УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
июль–август 2016 Том 16 № 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
July–August 2016 Vol. 16 No 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 62.50

РОБАСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

А.А. Ведяков[a], В.Ю. Тертычный-Даури[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: tertychny-dauri@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 23.05.16, принята к печати 19.06.16
doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-620-626
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Ведяков А.А., Тертычный-Даури В.Ю. Робастные алгоритмы параметрического оценивания в некоторых задачах обеспечения устойчивости // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 4. С. 620–626. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-620-626

Аннотация
Предмет исследования. Рассматриваются задачи приведения динамических систем в устойчивое состояние путем обеспечения устойчивости тривиального решения для динамических систем разного вида в режиме обучения с помощью настройки их параметров. **Метод.** Задачи решены с использованием идеологии построения робастных конечно-сходящихся алгоритмов. **Основные результаты.** Для решения задач обеспечения устойчивости введены понятия параметрической алгоритмизации устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости, а также представлены результаты по синтезу огрубленных градиентных алгоритмов, решающих поставленные задачи за конечное число итераций. **Практическая значимость.** Результаты работы могут быть востребованы при решении практических задач обеспечения устойчивости в процессе работы различных инженерных сооружений и устройств.

Ключевые слова
динамическая система, задача обеспечения устойчивости, робастный конечно-сходящийся алгоритм

ROBUST ALGORITHMS OF PARAMETRIC ESTIMATION IN SOME STABILIZATION PROBLEMS

A.A. Vedyakov[a], V.Yu. Tertychny-Dauri[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: tertychny-dauri@mail.ru

Article info
Received 23.05.16, accepted 19.06.16
doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-620-626
Article in Russian

For citation: Vedyakov A.A., Tertychny-Dauri V.Yu. Robust algorithms of parametric estimation in some stabilization problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 620–626. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-620-626

Abstract
Subject of Research. The tasks of dynamic systems provision in the stable state by means of ensuring of trite solution stability for various dynamic systems in the education regime with the aid of their parameters tuning are considered. **Method.** The problems are solved by application of ideology of the robust finitely convergent algorithms creation. **Main Results.** The concepts of parametric algorithmization of stability and steady asymptotic stability are introduced and the results are presented on synthesis of coarsed gradient algorithms solving the proposed tasks for finite number of iterations with the purpose of the posed problems decision. **Practical Relevance.** The article results may be called for decision of practical stabilization tasks in the process of various engineering constructions and devices operation.

Keywords
dynamic system, stabilization problem, robust finitely-convergent algorithm

Введение

Многие исследователи задач, связанных с вопросами устойчивости движения в рамках использования прямого метода Ляпунова, решают для себя изначально непростую задачу выбора самой функции Ляпунова V [1–6]. Если исходная динамическая система, анализом устойчивости движения которой предстоит заниматься, имеет сложную нелинейную структуру, то задача выбора функции V

становится достаточно неоднозначной, поскольку нет в общем случае сколь-нибудь эффективных и вполне обоснованных алгоритмов ее построения.

Вопрос о выборе функции Ляпунова V имеет весьма важный и принципиальный характер. От этого зависит и полнота решения задачи об устойчивости движения, особенно в отношении движения нелинейных динамических систем. Стоит отметить, что в данной нелинейной ситуации не должно быть иллюзорных оптимистических ожиданий: навряд ли удастся для общего случая разработать общую схему построения функции V. По-видимому, так или иначе придется прибегать к каким-либо приемам аппроксимации и приближенного оценивания решений рассматриваемой системы и делать на основании этого определенные заключения о наличии или отсутствии у системы устойчивых свойств.

Ниже, в последующих разделах, ведется разработка процедуры параметрической устойчивости, претендующей на некую унификацию в описании процесса асимптотического поведения решений исходной динамической системы с параметрами и ее движения в целом, за счет выбора общей (универсальной) функции V в виде квадратичной формы от элементов вектора состояния.

Направляющая идея предлагаемого подхода состоит в преобразовании (проектировании) исходного векторного дифференциального уравнения с выделенными параметрами в скалярное дифференциальное уравнение относительно некоторой неотрицательной функции, рассматриваемой в качестве функции Ляпунова, и дальнейшем использовании этого уравнения для целей обеспечения тех или иных устойчивых характеристик движения у исходной динамической системы.

Предварительные пояснения и допущения

Задача о приведении динамической системы в устойчивое состояние относительно нулевого положения имеет, несомненно, большое практическое значение. Сюда можно отнести многочисленные задачи обеспечения устойчивости при работе инженерных сооружений, различных конструкций, механизмов и агрегатов (башенные краны, платформы с грузом и т.д.). Отсюда возникает вопрос о выборе по результатам измерений или значений тренировочных последовательностей (в процессе выработки заключений о надежности работы системы в режиме экзамена) тех или иных (настраиваемых) параметров этих объектов, обеспечивающих устойчивость их положения равновесия.

Пусть имеется векторное дифференциальное уравнение (ДУ), представленное нелинейным нестационарным уравнением первого порядка с выделенными параметрами стандартного вида:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad t \ge t_0 = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – измеряемый вектор состояния (тренировочная последовательность), $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \subset R^m$ – вектор постоянных параметров, входящих линейно в $\mathbf{f}(\cdot)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) \in R^n$ – некоторая заданная, непрерывная вектор-функция, гладкости которой достаточно для существования, единственности и непрерывной зависимости решений уравнения (1) от начальных условий. Будем считать впредь, что $\mathbf{f}(0,\boldsymbol{\sigma},t) \equiv 0$ и речь идет о задаче устойчивости нулевого решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ (точки покоя, положения равновесия) уравнения (1), т.е. с помощью новых переменных, равных отклонениям координат возмущенного движения от невозмущенного, задача об устойчивости уже сведена к задаче (1) указанного типа.

Явное вхождение времени t в вектор-функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ подразумевает наличие каких-либо внешних возмущений, различных неконтролируемых флуктуаций и т.д.

Уточним: предполагается, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{f}$ – это вещественные *n*-векторы, $\boldsymbol{\sigma}$ – вещественный постоянный неизвестный *m*-вектор, $\mathbf{f}(\cdot)$ определена в $R^n \times R^m \times R$; $\dot{\mathbf{x}}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, $\mathbf{f}: \Omega \times \Sigma \times I \to R^n$, где Ω – область (открытое связное множество) в R^n, содержащая начало, Σ – множество параметров в R^m, $\mathbf{x} \in \Omega \subset R^n$, $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \subset R^m$, $I = \{t : t \ge t_0 = 0\}$, $t \in I \subset R$.

Считаем также, что вектор-функция $\mathbf{f}(\cdot)$ гладкая настолько, чтобы через любые $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times I$, $\forall \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ проходило одно и только одно решение уравнения (1), которое обозначим $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$, указывая тем самым на его зависимость от начальных данных. Имеем по определению: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; t_0)$.

Воздержимся от выписывания хорошо известных определений различного вида устойчивости, ограничившись напоминанием ключевого определения устойчивости по Ляпунову тривиального решения. Итак, решение $\mathbf{x} = 0$ уравнения (1) называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, t_0 \in I$, $\exists\, \delta > 0$, что $\forall \mathbf{x}_0 : \|\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; t_0)\| < \delta$ и $\forall t \ge t_0$ имеет место неравенство $\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; t_0)\| < \varepsilon$ (здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора).

Стационарную функцию Ляпунова (ФЛ) $V[\mathbf{x}(t)]$ определим как функцию из класса C^1; $V:\Omega \to R$. Пусть $\mathbf{x}(t)$ – некоторое решение уравнения (1). Функция $\dot{V}(\mathbf{x})$ дается выражением $\dot{V} = [\partial V(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}]\dot{\mathbf{x}}$, $\dot{V}:\Omega \to R$.

ФЛ $V(\mathbf{x})$ называется определенно положительной в области $\Omega \subset R^n$, содержащей начало координат, если она $\forall t \ge t_0 = 0$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $V(0) = 0$;
2. $V(\mathbf{x}) \ge \alpha(\|\mathbf{x}\|) > 0$ при $\|\mathbf{x}\| \ne 0$, где $\alpha(\|\mathbf{x}\|)$ – непрерывная функция такая, что $V(0) = \alpha(0) = 0$.

Далее спроектируем уравнение (1) на вектор $2\mathbf{x}$, т.е. умножим это уравнение скалярно на вектор $2\mathbf{x}$:

$$2\mathbf{x}^*\dot{\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^*\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t),$$

или

$$\frac{d(\mathbf{x}^*\mathbf{x})}{dt} = 2\mathbf{x}^*\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t), \tag{2}$$

где (*) сверху означает операцию транспонирования. Здесь $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = (\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2 + ... + x_n^2 \ge 0$; $x_i, i = \overline{1,n}$ – элементы вектора $\mathbf{x} \in \Omega$ евклидова пространства R^n с выбранной системой координат и метрикой $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.

В качестве стационарной динамической положительно определенной функции Ляпунова $V(\mathbf{x})$ введем рассмотренную выше квадратичную форму: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*\mathbf{x} = (\mathbf{x},\mathbf{E}\mathbf{x})$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размерности n; $V(0) = 0$. Тогда, очевидно, уравнение (2) можно записать в виде

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t), \qquad \mathbf{x} \in R^n, \quad \boldsymbol{\sigma} \in R^m, \quad t \ge t_0 = 0, \tag{3}$$

где для функции ψ введено обозначение: $\psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) = 2\mathbf{x}^*\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$, $\psi(0,\boldsymbol{\sigma},t) = 0$.

С учетом линейного вхождения элементов вектора $\boldsymbol{\sigma}$ в функцию $\psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ можно также ее выразить зависимостью

$$\psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) = \mathbf{g}^*(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\sigma} + p(\mathbf{x},t), \tag{4}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x},t) = \nabla_\sigma \psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) \in R^m$ – вектор градиента функции $\psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ по элементам σ_j, $j = \overline{1,m}$, вектора параметров $\boldsymbol{\sigma}$; $p(\mathbf{x},t)$ – известная скалярная функция переменных $\mathbf{x}$ и t.

Параметрическая алгоритмизация понятия устойчивости

В дифференциальной системе (3), (4) скалярную вещественную функцию $\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) = -\psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ будем рассматривать в качестве целевой функции, полагая, что на множестве $\Omega \times \Sigma \times I$ она обладает следующими свойствами:

1. Функция $\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ равномерно ограничена по $\mathbf{x}, t$; $|\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)| < k_1$, дифференцируема по $\boldsymbol{\sigma}$ $\forall \mathbf{x}$, t; $\|\nabla_\sigma \varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)\| < k_2$, где k_1, k_2 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от x и t.
2. $\exists\, \boldsymbol{\sigma}_* \in \Sigma \subset R^m$ – вектор, для которого справедливы неравенства $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, $\forall t \in I$:

   $$\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma}_*,t) \ge \varepsilon_* > 0, \tag{5}$$

   где ε_* – некоторое положительное достаточно малое число.
3. Будем предполагать, что $\forall\{\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t\}$ – тройки точек, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$, $t \in I$, удовлетворяющих условию $\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) \le 0$, $\exists \tilde{\varepsilon} \ge 0$ – такое число, когда справедливы неравенства

   $$(\nabla_\sigma \varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \ge \varphi(\mathbf{x},\tilde{\boldsymbol{\sigma}},t) - \varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) \ge \tilde{\varepsilon}. \tag{6}$$

   где слева стоит скалярное произведение векторов $\nabla_\sigma \varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ и $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$.

Поставим задачу критериального обеспечения асимптотической устойчивости нулевого решения исходной системы (1) в терминах решения следующего целевого неравенства:

$$\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) > 0 \qquad (\text{либо } \psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) < 0) \tag{7}$$

относительно вектора параметров $\boldsymbol{\sigma}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, $\forall t \in I$.

Очевидно, что нахождение вектора $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \subset R^m$ гарантированно обеспечивает в согласии с теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости решение поставленной задачи и указывает на соответ-ствующий выбор параметров в исходной системе.

Обсудим условия 1, 2 и 3. Функция $\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ в силу линейности по $\boldsymbol{\sigma}$ дифференцируема по $\boldsymbol{\sigma}$; кроме того, $\nabla_{\sigma}\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t) = -\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$, а значит, первое условие приводит к тому, что вектор-функция $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$ должна быть ограничена на $\Omega\times I$. Второе условие указывает на то, что целевое неравенство (7) разрешимо в усиленном смысле, а именно: $\exists\ \boldsymbol{\sigma}_* \in \Sigma \subset R^m$ – вектор, удовлетворяющий данным неравенствам (5) с некоторым запасом, т.е. множество решений этих неравенств представляет собой открытое множество. Третье условие характерно для градиентных алгоритмов и означает условие вогнутости. Левое неравенство (6) означает его выполнение для произвольных $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $\boldsymbol{\sigma}$, если функция $\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)$ вогнута по $\boldsymbol{\sigma}$ $\forall \mathbf{x}\in\Omega$, $\forall t\in I$, а правое неравенство дает оценку степени этой вогнутости.

В качестве замечания отметим: если в соотношении (7) выбрано нестрогое неравенство ≥ 0 (либо ≤ 0), то в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости получим критериальное условие устойчивости нулевого решения исходной системы (1) в зависимости от выбора вектора параметров $\boldsymbol{\sigma}$.

Для определенности сконцентрируемся на решении по $\boldsymbol{\sigma}$ неравенства (7). Возьмем некоторый начальный вектор $\boldsymbol{\sigma}_1 \in \Sigma \subset R^m$ и зададим алгоритм оценивания параметров вида

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n - \alpha_n\theta_n\nabla_{\sigma_n}\varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n), \tag{8}$$

где

$$\theta_n = \begin{cases} 1, \text{если } \varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n)\leq 0, & \text{либо } \mathbf{g}^*(\mathbf{x}_n,t_n)\boldsymbol{\sigma}_n + p(\mathbf{x}_n,t_n)\geq 0,\\ 0, \text{если } \varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n) > 0, & \text{либо } \mathbf{g}^*(\mathbf{x}_n,t_n)\boldsymbol{\sigma}_n + p(\mathbf{x}_n,t_n) < 0,\end{cases}$$

$$\alpha_n = -\frac{k}{\left\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)\right\|^2},$$

где $k>0$ – произвольная постоянная, $\alpha_n\frac{1}{2}$ – некоторая числовая последовательность. Здесь $n=1,2,\ ...\ ,\boldsymbol{\sigma}_1$ – начальный вектор, $\mathbf{x}_n=\mathbf{x}(t_n)$ – измеряемый вектор состояния (тренировочная последовательность), $\boldsymbol{\sigma}_n$ – кусочно-постоянная функция времени: $\boldsymbol{\sigma}_t=\boldsymbol{\sigma}_n$, $t\in[t_n,t_{n+1})$, где t_{n+1} – момент времени, когда впервые после $t_n+\delta$, $\delta>0$, нарушается целевое неравенство $\varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n)>0$. Алгоритм (8) можно также записать в более простой форме:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n - \frac{k\theta_n\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)}{\left\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)\right\|^2}, \tag{9}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n) = -\nabla_{\sigma_n}\varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n)$.

Основной результат

Сформулируем и докажем теорему, дающую условия конечной сходимости алгоритма получения оценок вектора параметров $\boldsymbol{\sigma}$.

Теорема. При выполнении указанных выше условий 1, 2 и 3 построенная с помощью алгоритма (9) последовательность векторов $\boldsymbol{\sigma}_n$ монотонно приближается к вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Алгоритм (9) сходится за конечное число шагов, т.е. $\exists\ t_*>0$ – момент времени такой, что $\forall t\geq t_*$ выполнено равенство $\boldsymbol{\sigma}_t=\boldsymbol{\sigma}_{t_*}$ и, начиная с этого момента времени, $\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)>0$. Кроме того, для числа коррекций ρ вектора $\boldsymbol{\sigma}_n$ справедлива оценка

$$\rho \leq \left\|\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}\right\|^2 h, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_1\in\Sigma$ – произвольный начальный вектор, $h=k_2^2/(k^2\varepsilon_*)$.

Доказательство. Предположим, что на некотором n-м шаге алгоритма выполнено неравенство $\varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n)\leq 0$. Тогда из соотношения (9), возводя члены последовательно в квадрат, получим с учетом выражений (5) и (6):

$$\left\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}-\boldsymbol{\sigma}\right\|^2 \leq \left\|\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma}\right\|^2 - 2k\theta_n(\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma},\mathbf{g})\left\|\mathbf{g}\right\|^{-2} + k^2\theta_n\left\|\mathbf{g}\right\|^{-2} =$$

$$= \left\|\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma}\right\|^2 - 2k\theta_n\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma})\left\|\mathbf{g}\right\|^{-2} + k^2\theta_n\left\|\mathbf{g}\right\|^{-2} \leq$$

$$\leq \left\|\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma}\right\|^2 - 2k\theta_n\varepsilon_n\left\|\mathbf{g}\right\|^{-2} + k^2\theta_n\left\|\mathbf{g}\right\|^{-2} = \left\|\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma}\right\|^2 - \frac{k^2\theta_n}{\left\|\mathbf{g}\right\|^2}\left(\frac{2\varepsilon_n}{k}-1\right) \leq \left\|\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma}\right\|^2 - \frac{k^2\theta_n}{k_2^2}\left(\frac{2\varepsilon_n}{k}-1\right), \tag{11}$$

где $k_2>0$ – константа из условия 1 теоремы. Пусть $\varepsilon_n>0$ – число из оценки (6) в условии 3 теоремы, которое удовлетворяет неравенству $\varepsilon_n>k/2$. Выберем в качестве ε_n величину

$$\varepsilon_n = \frac{k}{2} + \varepsilon_* \theta_n, \tag{12}$$

где $\varepsilon_* > 0$ – константа из условия 2 теоремы. Затем с учетом равенства (12) неравенство (11) можно продолжить:

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{k^2 \theta_n \varepsilon_*}{k_2^2}. \tag{13}$$

Суммируя последнее неравенство по n от 1 до N, получим

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{N+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \le \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{k^2 \varepsilon_*}{k_2^2} \sum_{n=1}^{N} \theta_n, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_1 \in \Sigma$ – произвольный начальный вектор.

Чтобы доказать конечную сходимость предлагаемого алгоритма параметрического оценивания, предположим, что при $\varphi(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n) \le 0$ имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \delta_n, \tag{15}$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \infty.$ Видно, что структура неравенства (15) полностью совпадает со структурой неравенства (13), если обозначить

$$\delta_n = \frac{k^2 \theta_n \varepsilon_*}{k_2^2}.$$

Легко показать, что условие $\varphi(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n) \le 0$ выполняется не более чем для конечного числа ρ_n троек $\{\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n\}$, причем для этого числа ρ_n имеем очевидную оценку: $\rho_n \le s$, где s – наименьшее целое, для которого справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{s} \delta_n \ge \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}\|^2. \tag{16}$$

Действительно, суммируя неравенства (15) по $i = \overline{1, n}$, получим

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \le \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i. \tag{17}$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \to \infty$ при $n \to \infty$, то неравенство (17) при достаточно большом n становится противоречивым. В качестве числа s возьмем n, для которого выполняется неравенство (16). Тем самым получаем утверждение теоремы о конечной сходимости алгоритма оценивания (9). Оценка (10) числа ρ изменений вектора $\boldsymbol{\sigma}_n$ непосредственно следует из неравенства (14). Теорема доказана.

Сделаем несколько пояснений. Прежде всего отметим, что предложенный алгоритм (8), (9) имеет характерную для градиентных алгоритмов с поощрением форму: вектор $\boldsymbol{\sigma}_n$ изменяется в направлении наибольшего увеличения целевой функции $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t)$, если очередное n-ое неравенство не выполнено, и вектор $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}$ «замораживается», если, наоборот, n-ое целевое неравенство выполнено (подробности о конечно-сходящихся алгоритмах (КСА) см., например, в работах [5–10, 11]).

Еще одной особенностью этого алгоритма является выбор целевого неравенства (7) с явной зависимостью целевой функции $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t)$ от времени, что, в принципе, предполагает увеличение потенциальных возможностей самого алгоритма. В основе использования алгоритма (9) лежит основная идея прямого метода Ляпунова об убывании неотрицательной функции на траекториях исследуемого процесса. В данном случае в качестве такой функции выступает неотрицательная квадратичная форма $\|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2$, убывающая на траекториях процесса, порождаемого алгоритмом (9). В отличие от стандартных КСА (адаптации, обучения с поощрением, разделения множеств) [5, 7–9] здесь применяется модифицированный (симплектический, робастный) вариант КСА, использующий более простую структуру последовательности чисел α_n в алгоритме (8) по сравнению с традиционными градиентными КСА, куда помимо числа $k > 0$, в числителе дроби входит также целевая функция $\varphi(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n)$.

Итогом проведенного анализа служит утверждение о том, что выбор векторного параметра $\boldsymbol{\sigma}$ в уравнении (1), к значению которого приводит применение алгоритма оценивания (9), гарантирует наличие асимптотической устойчивости нулевого решения исходной динамической системы (1).

В терминах наличия свойства диссипативности (притяжения, асимптотической устойчивости) у исходной динамической системы полученный результат можно также интерпретировать следующим образом: параметрически настраиваемая система вида (1)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\sigma}(t), t],$$

при использовании алгоритма настройки (8), (9) для $\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_n$, $t \in [t_n, t_{n+1})$, $n = 0, 1, \dots$, является диссипативной по отношению к нулевому решению рассматриваемой динамической системы.

Модельный пример

Отметим, что данный пример носит не вычислительный, а, скорее, пояснительный, иллюстративный характер, поскольку он призван показать возможность применения предложенной схемы алгоритмической настройки параметров.

Рассмотрим скалярное нелинейное уравнение Дюффинга [12] движения механического осциллятора с вязким трением, жесткостью пружины, зависящей от времени, и с закрепленным концом следующего вида:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + b(t)y + cy^3 = 0, \qquad y \ge 0, \tag{18}$$

где $a = \text{const} > 0$, $b(t) = 1 + Cd(t)$, $d(t)$ – заданная ограниченная скалярная функция времени, C, $c > 0$ – достаточно малые постоянные. Требуется путем настройки параметра a привести систему с уравнением (18) в асимптотически устойчивое начало.

Поясним уравнение (18). Два последних слагаемых в его левой части представляют собой так называемую упругую силу (в данном примере – упругую силу пружины) $F : F = b(t)y + cy^3$ – нелинейную и характерную для больших деформаций, когда закон Гука не выполняется; в случае малых деформаций, т.е. когда $c = 0$ и закон Гука выполняется, имеем стандартное линейное выражение для $F : F = b(t)y.$

Уравнение (18) можно записать в виде системы первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, a, t), \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, a, t) = \begin{pmatrix} z \\ -az - b(t)y - cy^3 \end{pmatrix},$$

где

$$\dot{y} = z, \qquad \dot{z} = -az - b(t)y - cy^3.$$

В качестве положительно определенной функции Ляпунова возьмем функцию

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{x} = y^2 + z^2,$$

где $V(0) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ при $x \ne 0$, $V(\mathbf{x}) \to \infty$ при $\mathbf{x} \to \infty$. Тогда в силу системы согласно предыдущему имеем

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^* \mathbf{f}(\mathbf{x}, a, t) = \psi(\mathbf{x}, a, t) = -2az^2 + 2[1 - b(t) - cy^2]yz, \tag{19}$$

где $\mathbf{x} \in R^2$, $a = \text{const} \in R$, $t \ge t_0 = 0$, причем

$$\psi(\mathbf{x}, a, t) = \mathrm{g}(\mathbf{x}, t)a + p(x, t), \qquad g(\mathbf{x}, t) = \nabla_a \psi(\mathbf{x}, a, t) = -2z^2, \qquad p(\mathbf{x}, t) = 2[1 - b(t) - cy^2]yz.$$

Энергию осциллятора определяют две противодействующие силы: параметрическое возбуждение, пропорциональное коэффициентам C, c, и нагрузка, характеризуемая демпфирующей силой $a\dot{y}$. Картина распределения энергии выглядит следующим образом: если параметр сопротивления a выбрать достаточно большим, то нагрузка от демпфирующего сопротивления «поглотит» энергию, сообщаемую возбуждением (см. выражение (19) для $\dot{V}(\mathbf{x})$). В этом случае начало будет асимптотически устойчиво. В противном случае, когда параметр a недостаточно велик и нагрузка от демпфирующего сопротивления мала, энергетический баланс в системе может быть нарушен: он будет положительным и начало становится неустойчивым.

Данные эвристические соображения применительно к задаче обеспечения устойчивого начала в исходной системе за счет выбора параметра a подталкивают к идее использования алгоритмического обеспечения целевого неравенства по тестовому (тренировочному) набору значений $\mathbf{x}_n = (y_n, z_n)^*$:

$$\varphi(\mathbf{x}_n, a_n, t_n) = 2a_n z_n^2 - 2[1 - b(t_n) - cy_n^2]y_n z_n > 0, \tag{20}$$

где $\varphi(\mathbf{x}, a, t) = -\psi(\mathbf{x}, a, t).$

Неравенство (20) будем решать с помощью алгоритма настройки параметров a_n вида (8), (9):

$$a_{n+1} = a_n, \quad \text{если} \quad a_n z_n^2 > [1 - b(t_n) - cy_n^2]y_n z_n,$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{k\theta_n}{2z_n^2}, \quad \text{если} \quad a_n z_n^2 \le [1 - b(t_n) - cy_n^2]y_n z_n. \tag{21}$$

Здесь a_1 – некоторое начальное значение оцениваемого параметра, $k > 0$ – произвольная постоянная, $\theta_n = \{0;\ 1\}$ в зависимости от обеспечения целевого неравенства (20).

Отметим, что функция $\varphi(\mathbf{x}, a, t)$ удовлетворяет условиям (5) и (6): предполагается, что усиленное неравенство (5) выполняется при $t_0 = 0$ таком, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \neq 0$ (пружина при $t_0 = 0$ растянута). Вогнутость в виде неравенства (6) также в этом случае имеет место, т.е. $\exists \tilde{\varepsilon} \geq 0$:

$$(\nabla_a \varphi(\mathbf{x}, a, t), \tilde{a} - a) = (2z^2, \tilde{a} - a) \geq \varphi(\mathbf{x}, \tilde{a}, t) - \varphi(\mathbf{x}, a, t) = 2\tilde{a}z^2 - 2[1 - b(t) - cy^2]yz -$$
$$- \{2az^2 - 2[1 - b(t) - cy^2]yz\} = 2(\tilde{a} - a)z^2 \geq \tilde{\varepsilon}.$$

В завершении укажем на то, что в рассматриваемой задаче параметр a заранее не известен, но, тем не менее, алгоритм (21) пошагово его «находит» в силу выполнения условий (5), (6) и установленных ранее свойств конечной сходимости. Заметим также, что найденное финальное значение a_n, совпадающее с искомым значением a, гарантирует наличие асимптотической устойчивости начала исследуемой системы.

Заключение

В настоящей работе дана общая постановка задачи об обеспечении устойчивости нелинейных динамических систем с помощью настройки их параметров. С этой целью введено понятие параметрической алгоритмизации устойчивости. Задачу о приведении системы в устойчивое состояние предлагается решать путем использования аппарата робастных конечно-сходящихся алгоритмов оценивания. О различных близких постановках задач адаптации и оценивания в нелинейных динамических системах см., например, работы [5, 7, 8, 13–16].

Представляется, что полученные результаты могут послужить основой для дальнейших исследований в области решения задач приведения динамических систем регулированием их параметров в устойчивое состояние на фоне действия на систему различного рода возмущений, а также при наличии дополнительных ограничений (минимизации функционалов качества, уравнений или неравенств, связывающих переменные состояния и т.д.).

Литература

1. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
3. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 с.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 302 с.
5. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. Tertychny-Dauri V.Yu. Adaptive Mechanics. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 536 p.
7. Якубович В.А. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. 1976. С. 32–64.
8. Фомин В.Н. Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л.: ЛГУ, 1976. 236 с.
9. Гусев С.В., Якубович В.А. Алгоритм адаптивного управления роботом-манипулятором // Автоматика и телемеханика. 1980. № 9. С. 101–111.
10. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
11. Тимофеев А.В. Конечно-сходящиеся локально-оптимальные алгоритмы решения неравенств, возникающих в задачах синтеза адаптивных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 4. С. 9–20.
12. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. Л.: ЛГУ, 1985. 536 с.
13. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990. 296 с.
14. Тертычный-Даури В.Ю. Решение вариационных динамических задач в условиях параметрической неопределенности // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. № 1. С. 53–67.
15. Тертычный-Даури В.Ю. Вариационные динамические задачи с параметрами и их адаптивная интерпретация // Автоматика и телемеханика. 2005. № 9. С. 114–128.
16. Тертычный-Даури В.Ю. Нелинейные задачи механики и теории управления. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2013. 560 с.

Ведяков Алексей Алексеевич – кандидат технических наук, ассистент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, vedyakov@corp.ifmo.ru

Тертычный-Даури Владимир Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, tertychny-dauri@mail.ru

Alexey A. Vedyakov – PhD, assistant, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, vedyakov@corp.ifmo.ru

Vladimir Yu. Tertychny-Dauri – D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, tertychny-dauri@ mail.ru