_2 (справа от разрыва).

Расчеты проводятся в области $[0, 1] \times [0, 5]$ на неструктурированной сетке, содержащей около 10^6 узлов или имеющей сгущение узлов вблизи линии раздела сред. Схему расчетной области поясняет рис. 2. В расчетах полагается, что число Маха ударной волны составляет $M=2$, а угол наклона контактного разрыва к оси x равняется $\alpha=45^\circ$. Контактный разрыв разделяет два газа с отношением плотностей $\sigma=3$. В расчетах используется вычислительный газ с показателем адиабаты $\gamma=1,667$. Расчеты проводятся до момента времени $t=0,72$ (за это время звуковая волна в невозмущенном газе проходит ширину ударной трубы). В начальный момент времени ударная волна располагается в точке $x=x_s$ (положение волны показывает вертикальная утолщенная линия).

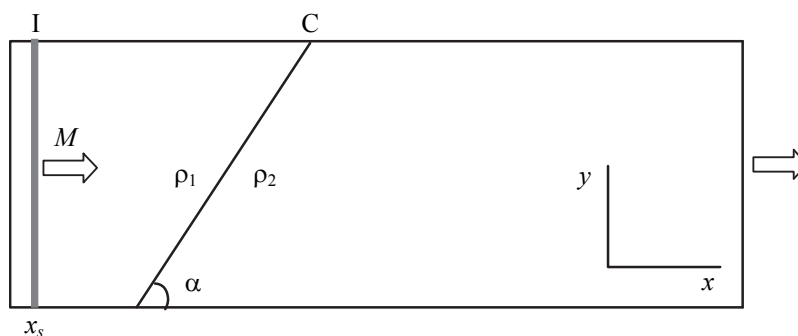


Рис. 2. Схема расчетной области

В начальный момент времени газы, разделенные контактными разрывом, считаются неподвижными. Фронт ударной волны в начальный момент времени располагается при $x_s=0,1$ (вблизи левой границы расчетной области). На фронте ударной волны используются условия Рэнкина–Гюгонно. На входной, выходной и верхней границах расчетной области используются неотражающие граничные условия. На нижней границе применяются условия симметрии (твердая стенка).

Численный метод

Численная модель строится на основе решения нестационарных уравнений Эйлера для вязкого сжимаемого газа [29].

Для дискретизации уравнений Эйлера применяется метод конечных объемов и явная схема WENO-типа, имеющая третий порядок точности и реализованная на неструктурированной сетке. Примеры использования WENO-схем для моделирования сверхзвуковых течений вязкого сжимаемого газа на неструктурированных сетках даются в работах [30, 31]. Конвективные потоки рассчитываются независимо по каждому направлению с помощью приближенного решения задачи Римана (метод HLLC). Ин-

тегрирование по времени проводится методом Рунге–Кутты третьего порядка. Используется модель совершенного газа с постоянным отношением удельных теплоемкостей.

Выделение разрывов

Процедура идентификации газодинамических разрывов (определение их типа и положения) занимает значительную часть времени исследования и не лишена субъективности. Метод, предложенный в работе [32], позволяет ускорить время такой обработки и повысить достоверность исследования. В центре каждой ячейки сетки вычисляется градиент плотности и его ориентация. Точки с градиентом плотности, бóльшим среднего значения градиентов плотности во всей области, являются точками разрыва. Газодинамические разрывы классифицируются, рассматривая в ближайших точках дискретные аналоги условий на сильных разрывах. В результате каждая точка относится к одному из видов разрывов – ударной волне (нормальной или косой), тангенциальному разрыву, чисто контактному разрыву, волне сжатия [32].

Численное дифференцирование приводит к появлению на результирующем изображении шумовых помех. Дополнительным источником помех в численном решении является уменьшение порядка точности разностной схемы до первого в окрестности разрыва, что обычно требуется для сохранения монотонности разностной схемы [29]. Для исключения шумовых помех используется операция сглаживания [33].

Для распознавания и выделения контактного разрыва находит применение метод функции уровня (level-set method) [26]. Функция уровня удовлетворяет уравнению переноса, имеет нулевой уровень на интерфейсе и противоположные по знаку значения в областях разных фаз, что позволяет описывать изменение положения интерфейса. Условие на контактном разрыве $\zeta(t)=0$ позволяет отслеживать его положение во времени (слева и справа от разрыва полагается, что $\zeta=\pm 1$).

Результаты расчетов

В расчетах угол наклона контактного разрыва к горизонтали полагается равным $\alpha=45^\circ$. При заданных параметрах задачи реализуется регулярный режим рефракции с образованием отраженной ударной волны [13]. Другой режим рефракции, когда отраженный разрыв является волной разрежения, рассматривается в работе [17]. Случай $\alpha=90^\circ$ соответствует одномерному решению задачи о взаимодействии ударной волны с контактными разрывом.

Линии уровня плотности приводятся на рис. 3 в момент времени $t=0,72$. Плотность газа изменяется от 2,5 до 8,2. Распределение плотности демонстрирует положение отраженной ударной волны и контактного разрыва.

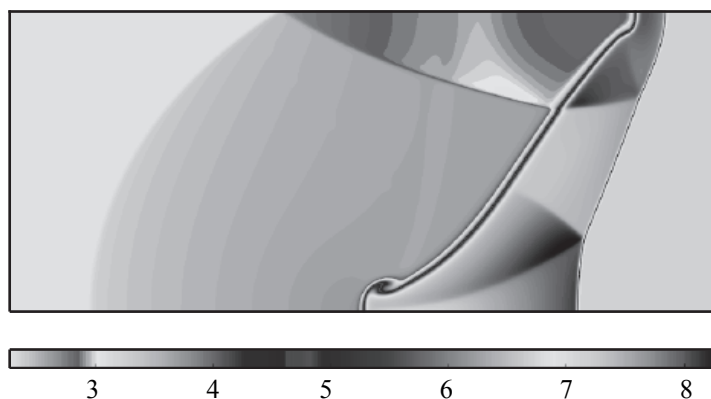


Рис. 3. Линии уровня плотности



Рис. 4. Численный шпирен

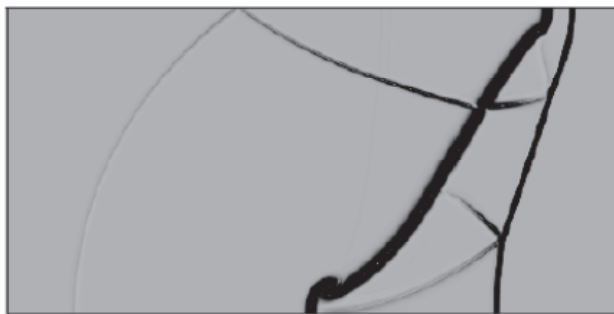


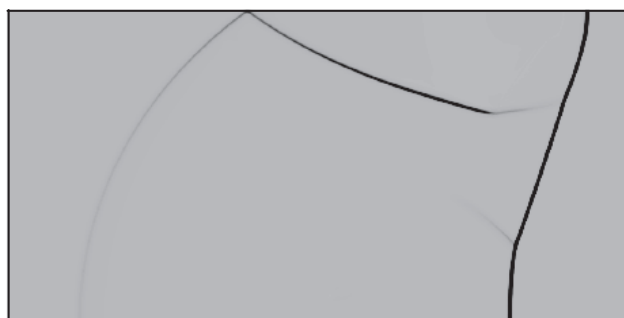
Рис. 5. Численная теньевая картина



Рис. 6. Численная интерферограмма



а



б



в

Рис. 7. Визуализация течения при помощи лапласиана давления (а), дивергенции скорости (б) и лапласиана энтропии (в)

Численный шпирен плотности приводится на рис. 4 в момент времени $t=0,72$. Для выделения разрывов из решения используется фильтр Собела. Несмотря на то, что метод Собела оказывается менее чувствительным к численному шуму [33], в данной задаче использование операторов Робертса и Собела приводит к практически одинаковым изображениям.

Численную теньевую картину показывает рис. 5, а численную интерферограмму – рис. 6 в момент времени $t=0,72$. Увеличение числа полос позволяет разрешить более мелкие детали течения.

Визуализацию поля течения при использовании различных переменных (лапласиан давления, дивергенция скорости, лапласиан энтропии) показывает рис. 7. В то время как изображения, приведенные на фрагментах (рис. 7, а, б), различаются сравнительно мало, использование лапласиана энтропии для визуализации картины течения фрагмент (рис. 7, в) приводит к потере (невидимости) слабых газодинамических разрывов.

Ударно-волновые структуры показывает рис. 8. Линии 1, 3, 5, 6 и 7 соответствуют ударным волнам, а линии 2, 4 и 8 – контактными разрывам. Точки T1 и T2 являются тройными точками, в которых имеет место пересечение двух ударных волн с контактными разрывом.

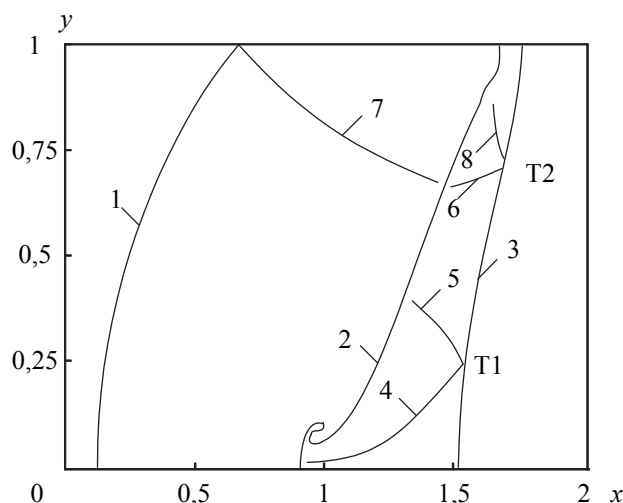


Рис. 8. Ударно-волновая структура, формирующаяся в результате взаимодействия ударной волны с контактными разрывом

Положения фронта контактного разрыва, найденные при помощи лапласиана плотности ($\Delta\rho=0$) и метода функции уровня, показывает рис. 9 (приводится часть расчетной области). Существенное различие формы контактного разрыва, найденное при помощи различных подходов, имеет место лишь в области его наибольшей кривизны. В отличие от контактного разрыва, положение фронта ударной волны сравнительно слабо зависит от используемого подхода к выделению разрывов.

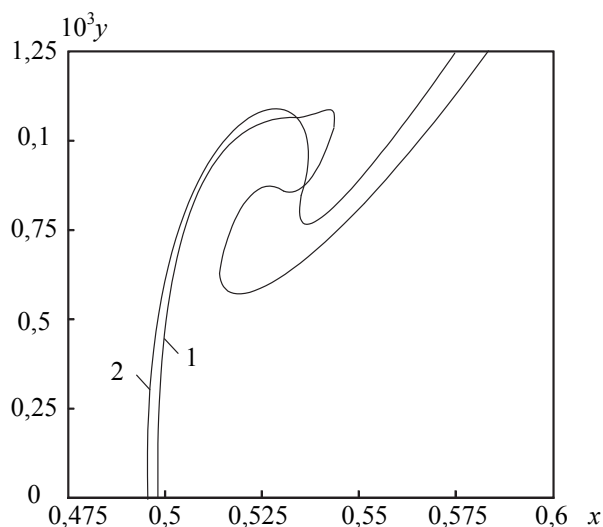


Рис. 9. Положение фронта контактного разрыва, найденное при помощи лапласиана плотности (линия 1) и метода функции уровня (линия 2)

Заключение

Проведено численное моделирование взаимодействия плоской ударной волны с наклонным контактным разрывом, разделяющим газы с различными плотностями. Результаты численной визуализации ударной-волновой картины течения сопоставлены с данными оптических наблюдений (теневые картины, шпирен-изображения, интерферограммы). Для выделения газодинамических разрывов применяются методы цифровой обработки изображений. Проведено сравнение формы контактного разрыва, полученной при помощи метода функции уровня и лапласиана плотности.

Литература

1. Uskov V.N., Bulat P.V., Arkhipova L.P. Gas-dynamic discontinuity conception // *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*. 2014. V. 8. N 22. P. 2255–2259.
2. Bulat P.V., Uskov V.N. Shock and detonation wave in terms of view of the theory of interaction gasdynamic discontinuities // *Life Science Journal*. 2014. V. 11. N 8. P. 307–310.
3. Uskov V.N., Bulat P.V., Arkhipova L.P. Classification of gas-dynamic discontinuities and their interference problems // *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*. 2014. V. 8. N 22. P. 2248–2254.
4. Jahn R.G. The refraction of shock waves at a gaseous interface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1956. V. 1. N 5. P. 457–489. doi: 10.1017/S0022112056000299
5. Знаменская И.А., Иванов И.Э., Коротева Е.Ю., Орлов Д.М. Газодинамические явления при взаимодействии ударной волны с остывающей плазмой импульсного поверхностного разряда // *ДАН*. 2011. Т. 439. № 5. С. 609–612.
6. Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F. Shock waves at a fast-slow gas interface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. V. 86. N 1. P. 15–32. doi: 10.1017/S0022112078000981
7. Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F. Shock waves at a slow-fast gas interface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. V. 89. N 1. P. 79–95. doi: 10.1017/S0022112078002475
8. Henderson L.F. On the refraction of shock waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1989. V. 198. P. 365–386. doi: 10.1017/S0022112089000170
9. Henderson L.F., Colella P., Puckett E.G. On the refraction of shock waves at a slow-fast gas interface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. V. 224. P. 1–27.
10. Nouragliev R.R., Sushchikh S.Y., Dinh T.N., Theofanous T.G. Shock wave refraction patterns at interfaces // *International Journal of Multiphase Flow*. 2005. V. 31. N 9. P. 969–995. doi: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2005.04.001
11. Samtaney R., Zabusky N.J. On shock polar analysis and analytical expressions for vorticity deposition in shock-accelerated density stratified interfaces // *Physics of Fluids*. 1993. V. 5. N 6. P. 1285–1287.
12. Samtaney R., Pullin D.I. On initial-value and self-similar solutions of the compressible Euler equations // *Physics of Fluids*. 1996. V. 8. N 10. P. 2650–2655.
13. Samtaney R. Suppression of the Richtmyer–Meshkov instability in the presence of a magnetic field // *Physics of Fluids*. 2003. V. 15. N 8. P. L53–L56. doi: 10.1063/1.1591188
14. Wheatley V., Pullin D.I., Samtaney R. Regular shock refraction at an oblique planar density interface in magnetohydrodynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. V. 522. P. 179–214. doi: 10.1017/S0022112004001880
15. Zeng S., Takayama K. On the refraction of shock wave over a slow-fast gas interface // *Acta Astronautica*. 1996. V. 38. N 11. P. 829–838. doi: 10.1016/S0094-5765(96)00096-3
16. Yang X., Chern I.-L., Zabusky N.J., Samtaney R., Hawley J.F. Vorticity generation and evolution in shock-accelerated density-stratified interfaces // *Physics of Fluids*. 1992. V. 4. N 7. P. 1531–1540.
17. Delmont P., Keppens R., van der Holst B. An exact Riemann solver based solution for regular shock refraction // *Journal of Fluid Mechanics*. 2009. V. 627. P. 33–53. doi: 10.1017/S0022112009006028
18. Pember R.B., Anderson R.W. Comparison of direct Eulerian Godunov and Lagrange plus remap, artificial viscosity schemes // *Proc. 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Anaheim, USA, 2001. No. 2001-2644.
19. Samtaney R., Meiron D.I. Hypervelocity Richtmyer–Meshkov instability // *Physics of Fluids*. 1997. V. 9. N 6. P. 1783–1803.
20. Samtaney R. Visualization, extraction and quantification of discontinuities in compressible flows // *Technical Report*. NASA, 1999. No. 99-002.
21. Banuti D.T., Grabe M., Hannemann K. Steady shock refraction in hypersonic ramp flow // *Proc. 17th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference*. San Francisco, 2011. No. 2011-2215. doi: 10.2514/6.2011-2215
22. Brouillette M. The Richtmyer–Meshkov instability // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2002. V. 34. P. 445–468. doi: 10.1146/annurev.fluid.34.090101.162238

23. Dutta S., Glimm J., Grove J.W., Sharp D.H., Zhang Y. Error comparison in tracked and untracked spherical simulations // *Computers and Mathematics with Applications*. 2004. V. 48. N 10–11. P. 1733–1747. doi: 10.1016/j.camwa.2003.08.014
24. Liu T.C., Khoo B.C., Yeo K.S. The simulation of compressible multi-medium flow. I. A new methodology with test applications to 1D gas-gas and gas-water cases // *Computers and Fluids*. 2001. V. 30. N 3. P. 291–314. doi: 10.1016/S0045-7930(00)00022-0
25. Liu T.C., Khoo B.C., Yeo K.S. The simulation of compressible multi-medium flow. II. Applications to 2D underwater shock refraction // *Computers and Fluids*. 2001. V. 30. N 3. P. 315–337. doi: 10.1016/S0045-7930(00)00021-9
26. Osher S.J., Fedkiw R.P. *Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces*. New York: Springer, 2003. 273 p. doi: 10.1007/b98879
27. Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2005. № 1. С. 45–87.
28. Fang B., Wang Y.-G., Yuan H. Reflection and refraction of shocks on an interface with a reflected rarefaction wave // *Journal of Mathematical Physics*. 2011. V. 52. N 7. Art. 073702. doi: 10.1063/1.3600714
29. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014. 416 с.
30. Булат П.В., Волков К.Н. Моделирование сверхзвукового течения в канале со ступенькой на неструктурированных сетках при помощи WENO-схем // *Инженерно-физический журнал*. 2015. Т. 88. № 4. С. 848–855.
31. Булат П.В., Волков К.Н. Применение WENO-схем для моделирования взаимодействия отраженной ударной волны с пограничным слоем // *Инженерно-физический журнал*. 2015. Т. 88. № 5. С. 1163–1170.
32. Ворожцов Е.В. Классификация разрывов течения газа как задача распознавания образов: Препринт № 2386. Новосибирск: ИТПМ, 1986. № 23–86.
33. Schalkoff R.J. *Digital Image Processing and Computer Vision*. New York: John Wiley & Sons, 1988. 489 p.

Булат Павел Викторович

– кандидат физико-математических наук, кандидат экономических наук, заведующий международным научным подразделением, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, pavelbulat@mail.ru

Волков Константин Николаевич

– доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

Pavel V. Bulat

– PhD, Scientific supervisor of International laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru

Konstantin N. Volkov

– D.Sc., Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Senior Lecturer, Kingston University, London, KT12EE, UK, k.volkov@kingston.ac.uk