3 АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.5

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.В. Быстров, В.В. Григорьев, Е.Ю. Рабыш, Н.А. Черевко

Рассмотрен аналитический алгоритм синтеза оптимальных регуляторов, обеспечивающих синтезируемой непрерывной нестационарной динамической системе экспоненциальную устойчивость, т.е. возможность задания желаемого времени переходных процессов.

Ключевые слова: экспоненциальная устойчивость, конструирование оптимальных регуляторов, непрерывные нестационарные системы, показатели качества.

Введение

Для оценки качества переходных процессов в системах с одним входом и одним выходом широкое распространение в инженерной практике получили показатели качества, вводимые по переходной функции, т.е. по реакции системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Такие показатели качества процессов, как время переходного процесса и перерегулирование, достаточно полно отражают физические процессы, происходящие в системе, и позволяют сравнивать динамические свойства различных систем. Однако вводимые по переходной функции показатели качества не применимы непосредственно к многомерным системам. Множество траекторий в пространстве выходов многомерной системы, вызванных воздействиями, приложенными к различным входам, может состоять из существенно разнящихся визуально кривых. На множестве таких кривых утрачивается очевидность их сравнения, а следовательно, и сопоставимость динамических свойств различных систем. Аналог переходной функции для линейных непрерывных многомерных систем введен в [1]. Дальнейшее развитие подобного подхода нашло отражение во введении понятия совокупной переходной функции. Для этого вводится понятие нормированной совокупной переходной функции многомерной системы [2, 3], по которой, как и для систем с одним входом и одним выходом, определяются типовые показатели качества в виде времени переходного процесса и перерегулирования. Причем эти показатели качества определяются по множеству траекторий, исходящих из области допустимых начальных значений. Чтобы избежать при нахождении значений показателей качества большого объема вычислений, вызванного необходимостью выявления наихудших случаев по нормированию совокупных переходных функций, соответствующих исследуемому множеству траекторий, проще производить оценку показателей качества. В связи с этим в дальнейшем на основе условий экспоненциальной устойчивости были получены показатели качества в виде времени переходного процесса для непрерывных и дискретных динамических систем. Но следует отметить, что лишь для дискретных динамических систем по полученным показателям качества были разработаны алгоритмы синтеза оптимальных регуляторов, обеспечивающие экспоненциальную устойчивость [2].

Постановка задачи

Современная теория линейных систем автоматического управления основана на использовании метода пространства состояний. Среди различных направлений основанный на нем метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов является одним из самых распространенных [4–7]. Беллман, касаясь задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов, отмечал, что данной «менее важной задачей» часто заменяют исходную, «более реалистичную задачу» оптимизации, и подчеркивал: «Это напоминает историю об одном человеке, который, потеряв кольцо посреди улицы, искал его под фонарем, потому что там светлее», хотя оно «оставалось в той непроглядной темноте, которая показалась слишком затруднительной для поисков».

Предположим, что поведение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния динамической системы; $x(0) = x_0 \in R^n$ – вектор начальных состояний; $u \in R^m$ – управление; A – $n \times n$ матрица описания; $B - n \times m$ матрица входа; $t \geq 0$ – время. Полагая, что объект управления (1) является полностью управляемым, рассмотрим задачу нахождения такого закона управления, который обеспечивает для замкнутой системы экспоненциальную устойчивость с заданными значениями параметров, определяемыми по требуемым значениям времени переходных процессов.

Стабилизация нестационарных непрерывных динамических систем

Наиболее сильные притягивающие свойства положения равновесия динамической системы обеспечиваются при условии экспоненциального затухания переходных процессов [2, 3].

При изучении условия экспоненциальной устойчивости будем полагать, что при любых $x_0 \in R^n$ решение $x \in R^n$ уравнения (1) существует и единственно, а система является полной в R^n, т.е. под этим условием понимается глобальная экспоненциальная устойчивость динамической системы. Далее дадим определение экспоненциальной устойчивости [3].

Определение 1. Непрерывная система (1) в точке $x = 0$ называется экспоненциально устойчивой, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in R^n$, существуют такие параметры $\rho : \rho \geq 1$ и $\lambda : \lambda < 0$, при которых в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие

$$\|x(t)\| \leq \rho \cdot e^{\lambda \cdot t} \|x_0\|, \tag{1}$$

где норма вектора задается соотношением

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{1/2},$$

где x_i – i-ая компонента вектора состояния x.

Неравенство (2) устанавливает экспоненциальную мажоранту процессов, которая может служить для оценки качества непрерывной системы в некоторой окрестности ее положения равновесия.

Из определения экспоненциальной устойчивости непрерывной динамической системы можно получить оценку времени переходного процесса [3]:

$$t_n \leq \frac{1}{\lambda} \ln(\delta_n), \tag{3}$$

где $\delta_n \leq 0{,}05$.

Для линейных систем (1) подлежит минимизации квадратичный критерий качества:

$$J(x,u) = \int_0^\infty \left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt, \tag{4}$$

где $Q = Q^T$ – положительно полуопределенная $n \times n$ матрица штрафов по отклонениям траекторий движения системы от положения равновесия; $R = R^T$ – положительно определенная $m \times m$ матрица штрафов по управлению. Управление u в задаче (1), (4) ищется в виде

$$u(t) = -K(t)x(t), \tag{5}$$

удовлетворяющее условию (2). Здесь $K(t)$ – $m \times n$ матрица линейных обратных связей по состояниям объекта управления. Для решения задач (1), (4) необходимо построить функцию $V(x(t))$, которую в рассматриваемом случае естественно искать в виде квадратичной формы:

$$V(x(t)) = x^T(t)P(t)x(t), \tag{6}$$

где $P = P^T$ – положительно определенная $n \times n$ матрица.

Теперь дадим локальные достаточные условия экспоненциальной устойчивости [3].

Теорема 1. Непрерывная система (1) экспоненциально устойчива в точке $x = 0$, если существуют такая квадратичная функция Ляпунова $V(x(t))$ и такой параметр $\lambda : \lambda < 0$, при которых на всех траекториях движения системы в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие

$$\dot{V}(x(t)) \leq 2\lambda V(x(t)). \tag{7}$$

Условие (7) имеет место, если справедливо уравнение

$$\dot{V}(x(t)) - 2\lambda V(x(t)) = -x^T(t)Q(t)x(t) - u^T(t)R(t)u(t), \tag{8}$$

подставив квадратичную функцию Ляпунова (6) и ее производную в уравнение (8), получим:

$$[A(t)x(t) + B(t)u(t) - \lambda x(t)]^T P(t)x(t) + x^T(t)P(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t) - \lambda x(t)] + x^T(t)\dot{P}(t)x(t) +$$
$$+ x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) = 0, \tag{9}$$

на основе которого, воспользовавшись методом локальной оптимизации [3], находим оптимальное управление:

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t). \tag{10}$$

Таким образом, используя (4), (8), (9), получим систему матричных уравнений типа Риккати:

$$\dot{P}(t) + [A(t) - B(t)K(t) - \lambda I]^T P(t) + P(t)[A(t) - B(t)K(t) - \lambda I] + K^T(t)R(t)K(t) + Q(t) = 0, \tag{11}$$

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t), \tag{12}$$

где I – единичная матрица. Если все матрицы A, B, Q, R постоянны, то процесс может достичь установившегося состояния в том смысле, что становится постоянной матрица P ($\dot{P} = 0$):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$[A - BK - \lambda I]^T P + P[A - BK - \lambda I] + K^T RK + Q = 0, \qquad (13)$$

$$K = R^{-1} B^T P. \qquad (14)$$

На основании теоремы 1 существование положительно определенного решения системы уравнений (13), (14) является достаточным условием устойчивости синтезируемой матрицы замкнутой системы:

$$\operatorname{Re}\lambda_i\{F - \lambda I\} < 0,\ i = 1, 2, ..., n,$$

и, следовательно, получения степени устойчивости системы:

$$\operatorname{Re}\lambda_i\{F\} < \lambda,\ i = 1, 2, ..., n.$$

В заключение рассмотрим последовательность синтеза регулятора для обеспечения экспоненциальной устойчивости синтезируемой непрерывной нестационарной динамической системе с исходными данными – в общем случае управляемым нестационарным объектом управления с матрицами описания $A(t)$ и входа $B(t)$:

1. по заданным оценкам времени переходного процесса определение значения параметра λ по (3);
2. решение системы матричных уравнений типа Риккати (11), (12) относительно матрицы $P(t)$ с последующим вычислением матрицы линейных обратных связей $K(t)$ по (12).

В качестве примера рассмотрим непрерывный стационарный объект управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

со следующими заданными показателями качества:

$$t_n = 3{,}0\ \text{с}; \delta_n = 0{,}01.$$

В общем случае, предполагая, что все переменные вектора состояния объекта управления доступны для измерения, управление ищется как функция состояний объекта управления в виде

$$u = -Kx.$$

Взяв параметры

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; R = 1$$

и решив матричные алгебраические уравнения (13), (14), получим матрицы обратных связей K регуляторов при $\lambda = -1{,}535$ (вычисляемая по (2) и обеспечивающая экспоненциальную устойчивость) и при $\lambda = 0$ (обеспечивается асимптотическая устойчивость) соответственно:

$$K_1 = [6{,}194 \quad 4{,}035].$$

$$K_2 = [2{,}447 \quad 1{,}856].$$

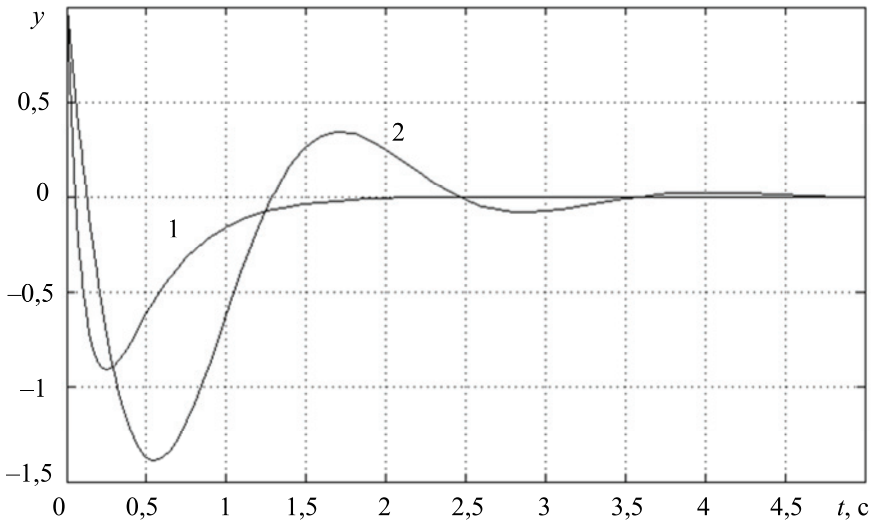

Рисунок. Переходные процессы при $x_0^T = [1 \quad 0]$: 1 – в экспоненциально устойчивой системе; 2 – в асимптотически устойчивой системе

На рисунке показаны графики переходных процессов при $x_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, из которых явно видно, что на переходном процессе 1 (в отличие от переходного процесса 2), который получается при использовании условий экспоненциальной устойчивости, удовлетворяется желаемое время переходного процесса, что и подтверждает полученные результаты.

Заключение

На основе достаточных условий экспоненциальной устойчивости, метода локальной оптимизации и оценки времени переходного процесса получен алгоритм синтеза оптимальных регуляторов, обеспечивающий синтезируемой непрерывной нестационарной динамической системе экспоненциальную устойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-08-00857-а «Методология применения теории качественной устойчивости при проектировании систем управления адаптивной оптикой»).

Литература

1. Соболев О.С. Однотипные связанные системы регулирования. – М.: Энергия, 1973.– 136 с.
2. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1983. – 245 с.
3. Григорьев В.В. Аналитический синтез регуляторов на основе качественной устойчивости [Текст]: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01/ В.В. Григорьев. ЛИТМО. – Л.: [б.н.], 1988.– 483 с.
4. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003.– 447 с.
5. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. – СПб: Питер, 2006.– 272 с.
6. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. – М.: Наука, 1978.– 248 с.
7. Красовский А.А., Буков В.Н. и Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными системами. – М.: Наука, 1977.– 272 с.

Быстров Сергей Владимирович – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, sbystrov@mail.ru

Григорьев Валерий Владимирович – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, grigvv@yandex.ru

Рабыш Евгений Юрьевич Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, Rabysh@yandex.ru

Черевко Николай Александрович Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, epostbox1@mail.ru