

УДК 532.22

РЕЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ  
ЗАПЫЛЕННОГО ГАЗА

Р.С. Савельев, Н.Н. Розанов, Г.Б. Сочилин, С.А. Чивилихин

Исследована неустойчивость границы раздела в системе «газ+пыль». Получено решение дисперсионного уравнения, связывающего волновые числа возмущений со скоростью их развития во времени. Показано, что уменьшение плотности пыли, как и увеличение размера пылинок, уменьшает скорость развития неустойчивости. Показано, что вязкость газа уменьшает скорость роста возмущений с большими волновыми числами.

**Ключевые слова:** неустойчивость Релея–Тейлора, седиментация, дисперсионное уравнение, вязкость.

## Введение

Задача о неустойчивости границы раздела двух жидкостей, имеющих разные плотности, в поле сил тяжести, впервые была рассмотрена Тейлором [1], а позже Беллманом и Пеннингтоном [2], которые учли дополнительно такие факторы, как вязкость и поверхностное натяжение. Неустойчивость возникает в случае, когда жидкость, находящаяся сверху, имеет большую плотность. Помимо гидро- и газодинамики, релей-тейлоровская неустойчивость наблюдается также в широком круге задач астрофизики, физики плазмы, электро- и магнитогидродинамики [3, 4] и наногидродинамики [5].

В настоящей работе исследуется задача о неустойчивости границы раздела в системе «газ + пыль», находящейся в поле силы тяжести. Как показывают некоторые экспериментальные и теоретические данные, в процессе седиментации, на границе раздела «чистой» жидкости (газа) и дисперсной системы, возникает неустойчивость, аналогичная релей-тейлоровской [6–8].

В работе [6] было исследовано развитие во времени границы раздела глицерина и суспензии – частиц песка, распределенных в глицерине. Экспериментальные данные показали наличие в исследуемой системе неустойчивости, подобной релей-тейлоровской. Пространственный Фурье-спектр границы раздела показал ограниченность показателя роста начальных возмущений и существование моды с максимальным показателем роста. Для теоретического описания была применена модель однородной жидкости с плотностью и вязкостью как функций вертикальной координаты. В работах [7, 8] были проведены соответственно двухмерное и трехмерное моделирование вышеуказанного явления. Рассматриваемая система была ограничена сбоку стенками. Конечное количество членов в ряде Фурье дает приближенное решение с точностью до характерного размера сглаживания.

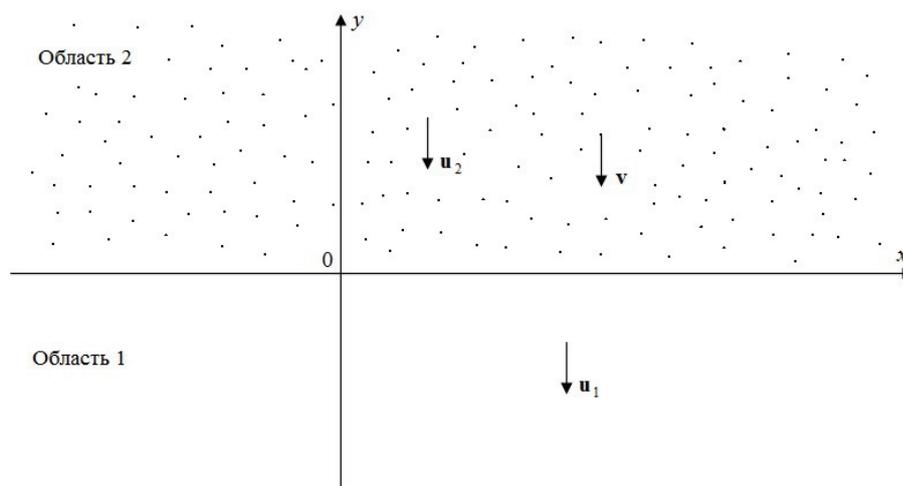


Рис. 1. Схема задачи. Сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси  $y$ . В области 1 ( $y < 0$ ) находится газ, его скорость  $u_1$ , в области 2 – пыль (скорость  $v$ ) и газ (скорость  $u_2$ )

В работе будем рассматривать модель не ограниченной в горизонтальном направлении системы двух взаимодействующих сред – газа и пыли. Считаем, что верхнее полупространство занято пылью и газом, нижнее – только газом (рис. 1). Начало координат находится на нижней границе области с пылью. Размеры частиц пыли считаются пренебрежимо малыми, что позволяет рассматривать массу пыли как сплошную среду, описываемую уравнениями Эйлера и неразрывности. В такой постановке задача

становится схожей с задачей о неустойчивости Релея–Тейлора, в которой дестабилизация границы раздела неизбежна. Целью работы будет доказательство возникновения неустойчивости и отыскание дисперсионного уравнения, связывающего волновые числа возмущений со скоростью их развития во времени.

### Основные уравнения

Основными уравнениями, описывающими движение жидкости (газа) являются уравнение Навье–Стокса и уравнение неразрывности [9]. Пыль, «падающая» в газе, рассматривается как сжимаемая сплошная среда, для которой выполняются уравнения Эйлера и неразрывности [9]. Будем полагать, что газ несжимаем, а частицы пыли не взаимодействуют между собой (их концентрация невелика). Если считать частицы пыли одинаковыми шарами, имеющими малые, но конечные размеры, а скорость пыли относительно газа достаточно малой, то сила трения, действующая на «элемент объема» пыли, равна

$$\mathbf{F} = \alpha \rho_1 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}), \quad (1)$$

где  $\rho_1$  – плотность пылинок (концентрация пылинок, умноженная на массу одной пылинки);

$\alpha = \frac{9}{2} \frac{\eta}{r^2 \rho_d}$  – параметр;  $r$  – радиус пылинки;  $\eta$  – вязкость жидкости;  $\rho_d$  – плотность вещества пыли. Эта

сила действует также со стороны частиц пыли на газ и поэтому должна быть добавлена в соответствующие уравнения для газа и для пыли. Уравнения, описывающие данную систему, выглядят тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) \rho_1 &= \rho_1 \mathbf{g} + \rho_1 \alpha (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}) &= 0; \\ \left( \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \nabla) \mathbf{u}_2 \right) \rho &= \rho \mathbf{g} + \rho_1 \alpha (\mathbf{v} - \mathbf{u}_2) - \nabla p_2 + \eta \Delta \mathbf{u}_2, \\ \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1 \right) \rho &= \rho \mathbf{g} - \nabla p_1 + \eta \Delta \mathbf{u}_1, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_2 &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность газа;  $p_1$  – давление газа в области без пыли и  $p_2$  – давление газа в области с пылью;  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения.

### Стационарное движение

Начнем с рассмотрения стационарного движения (падение пылинок и газа с постоянной скоростью). Полагая равными нулю все производные всех фигурирующих в (2) величин по времени (частные производные скорости пыли по координатам также равны нулю), находим однородные решения для скорости и плотности пыли:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{g}}{\alpha}, \\ \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}) &= \rho_1 (\nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \nabla) \rho_1 = \rho_1 (\nabla \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v} \nabla) \rho_1 = (\mathbf{v} \nabla) \rho_1 = 0. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что плотность пыли постоянна во всей области,  $\rho_1 = \text{const}$ . Перейдем в систему отсчета, в которой  $\mathbf{v} = 0$ . Стационарные решения тогда выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2 = -\frac{\mathbf{g}}{\alpha}, \\ p_2 &= -(\rho + \rho_1)gy + p_0, \\ p_1 &= -\rho gy + p_0, \\ p_0 &= p_1|_{y=0} = p_2|_{y=0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Основной задачей работы является линейный анализ устойчивости этого решения.

### Линеаризация уравнений

Исследуем устойчивость стационарного решения (3) по отношению к малым возмущениям. Не возмущенные величины будем помечать нижним индексом 0, а малые возмущения – штрихами. Возмущения границы раздела зададим функцией  $h(x, t)$ , значения которой также малы. Пренебрегая величинами второго порядка малости, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= \alpha(\mathbf{u}'_2 - \mathbf{v}'), \\ \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}') &= 0; \\ \left( \frac{\partial \mathbf{u}'_2}{\partial t} + \frac{g}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}'_2}{\partial y} \right) \rho &= \rho_1 \alpha (\mathbf{v}' - \mathbf{u}'_2) - \nabla p'_2 + \eta \Delta \mathbf{u}'_2, \\ \left( \frac{\partial \mathbf{u}'_1}{\partial t} + \frac{g}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}'_1}{\partial y} \right) \rho &= -\nabla p'_1 + \eta \Delta \mathbf{u}'_1, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}'_2 &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}'_1 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из-за малости функции  $h(x, t)$ , можно пренебречь изменениями переменных на границе раздела как величинами второго порядка малости. Учитывая также, что

$$(p_2 - p_1)|_{y=h(x,t)} = (p'_2 - p'_1)|_{y=h(x,t)} - \rho_1 g h(x, t),$$

условия на границе раздела можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1|_{y=0} &= \mathbf{u}'_2|_{y=0}, \\ v_y|_{y=0} &= \frac{\partial h(x, t)}{\partial t}, \\ \left( -p'_1 + 2\eta \frac{\partial u'_{1y}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} &= \left( -p'_2 + 2\eta \frac{\partial u'_{2y}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} + \rho_1 g h(x, t), \\ \left( \frac{\partial u'_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u'_{1x}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} &= \left( \frac{\partial u'_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial u'_{2x}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (5)$$

### Решение линеаризованной системы

Общее решение системы (4) может быть представлено в виде суммы частных решений, экспоненциально зависящих от времени ( $\sim e^{\gamma t}$ , где  $\gamma_i$  – комплексные инкременты). Решая систему из первых двух уравнений для пыли, получаем:

$$\mathbf{v}' = \frac{\alpha}{\gamma + \alpha} \mathbf{u}'_2, \quad \rho'_1 = \text{const}.$$

Ввиду однородности задачи по координате  $x$  переменные, характеризующие газ, можно представить в виде интеграла Фурье:

$$f'(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'_k(y) e^{ikx} dk,$$

где  $k$  – волновое число возмущения. Далее будем рассматривать только случай неустойчивых решений ( $\text{Re}(\gamma) > 0$ ). Тогда, применяя к решениям системы (4) граничные условия (5) и учитывая ограниченность возмущений по оси  $y$ , можно записать дисперсионное уравнение, связывающее комплексный инкремент  $\gamma$  с волновым числом возмущения  $k$ , в виде определителя четвертого порядка, приравненного нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ k_1 & |k| & |k| & -k_2 \\ -\frac{\alpha \rho_1 g}{\gamma(\gamma + \alpha)} & \left( \frac{\rho \gamma}{|k|} + \frac{\rho g}{\alpha} - \frac{\alpha \rho_1 g}{\gamma(\gamma + \alpha)} \right) & \left( \frac{\rho \gamma}{|k|} + \frac{\alpha \rho_1 \gamma}{|k|(\gamma + \alpha)} - \frac{\rho g}{\alpha} \right) & 0 \\ k^2 - k_1^2 & 0 & 0 & k_2^2 - k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } k_1 = \frac{\rho g}{2\alpha \eta} + \sqrt{\left( \frac{\rho g}{2\alpha \eta} \right)^2 + k^2 + \frac{\rho \gamma}{\eta}}, \quad k_2 = \frac{\rho g}{2\alpha \eta} - \sqrt{\left( \frac{\rho g}{2\alpha \eta} \right)^2 + k^2 + \frac{\rho \gamma}{\eta} + \frac{\alpha \rho_1 \gamma}{\eta(\gamma + \alpha)}}.$$

В частном случае отсутствия вязкости газа (но при сохранении трения между пылинками и газом) дисперсионное уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\gamma^3 + \gamma^2 \left( \alpha \left( 1 + \frac{\rho_1}{2\rho} \right) + \frac{|k|g}{\alpha} \right) + \gamma |k|g - \frac{\rho_1 |k|g \alpha}{2\rho} = 0. \quad (7)$$

Анализ дисперсионного уравнения

Пренебрегая малыми членами в (12), можно найти асимптотические решения:

$$\text{при } |k| \gg \frac{\rho_1 g}{4\alpha\eta} \quad \gamma = \frac{\rho_1 g}{4|k|\eta},$$

$$\text{при } |k| \ll \frac{\rho g}{2\alpha\eta} \text{ для больших } \eta \text{ и } |k| \ll \frac{\alpha^2(2\rho + \rho_1)}{2\rho g} \text{ для малых } \gamma = \sqrt{\frac{|k|\rho_1 g}{(2\rho + \rho_1)}}. \quad (8)$$

Дисперсионное соотношение  $\gamma(k)$  в (8) совпадает с соотношением для классической неустойчивости Рэля-Тейлора с жидкостями с плотностями  $\rho$  и  $\rho + \rho_1$ .

Из асимптотических решений следует, что при некотором волновом числе возмущения  $k$  существует максимум. Иначе говоря, при определенных параметрах на границе раздела будет образовываться периодическая структура с периодом, обратно пропорциональным  $k$ .

Численное решение уравнения (6) показывает, что при каждом  $k$  существует только одно решение, вещественная часть которого положительна. При этом значение  $\gamma$  является действительным, так что временное развитие возмущений апериодическое. Анализ уравнения (7) показывает, что и в случае невязкого газа существует единственное действительное положительное решение. Асимптотическое решение для малых  $k$  совпадает с (8), а для больших выглядит следующим образом:

$$\text{при } |k| \gg \frac{\alpha^2(2\rho + \rho_1)}{2\rho g} \quad \gamma = \frac{\alpha}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{2\rho_1}{\rho}} - 1 \right).$$

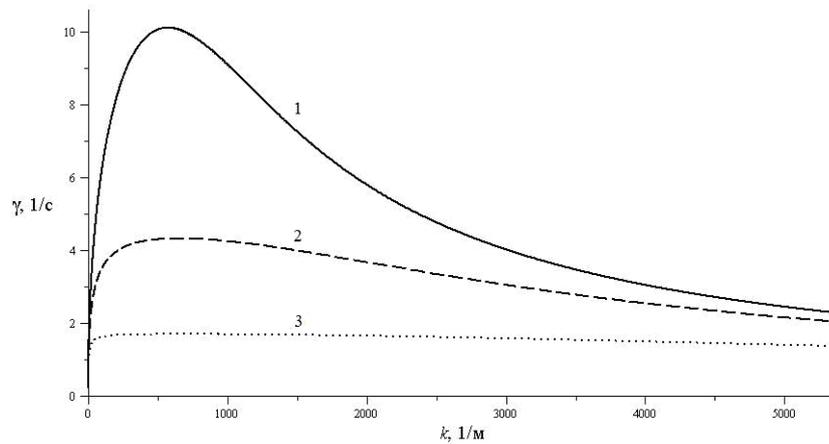


Рис. 2. Графики зависимости инкремента возмущений  $\gamma$  от волнового числа  $k$  при  $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_1 = 0,1 \text{ кг/м}^3$ ,  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{с} / (\text{м} \cdot \text{с})$ ,  $\rho_d = 1000 \text{ кг/м}^3$ : 1 – при  $r = 10^{-6} \text{ м}$ ; 2 – при  $r = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ; 3 – при  $r = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$

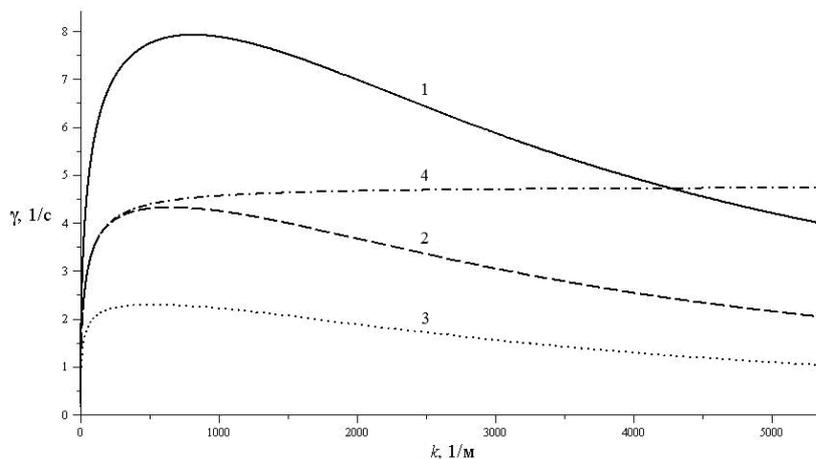


Рис. 3. Графики зависимости инкремента роста возмущений  $\gamma$  от волнового числа  $k$  при  $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$ ,  $r = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ,  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{с} / (\text{м} \cdot \text{с})$ ,  $\rho_d = 1000 \text{ кг/м}^3$ ; в случае вязкого газа: 1 – при  $\rho_1 = 0,2 \text{ кг/м}^3$ ; 2 – при  $\rho_1 = 0,1 \text{ кг/м}^3$ ; 3 – при  $\rho_1 = 0,05 \text{ кг/м}^3$ ; в случае невязкого газа: 4 – при  $\rho_1 = 0,1 \text{ кг/м}^3$

На рис. 2 и 3 представлены графики зависимости инкремента возмущений  $\gamma$  от волнового числа  $k$  для различных значений радиусов пылинок и плотности пыли соответственно. На кривой 4 (рис. 3) также показана зависимость  $\gamma$  от  $k$  при отсутствии вязкости у газа. В случае как вязкого, так и невязкого газа возрастающие возмущения имеются для любых частот, но с учетом вязкости показатель роста возмущений  $\gamma$  спадает к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, вязкость оказывает некоторый стабилизирующий эффект.

При увеличении радиуса пылинок  $r$ , также как и при уменьшении плотности пыли  $\rho_1$ , сила трения, действующая на «элемент объема», согласно (1), уменьшается. Соответственно, наличие пыли в газе оказывает все меньшее влияние на неустойчивость системы, что видно из рис. 2 и 3.

### Заключение

Исследование устойчивости рассматриваемой двухфазной системы по отношению к малым возмущениям выявило наличие неустойчивости границы между запыленным и чистым газом. Анализ дисперсионного соотношения (6) показал, что инкремент роста возмущений  $\gamma$  при некотором волновом числе  $k$  достигает максимума. Помимо этого, было показано, что вязкость газа уменьшает скорость роста возмущений с большими волновыми числами, т.е.  $\gamma \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , тогда как в приближение невязкого газа  $\gamma$  принимает некоторое положительное значение при  $k \rightarrow \infty$ .

Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ РНП 2.1.1/9824.

### Литература

1. Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Roy. Soc. A. – 1950. – V. 201. – P. 192–196.
2. Bellman R., Pennington R. Effects of surface tension and viscosity on Taylor instability // Quart. Appl. Math. – 1954. – V. 12. – P. 151–162.
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. – NY.: Dover, 1981. – 652 p.
4. Sharp D.H. An overview of Rayleigh–Taylor instability // Physica D. – 1984. – V. 12. – P. 3–18.
5. Kadau K. et. al. Nanohydrodynamics Simulations: An Atomic View of the Rayleigh-Taylor Instability // Proc. Nat. Acad. Sci. – 2004. – V. 101 (16). – P. 5851–5855.
6. Völtz C., Pesch W. and I. Rehberg. Rayleigh-Taylor instability in a sedimenting suspension // Phys. Rev. E. – 2001. – V. 65. – P. 1–7.
7. Glowinski R., Pan T.W. and Joseph D.D. Modelling Rayleigh-Taylor instability of a sedimenting suspension of several thousand circular particles in direct numerical simulation // J. Fluid Mech. – 2001. – V. 434. – P. 23–37.
8. Guda S., Bukharina S., Mucha P.J. Rayleigh-Taylor Instability in Sedimentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://rtg.amath.unc.edu/Guda-ChaCha06.pdf>, своб.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – Т. VI. – 736 с.

**Савельев Роман Сергеевич**

– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, [savelyev.r.s@gmail.com](mailto:savelyev.r.s@gmail.com)

**Розанов Николай Николаевич**

– НПК «ГОИ им. С.И. Вавилова», доктор физ.-мат. наук, начальник отдела, [nrosanov@yahoo.com](mailto:nrosanov@yahoo.com)

**Сочилин Георгий Борисович**

– НПК «ГОИ им. С.И. Вавилова», кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, [goga.ilph@yahoo.com](mailto:goga.ilph@yahoo.com)

**Чивилихин Сергей Анатольевич**

– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, [sergey.chivilikhin@gmail.com](mailto:sergey.chivilikhin@gmail.com)