



УДК 534.1, 681.5, 531/534

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

А.С. Алышев<sup>a,b</sup>, В.Г. Мельников<sup>a</sup>, Г.И. Мельников<sup>a</sup><sup>a</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация<sup>b</sup> ЗАО Навис, Санкт-Петербург, 199106, Российская ФедерацияАдрес для переписки: [melnikov@mail.ifmo.ru](mailto:melnikov@mail.ifmo.ru)

### Информация о статье

Поступила в редакцию 16.06.16, принята к печати 28.07.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-928-935

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Алышев А.С., Мельников В.Г., Мельников Г.И. Идентификация момента инерции маятниковой системы в условиях вязкого трения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 5. С. 928–935. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-928-935

### Аннотация

Предлагается метод идентификации осевого момента инерции тела на маятниковой системе на реверсивно-симметричных вращательных движениях на примере маятника Шмидта с вязким трением в подшипниках. Используемое тестирующее движение системы состоит из свободного замедленного замеряемого вращательного движения на угловом интервале и обратного ускоренного симметричного управляемого движения на том же угловом интервале. Маятник состоит из стержня с закрепленным на конце маломощным управляемым электродвигателем постоянного тока с маховиком, ось вращения которого параллельна оси вращения маятника. Углы поворота и угловая скорость измеряются энкодерами. Используется энергетический метод и управление, заключающееся в изменении режима работы электродвигателя при помощи маховика. Получена расчетная формула для момента инерции тестирующего тела и математическая модель системы с робастным законом управления электродвигателем. Симметричность двух движений обеспечивается неравномерным управляемым вращением маховика. В результате исключается влияние диссипативных факторов на измерение. Проведенное моделирование динамики маятниковой системы подтверждает высокую точность метода. Результаты могут быть использованы для идентификации инерционных параметров сложных механических систем в условиях действия сопротивления среды, диссипативных и других сил.

### Ключевые слова

идентификация моментов инерции, энергетический метод, реверсивно-симметричные движения, эталонная модель, маятник Шмидта

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-08-00997.

## IDENTIFICATION METHOD FOR PENDULUM SYSTEM MOMENT OF INERTIA WITH VISCOUS DAMPING

A.S. Alyshev<sup>a,b</sup>, V.G. Melnikov<sup>a</sup>, G.I. Melnikov<sup>a</sup><sup>a</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation<sup>b</sup> Navis Engineering, Saint Petersburg, 199106, Russian FederationCorresponding author: [melnikov@mail.ifmo.ru](mailto:melnikov@mail.ifmo.ru)

### Article info

Received 16.06.16, accepted 28.07.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-928-935

Article in Russian

**For citation:** Alyshev A.S., Melnikov V.G., Melnikov G.I. Identification method for pendulum system moment of inertia with viscous damping. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 5, pp. 928–935. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-928-935

### Abstract

The paper proposes a method for identification of axial moment of inertia of the mechanical system called reaction wheel pendulum with a viscous friction in the bearings of the suspension. The method is based on the reversible symmetric motions. Pendulum system motion includes a free measured motion and reverse symmetrical motion at the same angular interval. The pendulum includes a rod with a low-power DC motor with a flywheel attached to the end of the rod. The angle of rotation and velocity of the rod and the flywheel are measured by encoders. The paper introduces a new method, presents a design

formula, a mathematical model of the pendulum system and a robust motor control law for it. The method is based on energy algorithm and control residing in electric motor operational changes by means of a flywheel. The mechanical system moves symmetrically that is provided by nonuniform controlled flywheel rotation. As a result, the influence of dissipative factors on identification results is eliminated. Dynamic modeling is carried out for the pendulum system and proves high accuracy of the method. The research results can be used for identification of complex mechanical systems under the action of resistance, dissipative and other forces.

#### Keywords

moment of inertia identification, energy method, reversible-symmetric motions, reference model, reaction wheel pendulum

#### Acknowledgements

This work was supported by the RFBR Grant 16-08-00997.

### Введение

Точная идентификация моментов инерции сложных твердотельных систем, работающих в условиях трения и сопротивления среды, является актуальной проблемой механики и теории управления. Знание точных значений моментов инерции деталей сложной формы особенно важно в робототехнике [1]. Можно оценить инерционные свойства теоретически, используя метод конечных элементов, но в большинстве практических случаев точная модель тела отсутствует, причем создание такой модели занимает достаточно много времени, поэтому инерционные свойства оцениваются с использованием экспериментальных данных. Существуют методы временной и частотной области [2]. К временным методам относится метод маятника, когда инерционные свойства подвешенного тела определяют по периоду колебаний или различными его модификациями [3]. Несмотря на то, что этот метод широко применяется, он не является точным из-за влияния трения, сопротивления воздуха и лишней массы. К частотным методам относятся IRM, DPPIM, Modal Methods и др. [4, 5]. В основном такие методы основаны на измерении отклика твердого тела на возбуждающее воздействие в различных точках и направлениях, использовании квазисвободных, деформируемых конструкций, содержащих мультифилярные и торсионные подвесы, платформы Стюарта и другие модели [6–8]. Мультифилярные подвесы вносят значительную погрешность в результат измерения из-за непредусмотренного дополнительного раскачивания в различных направлениях и требуют достаточно точной калибровки и времени для подготовки испытания. На основе анализа движения определяются инерционные параметры тела рекурсивным методом наименьших квадратов [9–11].

### Постановка задачи и применяемый метод

Перспективным точным методом является энергетический метод [12–18], основанный на применении двухэтапного реверсивно-симметричного движения (либо пары противонаправленных движений), содержащего два движения с одинаковой диссипацией энергии с замерами текущего расхода электроэнергии. Покажем основные особенности предложенного метода на двухзвенном маятниковом устройстве. Рассмотрим маятник Шмидта, вращающийся вокруг горизонтальной неподвижной оси  $O$  в плоскости  $OXY$ , состоящий из стержня с закрепленным на его конце двигателем постоянного тока с однородным маховиком в виде диска [19]. Общий вид устройства представлен на рис. 1. Показаны обобщенные координаты ( $q_1$  – абсолютный угол отклоненного стержня и  $q_2$  – угол поворота маховика, отсчитываемый от стержня),  $\dot{q}_1$  – угловая скорость стержня и  $\dot{q}_2$  – угловая скорость маховика. Считаем известными положения центров масс  $C_1$  первого звена, состоящего из стержня и закрепленного на нем статора двигателя, и  $C_2$  второго звена, состоящего из ротора и маховика. Осевой момент инерции  $J_2$  второго звена считаем известным. Заданы силы тяжести звеньев:  $G_1 = m_1 g$ ,  $G_2 = m_2 g$ . Обозначим  $M_1^d$  – неизвестный момент сил вязкого трения в подшипнике опоры;  $M_2^d$  – момент трения в подшипниках двигателя;  $M_2$  – управляющий момент двигателя;  $OC_1 = l_1$  и  $OC_2 = l_2$  – расстояния до оси подвеса от центра масс первого и второго звена;  $C_2$  – подвижная ось вращения маховика.

Оси вращения звеньев горизонтальны. Ставится задача – определить осевой момент инерции  $J_1$  первого звена на следующей паре движений: свободного неуправляемого замедленного замеряемого движения маятника на угловом интервале  $q_{11} \leq q_1 \leq q_{12}$ , выполненного после предварительного свободного разгона в условиях малого трения, и обратного программного симметричного движения на том же угловом интервале с небольшой коррекцией управляемым электродвигателем, снабженным маховиком. Углы поворота, угловые скорости маховика и маятника измеряются энкодерами. Отметим, что допускается использование электродвигателя и на первом этапе движения с целью частичной компенсации диссипативного момента. В этом случае уменьшается расход электроэнергии по корректировке движения на обратном движении.

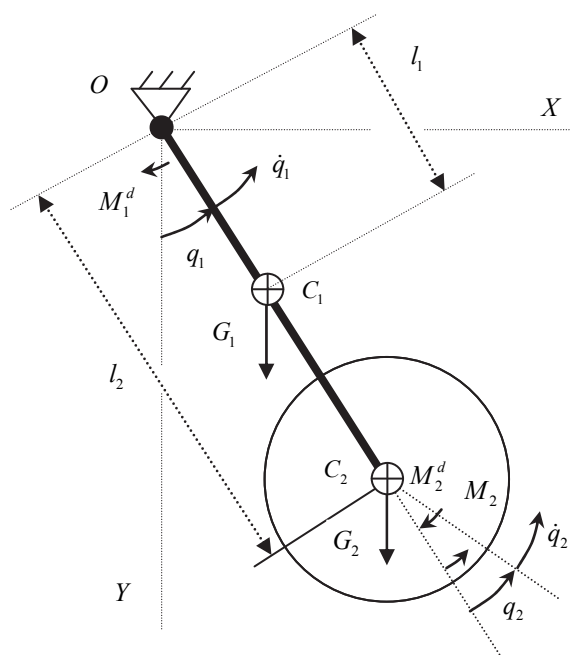


Рис. 1. Маятник Шмидта

### Энергетический метод и расчетная формула для определения момента инерции

В рассматриваемой системе мощность инерционных сил изменяет знак при переходе на обратное движение, в отличие от всегда отрицательной мощности диссипативных сил. Это обстоятельство приводит к аналитическому отделению расчетных формул для инерционных сил от формул для диссипативных сил. Применяя теорему об изменении кинетической энергии на двух движениях, получаем два уравнения:

$$(T_{12} + \Pi_{12}) - (T_{11} + \Pi_{11}) = \eta A_1 + B_1; \quad (1)$$

$$(T_{22} + \Pi_{22}) - (T_{21} + \Pi_{21}) = \eta A_2 + B_2. \quad (2)$$

Здесь  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$ ,  $T_{22}$  и  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$ ,  $\Pi_{21}$ ,  $\Pi_{22}$  – узловые значения кинетической и потенциальной энергии системы;  $A_1$  и  $A_2$  – затраченные (полные) работы двигателя на выбранном угловом интервале  $[q_{11} \quad q_{12}]$  на прямом и обратном движении, равные расходам электроэнергии;  $B_1$  и  $B_2$  – работы сил трения в подшипнике  $O$  на этих движениях;  $\eta$  – коэффициент полезного действия двигателя.

Потенциальные энергии системы в одних угловых положениях равны  $\Pi_{11} = \Pi_{22} \equiv \Pi_1$  и  $\Pi_{12} = \Pi_{21} \equiv \Pi_2$ .

Считаем, что работы сил трения на симметричных этапах движения равны между собой  $B_1 = B_2 < 0$ . Пусть первое движение выполняется при отключенном двигателе  $A_1 = 0$ . Вычитая почленно уравнение (2) из (1) получим уравнение энергии, не содержащее диссипативных сил:

$$T_{12} - T_{11} + T_{21} - T_{22} = 2 \Pi_1 - 2 \Pi_2 - A_2 \eta. \quad (3)$$

Уравнение (3) содержит только узловые значения кинетических и потенциальных энергий и расход электроэнергии на обратном движении в угловом интервале  $[q_{12} \quad q_{11}]$ .

Имеем выражения для кинетических и потенциальных энергий:

$$\begin{aligned} 2T_{11} &= a_{11} \dot{q}_{11}^2, \quad 2T_{12} = a_{11} \dot{q}_{12}^2, \\ 2T_{21} &= 2a_{12} \dot{q}'_{11} \dot{q}_{21} + a_{22} \dot{q}_{21}^2 + a_{11} \dot{q}'_{11}{}^2, \\ 2T_{22} &= 2a_{12} \dot{q}'_{12} \dot{q}_{22} + a_{22} \dot{q}_{22}^2 + a_{11} \dot{q}'_{12}{}^2, \\ \Pi_1 &= (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos q_{11}, \quad \Pi_2 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos q_{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_{11} = J_1 + m_1 l_1^2 + J_2 + m_2 l_2^2$ ;  $a_{22} = a_{12} = J_2$ ;  $m_1$  и  $m_2$  – массы первого и второго звена;  $\dot{q}_{21}$  и  $\dot{q}_{22}$  – угловые скорости маховика в начале и конце обратного движения на рассматриваемом угловом интервале соответственно.

Ввиду симметричности двух движений значения угловой скорости маятника в начале первого  $\dot{q}_{11}$  и в конце второго  $\dot{q}'_{12}$  этапов движения равны  $\dot{q}_{11} = \dot{q}'_{12}$ , а также равны значения скорости маятника в конце первого и начале второго  $\dot{q}_{12} = \dot{q}'_{11}$  этапов движения. Подставляя выражения (4) в (3) и группируя слагаемые, получим расчетную формулу для вычисления момента инерции  $J_1$  первого звена системы:

$$J_1 = \frac{J_2(2\dot{q}_{12}\dot{q}_{21} - 2\dot{q}_{11}\dot{q}_{22} + \dot{q}_{21}^2 - \dot{q}_{22}^2) + 2b_1(\dot{q}_{12}^2 - \dot{q}_{11}^2) + 4b_2(\cos q_{12} - \cos q_{11}) + 2A_2\eta}{2(\dot{q}_{11}^2 - \dot{q}_{12}^2)} \quad (5)$$

при  $b_1 = J_2 + l_1^2 m_1 + l_2^2 m_2$ ,  $b_2 = g(l_1 m_1 + l_2 m_2)$ .

### Математическая модель системы

Математическую модель устройства представим в виде системы двух дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$(J_1 + m_1 l_1^2 + J_2 + m_2 l_2^2) \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 = -(G_1 l_1 + G_2 l_2) \sin q_1 - M_1^d,$$

$$J_2 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 = M_2 - M_2^d$$

или

$$\ddot{q}_1 = (a_{11} - a_{22})^{-1} (-M_1^d + M_2^d - M_2 - (G_1 l_1 + G_2 l_2) \sin q_1),$$

$$\ddot{q}_2 = (a_{22} (a_{11} - a_{22}))^{-1} (a_{11} M_2 - a_{11} M_2^d + a_{22} M_1^d + a_{22} (G_1 l_1 + G_2 l_2) \sin q_1). \quad (6)$$

Пренебрегая индуктивностью якоря, считаем, что управляющий момент двигателя  $M_2$  является линейной функцией от угловой скорости ротора:  $M_2 = c_1 u - c_2 \dot{q}_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  – коэффициенты модели двигателя,  $u$  – управляющее напряжение.

Предполагаем, что в подшипниках действуют моменты вязкого трения вида  $M_1^d = f_1 \dot{q}_1$ ,  $M_2^d = f_2 \dot{q}_2$  с коэффициентами  $f_1$  и  $f_2$ .

Динамическая система (6) в обозначениях  $x^1 = \dot{q}_1$ ,  $x^2 = \dot{q}_2$ ,  $x^3 = q_1$ ,  $x^4 = q_2$  преобразуется в следующую форму Коши:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 \sin x_3 + \alpha_3 x_2 - \alpha_4 u,$$

$$\dot{x}_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \sin x_3 - \alpha_5 x_2 + \alpha_6 u, \quad (7)$$

$$\dot{x}_3 = x_1,$$

$$\dot{x}_4 = x_2.$$

Здесь  $\alpha_1 = (a_{11} - a_{22})^{-1} f_1$ ,  $\alpha_2 = (a_{11} - a_{22})^{-1} (G_1 l_1 + G_2 l_2)$ ,  $\alpha_3 = (a_{11} - a_{22})^{-1} (f_2 + c_2)$ ,  $\alpha_4 = c_1 (a_{11} - a_{22})^{-1}$ ,  $\alpha_5 = a_{11} a_{22}^{-1} (a_{11} - a_{22})^{-1} (f_2 + c_2)$ ,  $\alpha_6 = c_1 a_{11} a_{22}^{-1} (a_{11} - a_{22})^{-1}$ .

Рассмотрим прямое замеряемое неуправляемое движение системы из отклоненного положения, соответствующего начальным условиям  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ ,  $x_4(0) = 0$ , где  $x_{10}$  – угол начального отклонения маятника.

Пусть на прямом движении до остановки методом точечной аппроксимации из набора дискретных измерений угла поворота системы получено уравнение торможения  $x_1(t) = f(t)$  при  $t \in [t_0 \ t_1]$ . Тогда уравнение обратного симметричного движения есть  $f(t')$  при  $t' \in [t_2 \ t_3] = [2t^* - t_1 \ 2t^* - t_0]$ , где  $t^*$  – время остановки маятника и перехода на обратное симметричное движение.

Тестирующие движения рекомендуется повторить несколько раз для усреднения полученных результатов. Начальное отклонение маятнику может быть придано вручную либо дополнительным отклоняющим устройством. Перевод маятника из нижнего в желаемое начальное угловое положение при помощи предварительного раскачивания установленным на нем двигателем с маховиком может быть осуществлен на основе метода скоростного градиента, представленного в работах [20, 21], либо методом поиска резонанса, когда предварительно на свободных колебаниях определяется собственная частота маятника, после чего осуществляются его вынужденные колебания двигателем до нужной амплитуды на резонансной частоте [22, 23].

### Система управления

Синтез регулятора для системы (7), обеспечивающего симметричность колебаний маятника в условиях действия неизвестного вязкого трения в подвесе проведем с использованием робастного подхода, развитого в работах [24–26], где при помощи эталонной модели решается задача стабилизации неустой-

чивого объекта с неизвестными параметрами и слежения за ограниченным задающим воздействием с компенсацией ограниченных возмущений с заданной точностью [27].

Построим систему слежения для рассматриваемой динамической нелинейной системы  $y(t') = x_3(t')$  за эталонным ограниченным сигналом  $y_m(t) = f(t)$ , где целевое условие имеет вид  $|y(t') - y_m(t)| < \delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $t' > T$ ,  $T > 0$ .

Составим уравнение для ошибки слежения  $e = y - y_m$  и сформируем управление  $u$  в виде  $u = \gamma_1 v$ . Возьмем вспомогательный контур, динамические процессы в котором описываются уравнением  $Q(p)e_v = \gamma_2 v$ , где  $e_v$  – скалярный выход вспомогательного контура,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – настраиваемые параметры. Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2, k_3$  полинома  $Q(p)$  выберем таким образом, чтобы полином  $Q(\lambda)$  был гурвицевым,  $\lambda$  – комплексная переменная в преобразовании Лапласа.

Составим уравнение для сигнала рассогласования:  $\zeta = e - e_v$ . После преобразования получим  $Q(p)\zeta = \psi(x, \alpha, y_m(t), t')$ , где  $\psi(x, \alpha, y_m(t), t')$  – обобщенное возмущение.

Закон управления, позволяющий скомпенсировать влияние возмущений на регулируемую переменную, имеет следующий вид:

$$v = -\frac{1}{\gamma_2} (k_3 p^3 + k_2 p^2 + k_1 p + k_0) \zeta.$$

Здесь коэффициенты полинома  $Q(p)$  записаны в обратном порядке.

Введем векторы:

$$\xi_0 = [\zeta, p\zeta, p^2\zeta, p^3\zeta]^T, \quad \xi = [\bar{\zeta}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]^T,$$

где  $\bar{\zeta}(t')$ ,  $\zeta_i(t')$  – оценки сигнала  $\zeta(t')$  и его производных,  $p$  – оператор дифференцирования.

Сформируем управляющее воздействие  $v(t')$  в виде

$$v = -\frac{1}{\gamma_2} [k_3 \quad k_2 \quad k_1 \quad k_0]^T \xi. \quad (8)$$

Оценки производных будем получать с помощью наблюдателя, математическая модель которого имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \Gamma_0 \xi + d_0 (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \dot{\bar{\zeta}} &= L \xi, \\ \Gamma_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d_0 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{bmatrix}, \quad L = [1 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned} \quad (9)$$

Числа  $d_1, d_2, d_3$  выбираются так, чтобы матрица  $\Gamma = \Gamma_0 + [d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T L$  была гурвицевой.

### Моделирование системы управления

Произведем моделирование системы управления (8) с наблюдателем (9) со значениями параметров  $m_1=1$  кг,  $m_2=0,25$  кг,  $l_1=0,3$  м, кг,  $l_2=0,26$  м,  $J_1 = 2 \cdot 10^{-2}$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>,  $c_1 = 10^{-1}$  Н·м/В,  $c_2 = 10^{-2}$  Н·м·с,  $f_1 = 4,4 \cdot 10^{-2}$  Н·м,  $f_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$  Н·м,  $\eta = 0,8$ ,  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = 9$ ,  $k_2 = 12$ ,  $k_3 = 18$ ,  $d_1 = 9$ ,  $d_2 = 12$ ,  $d_3 = 8$ ,  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $p = 0,5$ ,  $x_{10} = 160^\circ$ . Результаты представлены на рис. 2.

Выбор значений  $\gamma_1, \gamma_2, p$  при моделировании производился для реализуемости закона управления при ограничении на напряжения двигателя 24 В. С использованием расчетной формулы (5) получено значение момента инерции  $J_1 = 2,0305 \cdot 10^{-2}$ . Погрешность идентификации в основном обусловлена ненулевой ошибкой слежения, которая составила не более 1,5°, и вязким трением в подшипниках двигателя.

### Заключение

В работе рассмотрена нелинейная математическая модель двухзвенной маятниковой динамической системы четвертой степени с двумя степенями свободы и алгоритмом робастного управления. Предложено тестирующее двухэтапное движение объекта с этапом произвольного замедленного вращения и управляемого обратного симметричного вращения, соединенные переходным движением. Предложен метод идентификации момента инерции на симметричных колебаниях. Момент инерции определяется по замерам расхода электроэнергии. Метод позволяет с высокой точностью исключить отрицатель-

ное влияние диссипативных факторов на измерение инерционных параметров. Результаты моделирования подтверждают применимость метода для определения момента инерции с высокой точностью и могут быть использованы для идентификации механических систем в условиях действия трения и сопротивления среды.

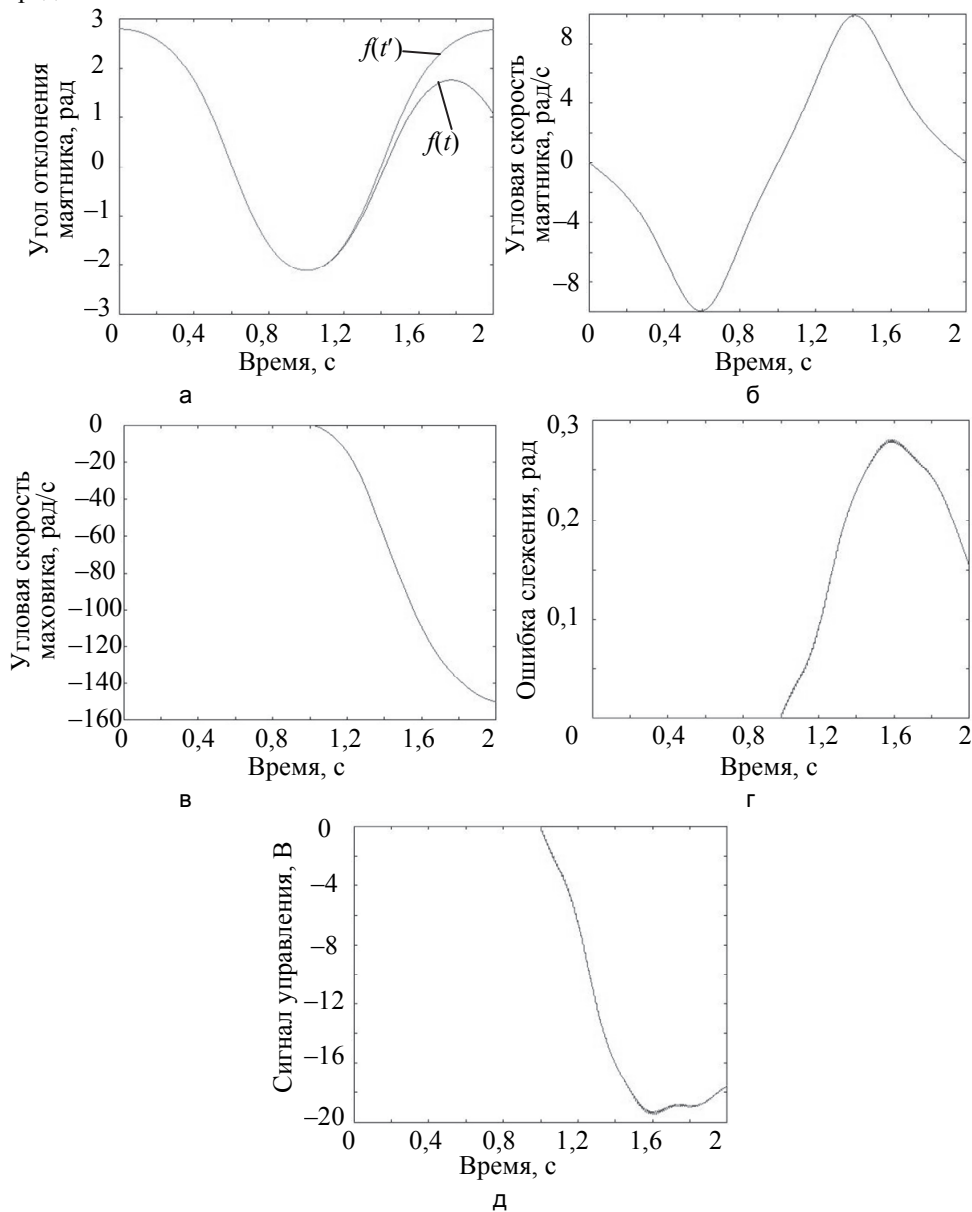


Рис. 2. Угол отклонения маятника (а), угловая скорость маятника (б), угловая скорость маховика (в), ошибка слежения (г), сигнал управления (д)

### Литература

1. Jamisola R.S., Dadios E.P. Identifying moments of inertia parameters for rigid-body manipulators // Proc. 13<sup>th</sup> Int. Conf. on Mechatronics Technology. Cebu City, Philippines, 2009.
2. Almeida R.A.B., Urgueira A.P.V., Maia N.M.M. Identification of rigid body properties from vibration measurements // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 299. N 4-5. P. 884–899. doi: 10.1016/j.jsv.2006.07.043
3. Pandit S.M., Hu Z., Yao Y. Experimental technique for accurate determination of rigid body characteristics // Proc. 10<sup>th</sup> Int. Modal Analysis Conference, IMAC. P. 307–311.
4. Арановский С.В., Александрова С.А., Ловлин С.Ю. Метод идентификации электромеханической системы при переменном моменте трения // Информационно-управляющие системы. 2012. № 1 (56). С. 8–11.
5. Almeida R.A.B., Urgueira A.P.V., Maia N.M.M. Evaluation of the performance of three different methods used in the

### References

1. Jamisola R.S., Dadios E.P. Identifying moments of inertia parameters for rigid-body manipulators. *Proc. 13<sup>th</sup> Int. Conf. on Mechatronics Technology*. Cebu City, Philippines, 2009.
2. Almeida R.A.B., Urgueira A.P.V., Maia N.M.M. Identification of rigid body properties from vibration measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 299, no. 4-5, pp. 884–899. doi: 10.1016/j.jsv.2006.07.043
3. Pandit S.M., Hu Z., Yao Y. Experimental technique for accurate determination of rigid body characteristics. *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Modal Analysis Conference, IMAC*, pp. 307–311.
4. Aranovskiy S.V., Aleksandrova S.A., Lovlin S.U. Identification method for the electromechanical system with the variable friction torque. *Information and Control Systems*, 2012, no. 1, pp. 8–11.
5. Almeida R.A.B., Urgueira A.P.V., Maia N.M.M. Evaluation of the performance of three different methods used in the

- identification of rigid body properties // *Shock and Vibration*, 2008, V. 15, N 3–4, P. 467–479.
6. Hou Z.-C., Lu Y.-N., Lao Y.-X., Liu D. A new trifilar pendulum approach to identify all inertia parameters of a rigid body or assembly // *Mechanism and Machine Theory*, 2009, V. 44, N 6, P. 1270–1280. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2008.07.004
  7. Barreto J., Munoz L. Inertia parameter identification using a Stewart platform // *Proc. 41<sup>st</sup> Int. Symposium on Robotics*. Munich, Germany, 2010, V. 2, P. 765–772.
  8. Malekjafarian A., Ashory M.R., Khatibi M.M., Saberlatibari M. Rigid body stiffness matrix for identification of inertia properties from output-only data // *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2016, V. 59, P. 85–94. doi: 10.1016/j.euromechsol.2016.03.009
  9. Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Stabilization of reaction wheel pendulum on movable support with on-line identification of unknown parameters // *Proc. 4<sup>th</sup> Int. Conf. Physics and Control*. Catania, Italy, 2009.
  10. Gobbi M., Mastinu G., Prevati G. A method for measuring the inertia properties of rigid bodies // *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, V. 25, N 1, P. 305–318. doi: 10.1016/j.ymsp.2010.09.004
  11. Garcia-Alarcon O., Puga-Guzman S., Moreno-Valenzuela J. On parameter identification of the Furuta pendulum // *Procedia Engineering*, 2012, V. 35, P. 1–8. doi: 10.1016/j.proeng.2012.04.167
  12. Мельников В.Г. Энергетический метод параметрической идентификации тензоров инерции тел // *Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО*, 2010, №1, С. 59–63.
  13. Мельников В.Г., Кравчук Р.Ю., Мельников Г.И., Шаховал С.Н. Идентификация тензора инерции тела на реверсивно-симметричных прецессиях в ограниченном угловом интервале // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2012, № 1(77), С. 153–154.
  14. Мельников В.Г. Идентификация компонент тензора инерции и координат центра масс тела на реверсивно-симметричных прецессиях // *Вестник СПбГУ. Сер.1. Математика, механика и астрономия*, 2010, № 3, С. 97–104.
  15. Melnikov G.I., Dudarenko N.A., Melnikov V.G., Alyshev A.S. Parametric identification of inertial parameters // *Applied Mathematical Sciences*, 2015, V. 9, N 136, P. 6757–6765. doi: 10.12988/ams.2015.59584
  16. Melnikov V.G. A new method for inertia tensor and center of gravity identification // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2005, V. 63, N 5-7, P. e1377–e1382. doi: 10.1016/j.na.2005.02.001
  17. Melnikov V.G. Inertia tensors and centres of masses identification at semiprogram precession motions // *Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications*. Dubrovnik, Croatia, 2012, P. 494–497. doi: 10.1109/CCA.2012.6402471
  18. Dudarenko N.A., Melnikov V.G., Melnikov G.I. A method for inertia tensors and centres of masses identification on symmetric precessions // *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. St. Petersburg, Russia, 2015, V. 1, P. 596–601. doi: 10.1109/ICUMT.2014.7002168
  19. Block D.J., Astrom K.J., Spong M.W. *The Reaction Wheel Pendulum*. San Rafael, Morgan & Claypool Publ., 2007.
  20. Колобин С.А., Пыркин А.А. Адаптивное гибридное управление маятником Шмидта на нестационарном основании с компенсацией трения // XIII конференция молодых ученых "Навигация и управление движением". Санкт-Петербург, 2011.
  21. Андриевский Б.Р. Стабилизация перевернутого маятника с инерционным маховиком в качестве движителя / В сб. *Управление в физико-технических системах*. Под ред. А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2004, С. 52–71.
  22. Иванов С.Е. Определение установившихся режимов работы виброзащитной системы с двумя степенями свободы // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2010, № 4 (68), С. 44–46.
  23. Косяков Е.А., Тихонов А.А. О резонансах, порожденных моментом лоренцевых сил, в колебаниях спутника // *Материалы III международной конференции Устойчивость и процессы управления*. СПб., 2015, С. 129–130.
  24. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с identification of rigid body properties. *Shock and Vibration*, 2008, vol. 15, no. 3–4, pp. 467–479.
  6. Hou Z.-C., Lu Y.-N., Lao Y.-X., Liu D. A new trifilar pendulum approach to identify all inertia parameters of a rigid body or assembly. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, vol. 44, no. 6, P. 1270–1280. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2008.07.004
  7. Barreto J., Munoz L. Inertia parameter identification using a Stewart platform. *Proc. 41<sup>st</sup> Int. Symposium on Robotics*. Munich, Germany, 2010, vol. 2, pp. 765–772.
  8. Malekjafarian A., Ashory M.R., Khatibi M.M., Saberlatibari M. Rigid body stiffness matrix for identification of inertia properties from output-only data. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2016, vol. 59, pp. 85–94. doi: 10.1016/j.euromechsol.2016.03.009
  9. Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Stabilization of reaction wheel pendulum on movable support with on-line identification of unknown parameters. *Proc. 4<sup>th</sup> Int. Conf. Physics and Control*. Catania, Italy, 2009.
  10. Gobbi M., Mastinu G., Prevati G. A method for measuring the inertia properties of rigid bodies // *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, vol. 25, no. 1, pp. 305–318. doi: 10.1016/j.ymsp.2010.09.004
  11. Garcia-Alarcon O., Puga-Guzman S., Moreno-Valenzuela J. On parameter identification of the Furuta pendulum. *Procedia Engineering*, 2012, vol. 35, pp. 1–8. doi: 10.1016/j.proeng.2012.04.167
  12. Melnikov V.G. An energy method for parametrical identification of object inertia tensors. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2010, no. 1, pp. 59–63. (In Russian)
  13. Mel'nikov V.G., Kravchuk R.Yu., Mel'nikov G.I., Shakhovall S.N. Inertia tensor identification on reverse-symmetric motions in a finite angular range. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 1, pp. 153–154. (In Russian)
  14. Melnikov V.G. Inertia tensor matrixes and centres of weights identification on reverse-sively symmetric precession motions. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2010, no. 3, pp. 97–104. (In Russian)
  15. Melnikov G.I., Dudarenko N.A., Melnikov V.G., Alyshev A.S. Parametric identification of inertial parameters. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 136, pp. 6757–6765. doi: 10.12988/ams.2015.59584
  16. Melnikov V.G. A new method for inertia tensor and center of gravity identification. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2005, vol. 63, no. 5-7, pp. e1377–e1382. doi: 10.1016/j.na.2005.02.001
  17. Melnikov V.G. Inertia tensors and centres of masses identification at semiprogram precession motions. *Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications*. Dubrovnik, Croatia, 2012, pp. 494–497. doi: 10.1109/CCA.2012.6402471
  18. Dudarenko N.A., Melnikov V.G., Melnikov G.I. A method for inertia tensors and centres of masses identification on symmetric precessions. *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. St. Petersburg, Russia, 2015, vol. 1, pp. 596–601. doi: 10.1109/ICUMT.2014.7002168
  19. Block D.J., Astrom K.J., Spong M.W. *The Reaction Wheel Pendulum*. San Rafael, Morgan & Claypool Publ., 2007.
  20. Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Adaptive hybrid control of Schmidt pendulum on unsteady base with friction compensation. *Proc. XIII Conf. on Navigation and Motion Control*. St. Petersburg, Russia, 2011. (In Russian)
  21. Andrievskii B.R. Stabilization of the inverted pendulum with inertial flywheel as an engine. In: *Upravlenie v Fiziko-Tekhnicheskikh Sistemakh* [Control in Physical and Technical Systems]. Ed. A.L. Fradkov. St. Petersburg, Nauka Publ., 2004, pp. 52–71.
  22. Ivanov S.E. Definition of the steady state vibration isolation systems with two degrees of freedom. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2010, no. 4, pp. 44–46. (In Russian)
  23. Kosyakov E.A., Tikhonov A.A. On resonances generated by torque of Lorentz forces in the satellite vibrations. *Proc. III Int. Conf. on Stability and Control Processes*. St. Petersburg, 2015, pp. 129–130. (In Russian)

- компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003. 282 с.
25. Цыкунов А.М. Робастное управление нелинейным объектом по выходу // Проблемы управления. 2010. №5. С. 15–21.
26. Фуртат И.Б., Тупичин Е.А. Упрощенный алгоритм бэкстеппинга для управления нелинейными системами // Известия вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 3. С. 173–178. doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-173-178
27. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: Физматлит, 2012. 300 с.
24. Nikiforov V.O. *Adaptivnoe i Robastnoe Upravlenie s Kompensatsiei Vozmushchenii* [Adaptive and Robust Control with Perturbations Compensation]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2003, 282 p.
25. Tsykunov A.M. Robust Control of nonlinear plant by output. *Control Science*, 2010, no. 5, pp. 15–21. (In Russian)
26. Furtat I.B., Tupichin E.A. Simplified backstepping algorithm for control of nonlinear systems. *Journal of Instrument Engineering*, 2015, vol. 58, no. 3, pp. 173–178. doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-173-178
27. Tsykunov A.M. *Robastnoe Upravlenie s Kompensatsiei Vozmushchenii* [Robust Control with Perturbations Compensation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 300 p.

### Авторы

**Алышев Александр Сергеевич** – ассистент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; инженер, ЗАО Навис, Санкт-Петербург, 199106, Российская Федерация, aalyshev@yandex.ru

**Мельников Виталий Геннадьевич** – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, melnikov@mail.ifmo.ru

**Мельников Геннадий Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, melnikov@mail.ifmo.ru

### Authors

**Alexander S. Alyshev** – assistant, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; engineer, Navis Engineering, Saint Petersburg, 199106, Russian Federation, aalyshev@yandex.ru

**Vitaly G. Melnikov** – D.Sc., Associate professor, Head of Chair, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, melnikov@mail.ifmo.ru

**Gennady I. Melnikov** – D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, melnikov@mail.ifmo.ru