



УДК 681.786

ПРИМЕНЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ОТРАЖАТЕЛЯ АВТОКОЛЛИМАЦИОННОЙ УГЛОИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И.А. Коняхин^а, Хоанг Ван Фон^а^а Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская ФедерацияАдрес для переписки: vanphongkqh@yahoo.com**Информация о статье**

Поступила в редакцию 05.07.16, принята к печати 30.08.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-773-779

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Коняхин И.А., Хоанг В.Ф. Применение кватернионов для расчета параметров отражателя автоколлимационной углоизмерительной системы // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 5. С. 773–779. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-773-779**Аннотация**

Предмет исследования. Рассмотрено применение кватернионов для оптимизации параметров отражателей при автоколлимационных измерениях в сравнении с матричным методом. Приведены результаты компьютерных расчетов на кватернионных моделях, позволившие определить условия уменьшения погрешности измерения при наличии априорной информации о положении оси поворота. Рассмотрена практическая методика синтеза параметров тетраэдрического отражателя, использующая найденные соотношения. **Метод.** Первоначально полученные условия уменьшения погрешности измерения автоколлимационной системы определены с использованием матричного метода для задания углового положения объекта как совокупности трех эквивалентных последовательных поворотов относительно координатных осей. При реализации этих условий необходим неоднократный пересчет параметров ориентации между различными системами координат, что увеличивает трудоемкость и снижает результирующую точность автоколлимационной системы при практических измерениях. С использованием метода кватернионов, позволяющего анализировать изменение абсолютного углового положения в пространстве, находятся условия повышения точности вне зависимости от используемых систем координат. **Основные результаты.** Исследования на математической модели показали, что оптимальным по критерию уменьшения погрешности измерения является ортогональное расположение двух основных неизменных направлений тетраэдрического отражателя автоколлиматора при биссекторном расположении относительно них оси фактического поворота. **Практическая значимость.** На основе найденных соотношений между углами тетраэдрического отражателя и углами параметров его начальной ориентации разработана практическая методика синтеза отражающего контрольного элемента для автоколлимационных измерений в случае наличия априорной информации об оси фактического поворота при мониторинговых измерениях деформаций валов или трубопроводов.

Ключевые слова

кватернионы, отражатель, автоколлиматор, измерение углов поворота

APPLICATION OF QUATERNIONS FOR REFLECTOR PARAMETER DETERMINATION OF THE AUTOCOLLIMATION ANGLE MEASURING SYSTEM

I.A. Konyakhin^a, Hoang Van Phong^a^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian FederationCorresponding author: vanphongkqh@yahoo.com**Article info**

Received 05.07.16, accepted 30.08.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-773-779

Article in Russian

For citation: Konyakhin I.A., Hoang Van Phong. Application of quaternions for reflector parameter determination of the autocollimation angle measuring system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 5, pp. 773–779. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-773-779**Abstract**

Subject of Research. The paper deals with application of quaternions for optimization of reflector parameters at autocollimation measurements in comparison with a matrix method. Computer-based results on the quaternionic models are

presented that have given the possibility to determine conditions of measurement error reduction in view of apriori information on the rotation axis position. The practical synthesis technique for tetrahedron reflector parameters using found ratios is considered. **Method.** Originally, received conditions for reduction of autocollimation system measurement error are determined with the use of a matrix method for definition of an angular object position as a set of three equivalent consecutive turns about coordinate axes. At realization of these conditions the numerous recalculation of orientation parameters between various systems of coordinates is necessary that increases complexity and reduces resulting accuracy of autocollimation system at practical measurements. The method of quaternions gives the possibility to analyze the change of an absolute angular position in space, thus, there are conditions of accuracy increase regardless of the used systems of coordinates. **Main Results.** Researches on the mathematical model have shown, that the orthogonal arrangement of two basic constant directions for autocollimator tetrahedron reflector is optimal with respect to criterion of measurement error reduction at bisection arrangement of actual turn axis against them. **Practical Relevance.** On the basis of the found ratios between tetrahedron reflector angles and angles of its initial orientation parameters we have developed a practical method of reflector synthesis for autocollimation measurements in case of apriori information on an actual turn axis at monitoring measurements of the shaft or pipelines deformations.

Keywords

quaternion, reflector, autocollimator, rotation angles measurement

Введение

В настоящее время измерение углового положения объектов в пространстве является одной из задач метрологического обеспечения науки и производства, например, при наблюдении за состоянием объектов энергетики, промышленности и строительной индустрии [1]. Для определения углового пространственного положения объекта эффективны оптико-электронные автоколлимационные углоизмерительные системы. При расчете параметров автоколлиматоров используются математические методы сферической тригонометрии, векторного и векторно-матричного исчисления. При использовании этих методов необходим неоднократный пересчет параметров ориентации между различными системами координат, что увеличивает трудоемкость и снижает результирующую точность измерений [2, 3]. Более просто задачи определения угловой пространственной ориентации решаются с помощью кватернионов, позволяющих определять пространственные повороты без учета смены системы координат [4, 5].

Основные положения

Угловое положение объекта определено, если известно положение осей системы координат $X_1Y_1Z_1$, связанной с перемещающимся объектом (подвижной) относительно осей неподвижной системы координат XYZ , связанной с измерительной системой [6]. Положение подвижной системы координат определяется тремя угловыми координатами $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ – углами последовательных поворотов системы координат $X_1Y_1Z_1$ относительно собственных осей, в результате которых ее оси будут совмещены с осями неподвижной системы [1]. При этом угол Θ_3 поворота относительно оси OZ_1 называют углом скручивания, углы Θ_1 и Θ_2 поворота относительно осей OX_1, OY_1 – коллимационными углами.

При автоколлимационных измерениях на контролируемом объекте закрепляется отражатель – контрольный элемент (КЭ) 1, чувствительный к поворотам объекта, на неподвижной базе устанавливается автоколлиматор (АК) 2 (рис. 1, а) с каналами излучения и приема отраженных пучков [7].

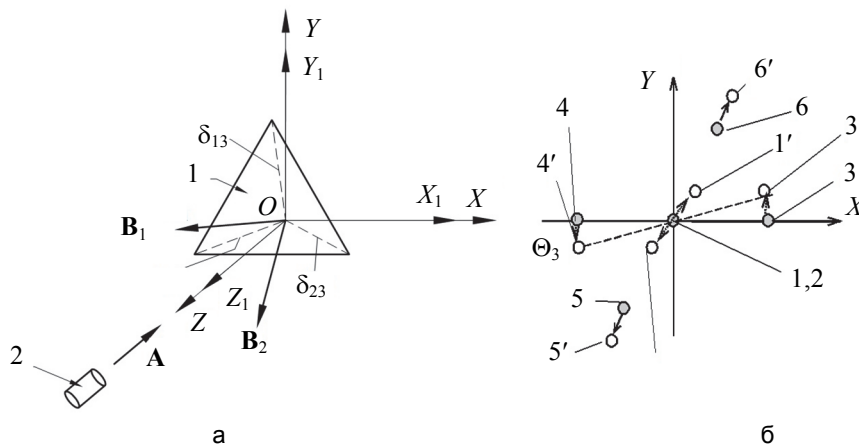


Рис. 1. Автоколлимационная углоизмерительная система: тетраэдрический отражатель: 1 – отражающий контрольный элемент, 2 – автоколлиматор (а); изображения марки, сформированные отраженными пучками на матричном анализаторе: 1–6 – до поворота, 1'–6' – после поворота контрольного элемента (б)

Для измерения углов поворотов $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ используется КЭ в виде тетраэдрического отражателя, углы между отражающими гранями которого имеют малые отклонения $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$ от 90° (рис. 1, а). На матричном анализаторе автоколлиматора при использовании КЭ формируются три пары изображений,

соответствующих трем различным последовательностям отражения (прямой и обратной в каждой паре) от граней: осевая пара 1 и 2 и две крайние пары 3 и 4, 5 и 6 соответственно (рис. 1, б).

Орт \mathbf{B} отраженного пучка после поворота отражателя рассчитывается по формуле (3.1) из [3]:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_r \cdot \mathbf{M}_d \cdot \mathbf{M}_r^{-1} \cdot \mathbf{A}, \quad (1)$$

где \mathbf{A} – орт падающего на отражатель пучка; \mathbf{M}_d – матрица отражения, связанная с отражателем в системе координат $X_1Y_1Z_1$; \mathbf{M}_r и \mathbf{M}_r^{-1} – матрицы прямого и обратного операторов, определяющих соответственно прямой и обратный переходы между системами координат XYZ и $X_1Y_1Z_1$. Вид матрицы \mathbf{M}_r определяется формулой (14.10-26) из [8] при замене ν на Θ_1 , ψ на Θ_2 , ϕ на Θ_3 .

Координаты ортов отраженных пучков по осям OX , OY при малых углах $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ при осевом падении исходного пучка ($\mathbf{A} = [0, 0, -1]^T$ (рис. 1)) в соответствии с выражением (1) равны

$$\begin{aligned} \mathbf{B}x_{1,2} &= \pm c_{1,2} \cdot \Theta_1 \mp b_{1,2} \cdot \Theta_3 \mp a_{1,2} \\ \mathbf{B}y_{1,2} &= \pm b_{1,2} \mp a_{1,2} \cdot \Theta_3 \pm c_{1,2} \cdot \Theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

где цифра в индексе определяет номер отраженного пучка; верхний знак в структурной части формул соответствует орту первого отраженного пучка, нижний – второго (третья пара отраженных пучков не используется); a, b, c – элементы матрицы отражения \mathbf{M}_d (формула (3.73) в [1], определяемые величинами $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$ отклонений двугранных углов (рис. 1, а).

Приемная система автоколлиматора измеряет координаты ортов $\mathbf{B}_{1,2}$, после чего углы $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ определяются в результате решения системы уравнений (2) (одно из четырех уравнений, например, соответствующее координате $\mathbf{B}x_2$ не используется).

Погрешности измерения трех угловых координат определяются выражениями

$$\begin{bmatrix} d\Theta_1 \\ d\Theta_2 \\ d\Theta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{K} \cdot \begin{bmatrix} K/c_1 & b_1 \cdot c_2/c_1 & b_1 \\ 0 & c_2 & c_1 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi x_1 \\ d\xi y_1 \\ d\xi y_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В этих выражениях $d\xi x_1, d\xi y_1, d\xi y_2$ – погрешности измерения приемной системой АК разности ортов $\xi x_1 = \mathbf{B}x_1 + a_1, \xi y_1 = \mathbf{B}y_1 - b_1, \xi y_2 = \mathbf{B}y_2 - b_2$ отраженных пучков до и после поворотов отражателя; коэффициент $K = c_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot c_2$.

Из выражения (3) следует, что для увеличения точности измерений трех угловых координат необходимо выполнение соотношений:

$$a_2 = 0; b_1 = 0; c_2 = 0. \quad (4)$$

Полученные условия определяют повышение точности измерения трех угловых координат $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ как последовательных поворотов отражателя относительно координатных осей. Эти три угловые координаты определяют угол и ось фактического поворота, которая произвольно расположена в системе координат XYZ , и соотношения (4) для него уже не оптимальны по точностному критерию.

Определим условия уменьшения погрешности измерения поворота отражателя относительно фактической оси, используя аппарат кватернионов, позволяющий анализировать изменение абсолютного углового положения объекта в пространстве [9].

Расчет параметров автоколлимационной углоизмерительной системы с применением кватернионов

Выражение для орта пучка, отраженного тетраэдрическим отражателем, в кватернионной форме имеет вид

$$\mathbf{B} = Q_R \circ Q_p \circ Q_r \circ \bar{Q}_R \circ \mathbf{A} \circ Q_R \circ \bar{Q}_r \circ Q_p \circ \bar{Q}_R, \quad (5)$$

где $Q_p \circ Q_r$ – сомножители, определяющие кватернион отражателя, Q_R и \bar{Q}_R – кватернионы прямого и обратного переходов между системами координат XYZ и $X_1Y_1Z_1$; знак « \circ » определяет сопряженный кватернион [10]. Кватернион перехода определяется выражением (2.72) из [11] при замене ν на Θ_1 , ψ на Θ_2 , ϕ на Θ_3 .

В кватернионе отражателя Q_p – кватернион инверсии (отсутствует, если пучок претерпевает четное число отражений), Q_r – кватернион поворота орта пучка при отражении на угол ω относительно основного неизменного направления (ОНН) отражателя.

Для тетраэдрического отражателя угол $\omega = 180^\circ - \Delta$ (Δ – малый угол) [12]. Тогда кватернион Q_r поворота орта пучка относительно основного неизменного направления \mathbf{U} (рис. 2), рассматриваемого как ось с ортом \mathbf{u} , может быть записан как [13]:

$$Q_r = \left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \cos(\alpha) \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right], \quad (6)$$

где α, β – зенитный и азимутальный углы основного неизменного направления.

Кватернион инверсии имеет вид, определяемый выражением (6) при $\omega = \pi$:

$$Q_p = [0, \sin(\alpha) \sin(\beta), \cos(\alpha), \sin(\alpha) \cos(\beta)].$$

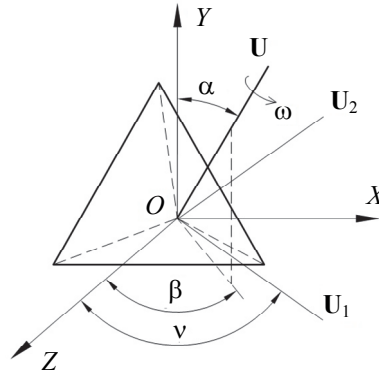


Рис. 2. Отражатель с основными неизменными направлениями

Пусть в отражателе два основные неизменные направления U_1 и U_2 , соответствующие различным последовательностям отражения пучка от граней, лежат в плоскости XOZ , симметрично расположены относительно оси OZ и составляют с ней угол ν (рис. 2) [14, 15]. Отраженные пучки строят в фокальной плоскости объектива автоколлиматора изображения 1, 2 марки автоколлиматора (рис. 3, б).

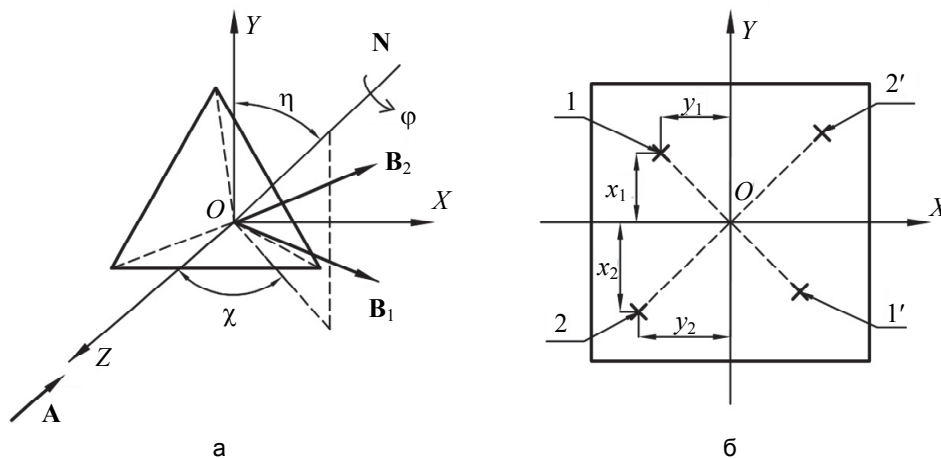


Рис. 3. Отражатель с поворотом вокруг фактической оси поворота (а); изображения марки автоколлиматора в фокальной плоскости приемного объекта (б)

Координаты изображений 1, 1' и 2, 2' марки автоколлиматора определяются следующими выражениями:

$$X_{1,2}, Y_{1,2} = f \cdot \operatorname{tg} \left[\arcsin \sqrt{(\mathbf{B}x_{1,2})^2 + (\mathbf{B}y_{1,2})^2} \right] \cdot \frac{\mathbf{B}x_{1,2}, \mathbf{B}y_{1,2}}{\sqrt{(\mathbf{B}x_{1,2})^2 + (\mathbf{B}y_{1,2})^2}}, \quad (7)$$

где $\mathbf{B}x_{1,2}, \mathbf{B}y_{1,2}$ – координаты отраженного луча \mathbf{B} по оси OX и оси OY, f – фокусное расстояние объектива автоколлиматора.

Определим условия уменьшения погрешностей $\Delta\varphi$ измерения угла поворота φ и $\Delta\eta, \Delta\chi$ положения орта \mathbf{N} фактической оси поворота (рис. 3, а) вследствие погрешностей $dX_{1,2}, dY_{1,2}$ измерения координат изображений на матричном анализаторе приемной системы АК, используя выражения (7), в котором координаты ортов $\mathbf{B}_{1,2}$ отраженных пучков задаются кватернионным соотношением (5).

Вследствие сложной структуры результирующих аналитических выражений при анализе использовались результаты численных расчетов для заданных параметров тетраэдрического отражателя и фактического поворота.

Полученные зависимости $\Delta\eta(\nu), \Delta\chi(\nu)$ и $\Delta\varphi(\nu)$ для $\nu \in [0^\circ, 90^\circ]$ изображены на рис. 4. Результаты получены для следующих исходных параметров АК и поворота отражателя: $f = 100$ мм, $dX_{1,2} = 0,1, dY_{1,2} = 0,1$ – средние квадратические значения погрешности измерения координат изображений, выра-

женные в долях от линейного размера пиксела матричного анализатора (рассматривался квадратный пиксел размером $10 \times 10 \text{ мкм}^2$), $\Delta = 1^\circ$, $\eta = 132^\circ 8'$, $\chi = 63^\circ 44'$, $\varphi = 1^\circ 30'$. Исследования на математической модели показали, что вид полученных функций не зависит от значений этих параметров.

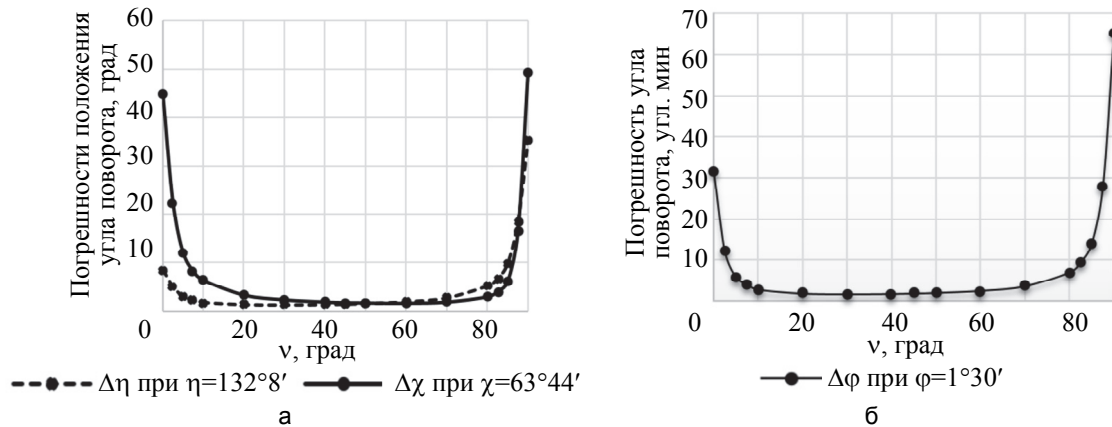


Рис. 4. Погрешности измерения положения оси (а) и угла поворота (б) для различных положений двух основных неизменных направлений

Как следует из полученных результатов, значение $\nu = 45^\circ$, соответствующее ортогональному расположению ОНН, оптимально по критерию уменьшения погрешности измерения параметров фактического поворота.

На втором этапе численного моделирования исследовались зависимости $\Delta\eta(\chi)$, $\Delta\chi(\chi)$ и $\Delta\varphi(\chi)$ погрешностей измерения от положения оси поворота относительно двух ОНН при $\nu = 45^\circ$ и $\eta = 0$ (рис. 3). В результате получено, что для $\chi \in [-90^\circ, 90^\circ]$ вид зависимостей аналогичен изображенным на рис. 4, и оптимальным является расположение оси поворота в плоскости расположения ОНН при $\chi = 0$.

Полученные зависимости позволяют синтезировать отражатель для автоколлимационных измерений поворотов относительно известной оси, оптимальный по критерию уменьшения погрешности измерения.

Синтез отражателей для измерения углового положения при наличии априорной информации о положении оси поворота

Во многих практических случаях приблизительно известно положение оси фактического поворота объекта. Например, при проведении высокоточных лабораторных экспериментов в случае задания основного поворота с помощью углоизмерительной подвижки и наличия относительно малых угловых деформаций ее вала относительно ортогональных осей или мониторинговых измерений деформаций валов или трубопроводов. Методика синтеза отражателя для автоколлимационных измерений при таком условии на первом этапе включает расчет его параметров, при которых реализуется взаимно-перпендикулярное расположение двух его ОНН.

В частности, для тетраэдрического отражателя соотношения между малыми величинами δ_{12} , δ_{23} , δ_{13} (рис. 1) имеют вид $\delta_{12} = \delta$, $\delta_{23} = k_2 \cdot \delta$, $\delta_{13} = k_3 \cdot \delta$, где k_2, k_3 – некоторые коэффициенты. Орты двух ОНН для последовательностей отражения пучка 2-1-3 и 1-2-3 от граней задаются следующим выражением [1]:

$$\mathbf{u}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2 + 1}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (k_2 + k_3) \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot (k_2 - k_3 \pm 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-k_2 + k_3 \pm 1) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где цифра в индексе определяет номер ортов ОНН; верхний знак в матрице соответствует орту первого ОНН, нижний – второго.

Из условия перпендикулярности ОНН получим соотношение

$$k_2^2 + k_3^2 - 1 = 0. \quad (9)$$

На втором этапе синтеза по соотношению (9) выбираются значения k_2 и k_3 , при которых биссекторная плоскость прямого угла, образованного ортами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ОНН наиболее близко расположена к приблизительно известному положению оси фактического поворота. Далее определяются начальные углы Ξ_3, Ξ_2, Ξ_1 , на которые в исходном положении необходимо последовательно повернуть тетраэдрический отражатель для того, чтобы ось фактического поворота совпала с биссектрисой прямого угла, образованного ОНН.

Для примера рассмотрим отражатель для автоколлимационных измерений деформаций угломестной оси поворота главного зеркала полноповоротного радиотелескопа в случае установки автоколлиматора снаружи на цапфе несущего подшипника [16]. Номинальное положение оси поворота главного зеркала на угол места в этом случае в системе координат автоколлиматора определяется углами $\chi = 45^\circ$, $\eta = 45^\circ$ (рис. 3). Для измерения угловых деформаций угломестной оси оптимальным является отражатель, у которого одно ОНН параллельно оси OZ , а второе расположено в плоскости XOY и составляет с осью OY угол 45° .

Пусть изначально одно из ОНН расположено в плоскости YOZ , что позволяет принять координату по оси OX равной нулю, и, в соответствии с (8), $k2 = -k3$. Тогда из условия (9) находим $k2 = \pm\sqrt{2}/2$, что определяет соответственно $k3 = \mp\sqrt{2}/2$. Чтобы сориентировать орты ОНН требуемым образом, необходимо последовательно повернуть тетраэдрический отражатель относительно исходного положения на некоторые начальные углы Ξ_3, Ξ_2, Ξ_1 относительно осей координат OZ, OY, OX . Величины этих начальных углов определяются парой систем из двух уравнений каждая:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \mathbf{M}_\Xi \cdot (\mathbf{u}_{x2,1} \quad \mathbf{u}_{y2,1} \quad \mathbf{u}_{z2,1})^T$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}^T = \mathbf{M}_\Xi \cdot (\mathbf{u}_{x2,1} \quad \mathbf{u}_{y2,1} \quad \mathbf{u}_{z2,1})^T, \tag{10}$$

где первые индексы в обозначении координат ортов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ соответствуют верхним знакам значений $k2, k3$ (в начальном положении орт \mathbf{u}_2 параллелен оси OZ), вторые индексы соответствуют нижним знакам значений коэффициентов (тогда в начальном положении $\mathbf{u}_1 \parallel OZ$); $\mathbf{M}_\Xi = \sigma_3 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$ – матрица поворота (матрицы (6) в разделе 4.1.23 [17] при замене $\Xi_1 = \psi, \Xi_2 = \theta, \Xi_3 = \varphi$).

Тогда в результате решения системы из двух уравнений, составляющих любую пару из (10), определяются требуемые углы поворотов $\Xi_1 = \arctg(3 - 2\sqrt{2}) (9^\circ 44')$, $\Xi_2 = 0$, $\Xi_3 = -45^\circ$.

Вследствие поворотов относительно исходного положения ось отражателя составляет с оптической осью объектива автоколлиматора угол $\Psi \approx 11^\circ$. Уменьшение эффективной отражающей поверхности не превышает 10% зависимости, представленной на рис. 2.25 в [18], что позволяет практически реализовать синтезированные отражатели.

Заключение

Установлено, что описание отраженных пучков при автоколлимационных измерениях угловых поворотов на основе метода кватернионов позволяет, в отличие от матричного метода, анализировать погрешности положения оси и угла фактического поворота объекта. По результатам численных экспериментов на кватернионной модели действия тетраэдрического отражателя найдено, что оптимальным по критерию уменьшения погрешности измерения является биссекторное расположение оси поворота относительно двух взаимно-перпендикулярных основных неизменных направлений отражателя. На основе найденных соотношений между углами тетраэдрического отражателя и углами параметров его начальной ориентации построена практическая методика синтеза, с использованием которой рассчитаны параметры тетраэдрического отражателя практической задачи автоколлимационных измерений углов поворота.

Литература

1. Джабиев А.Н., Коняхин И.А., Панков Э.Д. Автоколлимационные углоизмерительные средства мониторинга деформаций. СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2000. 198 с.
2. Грейм И.А. Зеркально-призмные системы. М.: Машиностроение, 1981. 125 с.
3. Бронштейн Ю.Л. Крупногабаритные зеркальные системы (контроль геометрии, юстировка). М.: ДПК Пресс, 2013. 480 с.
4. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела (кватернионное изложение). М.: МФТИ(ГУ), 2000. 64 с.
5. Голдобин Н.Н., Голдобина Л.А. Преемственность в развитии научных знаний: практическое применение кватернионов при решении инженерно-технических задач // Технико-технологические проблемы сервиса. 2013. № 2. С. 59–62.
6. Сивцов Г.П. Пространственные оптические системы. Новосибирск: СГГА, 2011. 331 с.
7. Коняхин И.А., Панков Э.Д. Трехкоординатные оптические и оптико-электронные угломеры: Справочник. М.: Недра, 1991. 224 с.
8. Kork G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for

References

1. Dzhabiev A.N., Konyakhin I.A., Pankov E.D. Autocollimation Angle Measuring Tools for Deformation Monitoring. St. Petersburg, SPbSIFMO(TU), 2000, 198 p.
2. Greim I.A. Zerkal'no-Prizmnyye Sistemy [Mirrored-Prism Systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981, 125 p.
3. Bronshtein Yu.L. Krupnogabaritnyye Zerkal'nyye Sistemy (Kontrol' Geometrii, Yustirovka) [Large Mirror Systems (Geometry Control, Adjusting)]. Moscow, DPK Press, 2013, 480 p.
4. Amel'kin N.I. Kinematics and Dynamics of Solid State Body (Quaternionic Statement). Moscow, MPTI Publ., 2000, 64 p.
5. Goldobin N.N., Goldobina L.A. Continuity in the development of scientific knowledge: practical application of quaternions in solving engineering problems. *Technico-Tehnologicheskies Problemy Servisa*, 2013, no. 2, pp. 59–62.
6. Sivtsov G.P. Prostranstvennyye Opticheskie Sistemy [Spatial Optical System]. Novosibirsk, SGGGA Publ., 2011, 331 p.
7. Konyakhin I.A., Pankov E.D. Three-Axis Optical and Optoelectronic Goniometers: Handbook. Moscow, Nedra Publ., 1991, 224 p. (In Russian)
8. Kork G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists

- Reference and Review. New York: Dover Publications, 2000. 1130 p.
9. Каратаев Е.А. Кватернионы и трехмерные повороты. Практический подход. М.: Апрель, 2000. 32 с.
 10. Erdogan M., Ozdemir M. On Eigenvalues of Split Quaternion Matrices // *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2013. V. 23. N 3. P. 615–623. doi: 10.1007/s00006-013-0391-7
 11. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
 12. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
 13. Побегайло А.П. Применение кватернион в компьютерной геометрии и графике. Минск: БГУ, 2010. 216 с.
 14. Коняхин И.А., Копылова Т.В. Трехкоординатный оптико-электронный автоколлиматор с увеличенной чувствительностью измерения угла скручивания // *Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО*. 2010. № 6(70). С. 9–12.
 15. Коняхин И.А., Тургалиева Т.В. Трехкоординатный цифровой автоколлиматор // *Оптический журнал*. 2013. Т. 80. № 12. С. 74–81.
 16. Konyakhin I.A., Kopylova T.V., Konyakhin A.I., Smekhov A.A. Optic-electronic systems for measurement the three-dimension angular deformation of axles at the millimeter wave range radiotelescope // *Proceedings of SPIE*. 2013. V. 8759. Art. 87593E. doi: 10.1117/12.2014605
 17. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 780 с.
 18. Vanderwerf D.F. *Applied Prismatic and Reflective Optics*. Bellingham: SPIE, 2010. 310 p. doi: 10.1117/3.867634
 - and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. New York, Dover Publications, 2000, 1130 p.
 9. Karataev E.A. *Kvaterniony i Trekhmernye Povoroty. Prakticheskii Podkhod* [Quaternions and 3D Rotations. Practical Approach]. Moscow, April Publ., 2000, 32 p.
 10. Erdogan M., Ozdemir M. On Eigenvalues of Split Quaternion Matrices. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2013, vol. 23, no. 3, pp. 615–623. doi: 10.1007/s00006-013-0391-7
 11. Branets V.N., Shmyglevskii I.P. *Primenenie Kvaternionov v Zadachakh Orientatsii Tverdogo Tela* [Application of Quaternions in Problems of Solid Body Orientation]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 320 p.
 12. Chelnokov Yu.N. *Kvaternionnye i Bikvaternionnye Modeli i Metody Mekhaniki Tverdogo Tela i ikh Prilozheniya. Geometriya i Kinematika Dvizheniya*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 512 p.
 13. Pobegailo A.P. *Primenenie Kvaternion v Komp'yuternoi Geometrii i Grafike* [Application of Quaternion in Computer Geometry and Graphics]. Minsk, BGU Publ., 2010, 216 p.
 14. Konyakhin I.A., Kopylova T.V. Three-axis optical-electronic autocollimator with increased sensitivity of the roll angle measuring. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2010, no. 6, pp. 9–12. (In Russian)
 15. Konyakhin I.A., Turgalieva T.V. Three-coordinate digital autocollimator. *Journal of Optical Technology*, 2013, vol. 80, no. 12, pp. 772–777. doi: 10.1364/JOT.80.000772
 16. Konyakhin I.A., Kopylova T.V., Konyakhin A.I., Smekhov A.A. Optic-electronic systems for measurement the three-dimension angular deformation of axles at the millimeter wave range radiotelescope. *Proceedings of SPIE*, 2013, vol. 8759, art. 87593E. doi: 10.1117/12.2014605
 17. Angot A. *Comlements de Mathematiques*. Paris, 1957.
 18. Vanderwerf D.F. *Applied Prismatic and Reflective Optics*. Bellingham, SPIE, 2010, 310 p. doi: 10.1117/3.867634

Авторы

Коняхин Игорь Алексеевич – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, igor@grv.ifmo.ru

Хоанг Ван Фонг – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, vanphongkqh@yahoo.com

Authors

Igor A. Konyakhin – D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, igor@grv.ifmo.ru

Hoang Van Phong – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, vanphongkqh@yahoo.com