



УДК 532.529

## СРАВНЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С НАСТРАИВАЕМЫМИ ДИССИПАТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ И СХЕМЫ WENO НА ПРИМЕРЕ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ГАЗА И ГАЗОВЗВЕСЕЙ

Д.В. Садин<sup>а</sup>, С.А. Одоев<sup>а</sup><sup>а</sup> Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация

Адрес для переписки: sadin@yandex.ru

**Информация о статье**

Поступила в редакцию 10.05.17, принята к печати 15.06.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-719-724

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Садин Д.В., Одоев С.А. Сравнение разностной схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами и схемы WENO на примере одномерных задач динамики газа и газовзвесей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 4. С. 719–724. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-719-724**Аннотация**

**Предмет исследования.** Представлены результаты сравнительного тестирования высокоустойчивой разностной схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами и схемы WENO5 на примере одномерных задач газовой динамики и механики газовзвесей. **Метод.** Разностная схема второго порядка точности построена с расщеплением по физическим процессам на два этапа. На первом из них используются центральные разности с адаптивной реконструкцией искусственной вязкости и полунейвной аппроксимацией источниковых членов, на втором этапе – реконструкция потоков TVD-типа. **Основные результаты.** Для представительного семейства тестовых задач предложенная схема подтвердила работоспособность и хорошее качество численных решений на уровне схемы WENO5 при существенно меньших затратах машинного времени. Рассмотрены волновая структура при распаде начального разрыва в неравновесной газовзвеси и сходимости к точному автомодельному решению. **Практическая значимость.** Возможность детального разрешения структурных особенностей течений газа и газовзвесей позволяет уменьшить объем экспериментальной отработки новых технологий и технических устройств нанесения покрытий, при контроле герметичности с использованием пробного дисперсного вещества с частицами микро- и наноразмеров и других областях.

**Ключевые слова**

газовая динамика, газовзвесь, численное моделирование, тестовые задачи, диссипативные свойства, устойчивость

## COMPARISON OF DIFFERENCE SCHEME WITH CUSTOMIZABLE DISSIPATIVE PROPERTIES AND WENO SCHEME IN THE CASE OF ONE-DIMENSIONAL GAS AND GAS-PARTICLE DYNAMICS PROBLEMS

D.V. Sadin<sup>а</sup>, S.A. Odoev<sup>а</sup><sup>а</sup> Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

Corresponding author: sadin@yandex.ru

**Article info**

Received 10.05.17, accepted 15.06.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-719-724

Article in Russian

**For citation:** Sadin D.V., Odoev S.A. Comparison of difference scheme with customizable dissipative properties and WENO scheme in the case of one-dimensional gas and gas-particle dynamics problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 719–724 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-719-724**Abstract**

**Subject of Research.** The paper presents results of comparative testing of highly stable difference scheme with customizable dissipative properties and WENO5 scheme in the case of one-dimensional gas dynamics and mechanics of gas-suspensions problems. **Method.** The second order difference scheme is constructed by physical processes splitting into two phases. The first one uses the central differences with adaptive reconstruction of artificial viscosity and semi implicit approximation of the sources. TVD type reconstructions are used in the second phase. **Main Results.** For the representative collection of test problems, the proposed scheme has confirmed the efficiency and good quality numerical solutions at the level of the WENO5 scheme with substantially lower machine time cost. The wave structure in the decay of initial discontinuity in the non-equilibrium gas suspension and the convergence to exact self-similar solution are considered. **Practical Relevance.** A detailed resolution of structural peculiarities of gas flows and gas-particle mixtures allows reducing the amount of

experimental development of new technologies and technical devices of coating, leakage control when using a trial particulate matter with particles of micro - and nano-sizes and other areas.

**Keywords**

gas dynamics, gas-particle mixture, numerical simulation, test problems, dissipative properties, stability

**Введение**

Для широкого круга приложений в поле течения имеются области чистого газа (гиперболический тип уравнений) [1, 2] и газозвеси (составной тип с мнимыми компонентами характеристик) [3–5], разделенные границами раздела фаз. При этом к разностной схеме предъявляются требования способности сквозного расчета с хорошим разрешением деталей потока как в чистом газе, так и в его смеси с взвешенными частицами. Кроме того, наличие микрочастиц и их взаимодействие с высокоскоростным газом обуславливает существенное различие времен релаксации фаз – жесткость задачи [6–12]. Применению схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами CDP (Customizable Dissipative Properties) для численного моделирования импульсных струйных течений газозвесей посвящены работы [13, 14].

В настоящей работе приводится сравнение разностной схемы CDP [12] с популярной схемой WENO [15–17] на примере одномерных тестовых задач газовой динамики [17, 18]. Анализируется сходимость численного решения задачи о распаде разрыва в двухскоростной двухтемпературной газозвеси к точному автомодельному равновесному решению [12, 19].

**Основные уравнения**

Для описания динамики газозвеси с различием скоростей, температур и общим давлением фаз используем эйлеров подход, при котором система уравнений в рамках континуального описания и известных допущениях [3] имеет вид [12]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B}(\nabla_d \mathbf{F}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}), \tag{1}$$

$$\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \rho_1 v_1, \rho_2 v_2, \rho_2 e_2, \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2]^T,$$

$$\mathbf{G} = [\rho_1 v_1, \rho_2 v_2, \rho_1 v_1 v_1, \rho_2 v_2 v_2, \rho_2 e_2 v_2, \rho_1 E_1 v_1 + \rho_2 K_2 v_2]^T,$$

$$\mathbf{F} = [0, 0, p, p, 0, p(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)]^T, \quad \mathbf{H} = [0, 0, -\mathbf{F}_\mu, \mathbf{F}_\mu, Q_T, -Q_T]^T,$$

$$\nabla_d = \text{diag}(\nabla, \nabla, \nabla, \nabla, \nabla, \nabla), \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, \alpha_1, \alpha_2, 1, 1],$$

$$\rho_i = \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i = 1, 2), \quad E_1 = e_1 + v_1^2 / 2, \quad K_2 = v_2^2 / 2,$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз, индекс  $\circ$  сверху относится к истинным значениям плотности;  $\nabla$  – оператор Гамильтона. Через  $\alpha_i, \rho_i, v_i, E_i, e_i, p$  обозначены объемная доля, приведенная плотность, вектор скорости, полная и внутренняя энергии единицы массы  $i$ -ой фазы, давление газа;  $\mathbf{F}_\mu, Q_T$  – соответственно вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия, мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема;  $t$  – время.

Для замыкания системы (1) используем уравнения состояния идеального калорически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц:  $p = (\gamma_1 - 1)\rho_1^\circ e_1, \quad e_1 = c_v T_1, \quad e_2 = c_2 T_2, \quad \{\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const}$ , где  $T_1, T_2$  – температура несущей фазы и частиц;  $\gamma_1, c_v$  – показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $c_2$  – удельная теплоемкость частиц. Интенсивности межфазного трения и теплообмена  $\mathbf{F}_\mu, Q_T$  задаются на основе известных и апробированных для рассматриваемого класса задач эмпирических критериальных соотношений [3].

**Разностная схема с настраиваемыми диссипативными свойствами**

Рассмотрим разностную схему для уравнений движения газозвеси (1) с расщеплением по физическим процессам на два этапа [12]. На первом этапе вычисляются предварительные значения искомых функций  $\mathbf{q}_n^{k+1/2} = \mathbf{q}(t_{k+1/2}, x_n)$ :

$$\mathbf{q}_n^{k+1/2} - \mathbf{H}(\mathbf{q}_n^{k+1/2}) \tau / 2 = \mathbf{q}_n^k + \mathbf{H}(\mathbf{q}_n^k) \tau / 2 - \mathbf{B}_n^k (\tilde{\mathbf{F}}_{n+1/2}^k - \tilde{\mathbf{F}}_{n-1/2}^k) \tau / h,$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{n\pm 1/2}^k = \left[ 0, 0, p_{n\pm 1/2}^k + Q_{n\pm 1/2}^k, p_{n\pm 1/2}^k + Q_{n\pm 1/2}^k, 0, (p_{n\pm 1/2}^k + Q_{n\pm 1/2}^k)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)_{n\pm 1/2}^k \right]^T,$$

где  $\tau, h$  – шаги по времени и по пространству соответственно.

Адаптивная реконструкция искусственной вязкости выполняется с учетом конфигураций ударных волн и релаксационных свойств газозвеси:

$$Q_{n+1/2}^k = -B(1 - \psi_1(r_{n+1/2})) \left[ \gamma_1 p_{n+1/2}^k (\rho_{1,n+1/2}^k + D p_{2,n+1/2}^k) \right]^{1/2} (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k), \quad (2)$$

$$r_{n+1/2} = \begin{cases} (v_{1,n}^k - v_{1,n-1}^k) / (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k) & \text{если } (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k)(p_{n+1}^k - p_n^k) \geq 0, \\ (v_{1,n+2}^k - v_{1,n+1}^k) / (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k) & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$D = \left\{ 1 - (d / d_*)^2 \text{ если } d \leq d_*; 0, \text{ иначе} \right\},$$

где  $B \geq 0$  – коэффициент искусственной вязкости;  $v_1$  – проекция вектора скорости газа на соответствующую ось;  $d, d_*$  – диаметр дисперсных частиц и его характерное значение для равновесного течения смеси;  $\psi_1(r_{n+1/2})$  – функция наклонов (ограничитель). На втором этапе

$$q_n^{k+1} = q_n^{k+1/2} - [\nabla_d \mathbf{G}]_{TVD}^{k+1/2} \tau,$$

где  $[\nabla_d \mathbf{G}]_{TVD}^{k+1/2}$  – TVD-реконструкция потоков с ограничителями  $\psi_2$  [12].

### Результаты решения тестовых задач

Задачи для чистого газа решались по схеме CDP для уравнений (1), в которых объемная концентрация дисперсной фазы полагалась пренебрежимо малой  $\alpha_2 = 10^{-10}$ . В адаптивной реконструкции искусственной вязкости (2) использовался ограничитель  $\psi_1$  – VAN LEER.

Одномерные задачи Римана решаются на интервале  $x \in (0,1)$  на равномерной сетке с начальным разрывом в точке  $X_0 \in (0,1)$  и на отрезке времени  $t \in [0, t_f]$ . Разностная схема CDP верифицировалась на представительном семействе известных тестов. Приведем результаты некоторых показательных задач, характеризующих возможности схемы численного воспроизведения сильных ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов, а также их взаимодействий между собой. Начальные условия задач [17 и <http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~liska/CompareEuler/compare8/>] сведены в табл. 1, в которой газодинамические величины помечены индексом  $L$  – слева от разрыва, а индексом  $R$  – справа. Для всех перечисленных задач величина отношения теплоемкостей при постоянном давлении и объеме  $\gamma = 7/5$ . Граничные условия совпадают с начальными. Число Куранта принято для всех тестовых задач  $K_0 = 0,4$ , за исключением теста 3а, где ограничение на шаг по времени задано  $K_0 = 0,2$ .

Дополнительно рассматривается одномерная тестовая задача Woodward–Collela blast wave problem [17, 18]. Она представляет задачу взаимодействия волн, возникающих при распаде двух сильных разрывов. Задача рассматривается на отрезке  $x \in [0,1]$  с граничными условиями отражения. Первый разрыв находится в начальный момент времени в  $X_1 = 0,1$ , а другой в  $X_2 = 0,9$ . В начальный момент времени газ покоится,  $v_i = 0$ , с плотностью  $\rho_i = 1$  во всей расчетной области. Начальное распределение давления  $(p_L, p_M, p_R) = (1000; 0,01; 100)$  соответственно в левой, средней и правой областях. Время окончания счета –  $t_f = 0,038$ .

Тест	$\rho_{iL}$	$v_{iL}$	$p_L$	$\rho_{iR}$	$v_{iR}$	$p_R$	$X_0$	$t_f$
2	1	-2	0,4	1	2	0,4	0,5	0,15
3а	1	-19,59745	1000	1	-19,59745	0,01	0,8	0,012
4	5,99924	19,5975	460,894	5,99242	-6,19633	46,095	0,4	0,035
5	1,4	0	1	1	0	1	0,5	2
6	1,4	0,1	1	1	0,1	1	0,5	2

Таблица 1. Начальные условия тестовых задач

Результаты решения одномерных задач газовой динамики представлены на рис. 1 (а–д) в порядке, соответствующим тестам в строках табл. 1. Нижний рис. 1, е, иллюстрирует решение тестовой задачи blast wave problem. Для теста 2 (рис. 1, а) приведено распределение внутренней энергии газа, а для остальных задач – профили плотности. Разрешение сеток для рассматриваемых тестов [17] и параметры схемы CDP сведены в табл. 2.

На рис. 1 сплошными кривыми приведены точные решения тестовых задач. Численные решения нанесены сплошными линиями с точками (WENO5 из [17]), штриховыми кривыми – CDP. Кроме того, на рис. 1, е, жирным пунктиром показан расчет по схеме CDP на сетке с разрешением  $h = 1/2000$ , соответствующим эталонному решению для blast wave problem [18].

Тест	$B$	$\Psi_2$	$1/h$
2	0,04	MINMOD	100
3a	2	MINMOD	200
4	1	VAN LEER	200
5	1	SUPERBEE	100
6	1	SUPERBEE	100
blast wave problem	1	VAN LEER	400

Таблица 2. Параметры схемы CDP и разрешения сеток

В тесте 2 (Einfeldt problem) (табл. 1) в результате распада разрыва образуются две волны разрежения, разбегающиеся друг от друга. В центре между ними образуется область очень низкой плотности и давления. Большинство разностных схем [17], в том числе WENO, дают решения, которые имеют в центре расчетной области так называемый энтропийный след. Настройка схемы CDP позволяет получить более точное решение (рис. 1, а). Тест 3а (табл. 1) является вариантом теста 3 (Togo problem) [17], в котором образуется стационарный контактный разрыв в точке  $x = 0,8$ . Особенность этой задачи заключается в огромном перепаде давления  $p_L / p_R = 10^5$ . В численном решении WENO5 наблюдается нефизическое вспучивание профиля плотности на 4 ячейки перед фронтом ударной волны (рис. 1, б). Контактный разрыв в схеме CDP имеет меньшую область размазывания (3–4 ячейки) против 8–9 для WENO5. Такая же тенденция отмечается в тесте 6 – медленно движущимся контактным разрыве (рис. 1, д) с его сглаживанием на 5 ячеек (CDP) и 8 ячеек (WENO5). В остальных тестах решения, полученные по разностным схемам CDP и WENO5, близки друг к другу и хорошо согласуются с точными автомодельными решениями и численным эталонным решением Woodward–Collela blast wave problem [18].

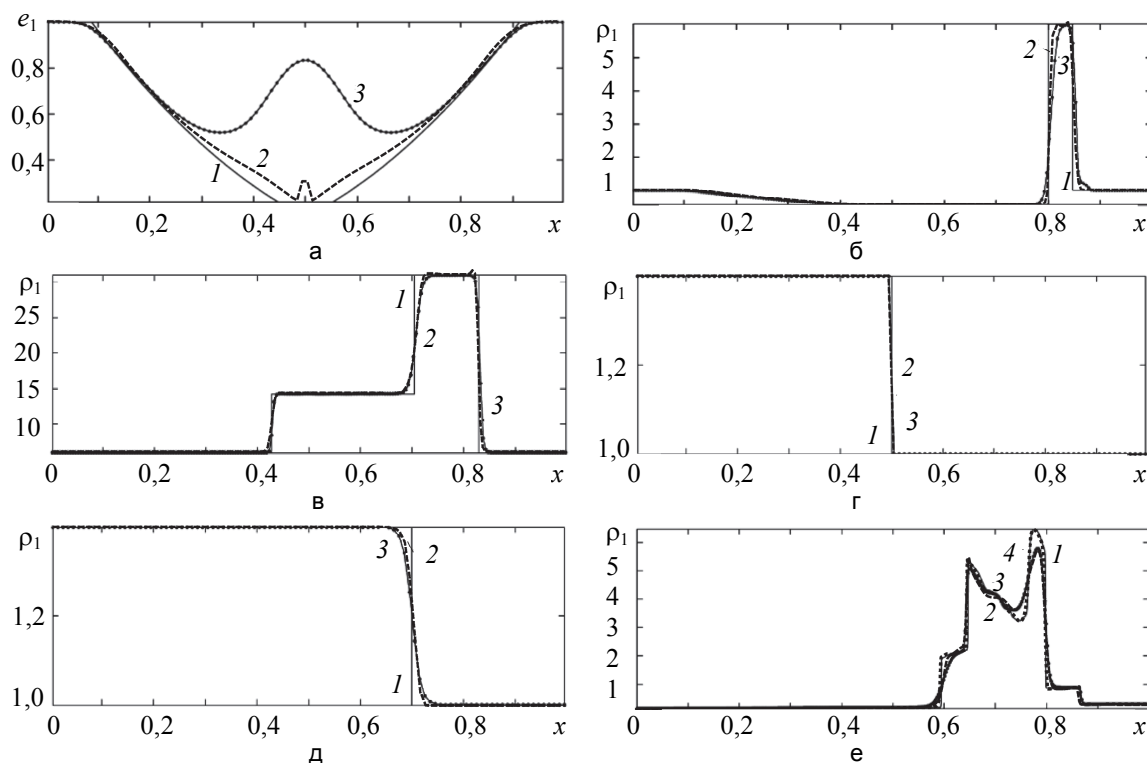


Рис. 1. Решения тестовых задач 2–6 соответственно а–е:

1 – точные решения для внутренней энергии газа (а) и плотности (б–е); 2 – численные решения (схема CDP); 3 – WENO5 из [17]; 4 – CDP на сетке 1/2000

Рассмотрим возможности схемы CDP при численном моделировании волновых течений газозвеси на примере задачи о распаде разрыва со следующими начальными условиями:  $(\rho_{1L}, \alpha_{2L}, v_{1L}, v_{2L}, p) = (1; 0,001; 0; 0; 1)$ ,  $(\rho_{1R}, \alpha_{2R}, v_{1R}, v_{2R}, p) = (0,1; 0,001; 0; 0; 0,1)$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $X_0 = 0,5$ ,  $1/h = 1000$ . Частицы – монодисперсные с истинной плотностью  $\rho_2^\circ = 2500 \text{ кг/м}^3$ , диаметр ( $d$ ) варьируется и указан ниже. Начальные условия заданы в безразмерном виде: значения давления и плотности отнесены к соответствующим величинам в области  $L$ , скорости – к скорости звука перед ударной волной (область  $R$ ), линейные величины к размеру расчетной области 1 м. Граничные условия – отражения. Расчет ведется до момента времени  $t_f^{(1)} = 0,16 \text{ мс}$  (рис. 2 и рис. 3, а) – неустановившаяся стадия и  $t_f^{(2)} = 1 \text{ мс}$

(рис. 2 и рис. 3, б) – течение типа бегущей волны с релаксацией фаз к равновесному состоянию смеси. Сплошные кривые – точные решения для равновесной газозвеси [12, 19]. Численные решения в моменты времени  $t_f^{(1)} = 0,16$  мс и  $t_f^{(2)} = 1$  мс соответственно обозначены для  $d = 0,1$  мкм – маркерами  $\circ$  и штрихпунктирной линией, для  $d = 8$  мкм – маркерами  $\square$  и штриховой кривой.

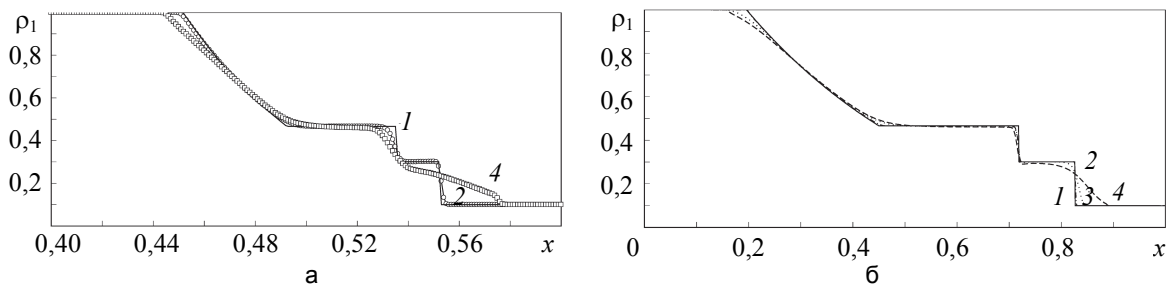


Рис. 2. Распределение плотности газовой фазы в моменты времени  $t_f^{(1)} = 0,16$  мс (а) и  $t_f^{(2)} = 1$  мс (б): 1 – точное равновесное автомодельное решение; 2 – численное решение для  $d = 0,1$  мкм ; 3 –  $d = 3$  мкм ; 4 –  $d = 8$  мкм

После распада начального разрыва возникает неустановившееся релаксирующее течение двухфазной среды с различием скоростей и температур фаз. По газовой фазе вправо бежит ударная волна уменьшающейся интенсивности, которая вырождается в звуковую волну. Влево распространяется волна разрежения. Эти две волны сопрягаются комбинированным разрывом (скачком пористости), в окрестности которого к моменту времени  $t_f^{(2)} = 1$  мс поток смеси становится практически односкоростным и равновесным. При уменьшении диаметра частиц зоны релаксации в области ударной волны и волны разрежения становятся более узкими, а численные распределения монотонно сходятся к автомодельному равновесному решению (см. рис. 2, б; здесь пунктиром добавлено численное решение для  $d = 3$  мкм). Схема CDP дает хорошее разрешение деталей течения, например, ударная волна конечной интенсивности размазывается на две ячейки (рис. 3, а), разрыв пористости на 4–6 ячеек (рис. 2, а).

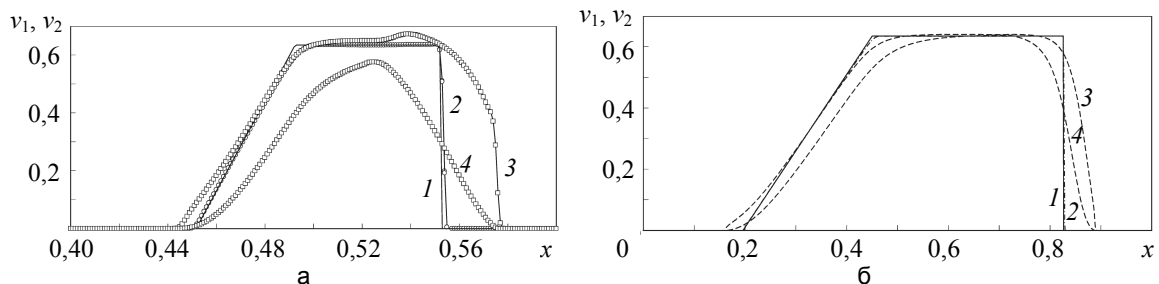


Рис. 3. Распределение скоростей газа и дисперсной фазы в моменты времени  $t_f^{(1)} = 0,16$  мс (а) и  $t_f^{(2)} = 1$  мс (б): 1 – точное равновесное автомодельное решение; 2 – численное решение для  $d = 0,1$  мкм ; 3 и 4 – скорости газа и частиц соответственно для  $d = 8$  мкм

### Заключение

Разностная схема с настраиваемыми диссипативными свойствами экономична и проста в реализации, состоящей из двух этапов. На первом из них отбрасываются конвективные члены и используются центральные разности с адаптивной искусственной диффузией. На втором производится реконструкция потоков TVD-типа. Численная модель CDP позволяет получать хорошее качество численных решений как в области чистого газа на уровне схемы WENO, так и в зонах течений с содержанием взвешенных частиц. Выбор параметра искусственной вязкости и ограничителя потока позволяет настроить схему под конкретный класс решаемых задач. Схема CDP демонстрирует монотонную сходимость к точным автомодельным решениям как при измельчении сетки, так и при уменьшении характерных времен релаксации фаз.

### Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
4. Клебанов Л.А., Крошилин А.Е., Нигматулин Б.И., Нигмату-

### References

1. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. Systems of Quasilinear Equations and their Applications to Gas Dynamics. Moscow, Nauka Publ., 1978, 687 p. (In Russian)
2. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Mathematical Problems in the Numerical Solution of Hyperbolic Systems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 608 p. (In Russian)
3. Nigmatulin R.I. *Dynamics of Multiphase Media*. Moscow, Nauka Publ., 1987.

- лин Р.И. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // ПММ. 1982. Т. 46. № 1. С. 83–95.
5. Hudson J., Harris D. A high resolution scheme for Eulerian gas–solid two-phase isentropic flow // *Journal of Computational Physics*. 2006. V. 216. P. 494–525.
  6. Садин Д.В. Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных течений газа в пористой среде // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 10. С. 158–164.
  7. Садин Д.В. Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. № 6. С. 1033–1039.
  8. Садин Д.В. О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. № 9. С. 1572–1577.
  9. Садин Д.В. Проблема жесткости при моделировании волновых течений гетерогенных сред с трехтемпературной схемой межфазного тепло- и массообмена // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 2. С. 136–141.
  10. Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S. Shock jump relations for multiphase mix-tures with stiff mechanical relaxation // *Shock Waves*. 2007. V. 16. N 3. P. 209–232.
  11. Saurel R., Petitpas F., Berry R.A. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // *Journal of Computational Physics*. 2009. V. 228. N 5. P. 1678–1712. doi: 10.1016/j.jcp.2008.11.002
  12. Садин Д.В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098–2109. doi: 10.7868/S0044466916120152
  13. Садин Д.В., Варварский В.М. Особенности нестационарного истечения газодисперсной среды в вакуум // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 3. С. 39–48. doi: 10.15372/PMTF20160305
  14. Садин Д.В., Любарский С.Д., Гравченко Ю.А. Особенности недорасширенной импульсной импактной газодисперсной струи с высокой концентрацией частиц // ЖТФ. 2017. Т. 87. №1. С. 22–26. doi: 10.21883/JTF.2017.01.44013.1809
  15. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // *Journal of Computational Physics*. 1996. V. 126. P. 202–228. doi: 10.1006/jcph.1996.0130
  16. Булат П.В., Волков К.Н. Одномерные задачи газовой динамики и их решение при помощи разностных схем высокой разрешающей способности // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 4. С. 731–740. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-4-731-740
  17. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2003. V. 25. № 3. P. 995–1017.
  18. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *Journal of Computational Physics*. 1984. V. 54. № 1. P. 115–173. doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6
  19. Иванов А.С., Козлов В.В., Садин Д.В. Нестационарное истечение двухфазной дисперсной среды из цилиндрического канала конечных размеров в атмосферу // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 60–66.
  4. Klebanov L.A., Kroshilin A.E., Nigmatulin B.I., Nigmatulin R.I. On the hyperbolicity, stability and correctness of the Cauchy problem for the system of equations of two-speed motion of two-phase media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, no.1, pp. 66–74. doi: 10.1016/0021-8928(82)90084-3
  5. Hudson J., Harris D. A high resolution scheme for Eulerian gas–solid two-phase isentropic flow. *Journal of Computational Physics*, 2006, vol. 216, pp. 494–525. doi: 10.1016/j.jcp.2005.12.010
  6. Sadin D.V. A modified large-particle method for calculating unsteady gas flows in a porous medium. *Comp. Maths Math. Phys.*, 1996, vol. 36, no. 10, pp. 1453–1458.
  7. Sadin D.V. A method for computing heterogeneous wave flows with intense phase interaction. *Comp. Maths Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 6, pp. 987–993.
  8. Sadin D.V. On the convergence of a certain class of difference schemes for the equations of unsteady gas motion in a disperse medium. *Comp. Maths Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 9, pp. 1508–1513.
  9. Sadin D.V. Stiffness problem in modeling wave flows of heterogeneous media with a three-temperature scheme of interphase heat and mass transfer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 2, pp. 286–290.
  10. Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation. *Shock Waves*, 2007, vol. 16, no. 3, pp. 209–232.
  11. Saurel R., Petitpas F., Berry R.A. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 2009, vol. 228, no. 5, pp. 1678–1712. doi: 10.1016/j.jcp.2008.11.002
  12. Sadin D.V. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 12, pp. 2068–2078. doi: 10.1134/S0965542516120137
  13. Sadin D.V., Varvarkii V.M. Specific features of unsteady exhaustion of a gas–particle medium into vacuum. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 422–431. doi: 10.1134/S0021894416030056
  14. Sadin D.V., Lyubarskii S.D., Gravchenko Yu.A. Features of an underexpanded pulsed impact gas-dispersed jet with a high particle concentration. *Technical Physics*, 2017, vol. 62, no. 1, pp. 18–23. doi: 10.1134/S1063784217010194
  15. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 126, pp. 202–228. doi: 10.1006/jcph.1996.0130
  16. Bulat P.V., Volkov K.N. One-dimensional gas dynamics problems and their solution based on high-resolution finite difference schemes. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 4, pp. 731–740. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-4-731-740
  17. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2003, vol. 25, no. 3, pp. 995–1017.
  18. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 1984, vol. 54, no. 1, pp. 115–173. doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6
  19. Ivanov A.S., Kozlov V.V., Sadin D.V. Unsteady flow of a two-phase disperse medium from a cylindrical channel of finite dimensions into the atmosphere. *Fluid Dynamics*, 1996, vol. 31, no. 3, pp. 386–391. doi:

### Авторы

**Садин Дмитрий Викторович** – доктор технических наук, профессор, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, sadin@yandex.ru

**Одоев Сергей Александрович** – начальник учебной лаборатории, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, odoev@list.ru

### Authors

**Dmitry V. Sadin** – D.Sc., Full Professor, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, sadin@yandex.ru

**Sergey A. Odoev** – Head of Educational Laboratory, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, odoev@list.ru