

УДК 512:517.962:62.50

## ОЦЕНКА СИГНАЛЬНОЙ НЕВЯЗКИ В ЗАДАЧЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

А.С. Павлов<sup>а</sup>, А.В. Ушаков<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: a.s.pavlov@email.su

### Информация о статье

Поступила в редакцию 02.12.16, принята к печати 18.05.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-658-663

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Павлов А.С., Ушаков А.В. Оценка сигнальной невязки в задаче эквивалентного представления дискретной системы // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 4. С. 658–663. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-658-663

### Аннотация

**Предмет исследования.** Рассмотрены проблемы эквивалентного представления результата дискретного описания непрерывной системы дискретным описанием с интервалом дискретности меньшим первоначального при условии, что в качестве элемента памяти при цифровом управлении непрерывными объектами используются экстраполяторы нулевого порядка. Показано, что в связи со сказанным встает проблема оценки сигнальной невязки в задаче эквивалентного представления указанных дискретных систем. **Метод.** Метод оценки сигнальной невязки опирается на возможности аппарата пространства состояний в рамках использования интегральных представлений уравнения динамики непрерывной системы. Скалярная аналитическая оценка сигнальной невязки между исходной и преобразованной системами сформирована по норме разности векторов вынужденного движения систем. **Основные результаты.** Решена задача получения оценки границ интервала скалярного значения сигнальной невязки векторов состояний исходной и полученной систем. Получено аналитическое выражение для указанной оценки, на основании которого сформированы рекомендации по построению эквивалентной системы с меньшим интервалом дискретности. **Практическая значимость.** Основной областью использования результатов исследования является практика применения в разработке и анализе многоканальных дискретных систем в задачах управления сложными технологическими ресурсами для ситуации, когда система функционирует с различными интервалами дискретности отдельных каналов.

### Ключевые слова

дискретные системы, различные интервалы дискретности, скалярные оценки процессов, экстраполятор нулевого порядка, эквивалентные системы, многоканальные системы

### Благодарности

Работа написана при поддержке Правительства Российской Федерации (Грант 074-U01), Министерства образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031), гранта Президента Российской Федерации №14.Y31.16.9281-НШ.

## SIGNAL DISCREPANCY ESTIMATION IN EQUIVALENT REPRESENTATION PROBLEM OF DISCRETE SYSTEM

A.S. Pavlov<sup>а</sup>, A.V. Ushakov<sup>а</sup>

<sup>а</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: a.s.pavlov@email.su

### Article info

Received 02.12.16, accepted 18.05.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-658-663

Article in Russian

**For citation:** Pavlov A.S., Ushakov A.V. Signal discrepancy estimation in equivalent representation problem of discrete system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 658–663 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-658-663

### Abstract

**Subject of Research.** The considered problems are representations of the discrete equivalent description of a continuous system to a discrete description with smaller interval than the original one provided that the zero-order hold devices are used as a memory element in the digital control of continuous system. It is shown that in connection with the above, there is a problem of the signal discrepancy estimation in the task of equivalent representation of these discrete systems. **Method.**

Estimation method of signal discrepancy relies on the capabilities of the state space framework with the use of integral representations of continuous system dynamics equation. The scalar analytical assessment of a signal discrepancy between the initial and transformed systems is created on a difference norm of vectors of stimulated system movement. **Main Results.** The assessment problem is solved for boundaries of the scalar value interval for signal discrepancy state vectors of the source and resulting systems. Analytical expression for this case is received, and recommendations about the equivalent system formation with a smaller discrete interval are created on its basis. **Practical Relevance.** The obtained theoretical results can be used in the development and analysis of MIMO discrete systems when the system has different discrete intervals of separate channels.

**Keywords**

discrete systems, different discrete intervals, scalar value estimation, zero-order hold device, equivalent systems, MIMO systems

**Acknowledgements**

This work was supported by the Government of the Russian Federation (Grant 074-U01), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project 14.Z50.31.0031) and the Russian Federation President Grant No.14.Y31.16.9281-НШ.

**Введение**

В результате синтеза систем управления с использованием цифровых аппаратных средств разработчик приводит исходную непрерывную систему к дискретному виду с требуемым интервалом дискретности. При работе с многоканальной системой может появиться ситуация, когда необходимо использовать разные интервалы дискретности для различных каналов. В результате появляется проблема аналитической оценки качественных показателей многоканальной системы, в связи с чем возникает потребность получить эквивалентное представление сепаратного канала с иным интервалом дискретности, так как для корректного математического описания единой системы необходимо приводить систему к одному интервалу дискретности. Основная сложность получения эквивалентной системы с другим интервалом дискретности с сохранением динамических свойств системы с прежним интервалом дискретности возникает только в переходе экстраполятор-непрерывная система.

Экстраполяторы (элементы памяти) нулевого порядка являются самыми распространенными элементами при использовании цифрового управления непрерывными объектами. Экстраполятор может быть представлен с помощью передаточной функции, полученной по его импульсной характеристике [1, 2]. Такое представление достаточно сложно, и для упрощения его заменяют на задержку. Величина задержки зависит от требований к анализу системы. В [1] предлагается заменять экстраполятор с интервалом дискретности  $\Delta t$  на задержку  $\Delta t$ . В [2, 3] предлагается заменять на задержку  $\Delta t/2$ . Потребность в преобразовании модели экстраполятора возникает также при наличии в одной системе экстраполяторов с разным интервалом дискретности. Так, в [4] предлагается переход к максимальному интервалу дискретности и замене импульсного элемента с меньшим интервалом на сумму из несинхронных параллельных импульсных элементов. Такое представление громоздко и усложняет составление финальной модели.

В конечном итоге наиболее распространенным решением получения модели экстраполятора является его замена на элемент задержки длительности  $\Delta t/2$ . Такое решение было использовано в [5] при переходе к меньшему интервалу дискретности, основываясь на «гипотезе фильтра» без оценки погрешности такого представления, что влечет ошибку при анализе преобразованной системы по отношению к исходной. Проблеме оценки этой ошибки и посвящена настоящая работа.

**Формирование сигнальной невязки**

Рассматривается дифференциальная модель сепаратного канала многоканальной непрерывной линейной устойчивой системы [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  – матрица состояния;  $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$  – матрица входов;  $\mathbf{C} \in R^{m \times n}$  – матрица выходов;  $u(t) \in R^m$  – входное воздействие;  $\mathbf{y}(t) \in R^m$  – выход системы;  $\mathbf{x}(t) \in R^n$  – вектор состояния размерности  $n$ , в дальнейшем  $m = 1$ ,  $t$  – непрерывное время.

Интегральная модель [7, 8] «вход–состояние–выход» линейной системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t, \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

где  $\Phi(t) = e^{At}$  – фундаментальная матрица объекта;  $\Phi(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}$  – переходная матрица системы;  $\tau$  – независимая переменная. Перейдем к дискретному описанию системы (1), положив  $t = k\Delta t$  с учетом следующего предположения.

**Предположение 1.** Интервал дискретности  $\Delta t$  выбран таким образом, чтобы выполнялась теорема Котельникова–Шеннона [9, 10] так, что  $\frac{\pi}{\Delta t} = \Delta\omega = \arg \left\{ \left\| M(\omega) \right\|_{\omega \leq \Delta\omega} \leq \delta = 0,05 \right\}$ , где  $M(\omega) = \text{mod} \left\{ \Phi(j\omega) = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \right\}$  – амплитудная частотная характеристика отношения «вход–выход» непрерывной системы.

При переходе к дискретной модели в случае использования экстраполятора нулевого порядка [4, 11–14] с интервалом дискретности  $\Delta t$  имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k\Delta t) &= \mathbf{x}_{\text{св}}(k\Delta t) + \mathbf{x}_{\text{в}}(k\Delta t), \\ \mathbf{x}_{\text{св}}(k\Delta t) &= e^{A\Delta t} \mathbf{x}([k-1]\Delta t), \\ \mathbf{x}_{\text{в}}(k\Delta t) &= e^{A\Delta t} \int_{[k-1]\Delta t}^{k\Delta t} e^{-A\tau} d\tau \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t) = e^{A\Delta t} \left( -\mathbf{A}^{-1} e^{-A\tau} \Big|_{[k-1]\Delta t}^{k\Delta t} \right) \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t) = \\ &= e^{A\Delta t} \left( -e^{-A\Delta t} + e^{-A[k-1]\Delta t} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t) = \left( e^{A\Delta t} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}_{\text{св}}$ ,  $\mathbf{x}_{\text{в}}$  – свободная и вынужденная составляющая соответственно,  $\mathbf{I} \in R^{n \times n}$  – единичная матрица.

**Замечание 1.** При использовании экстраполятора нулевого порядка было использовано следующее представление входного воздействия:

$$\begin{aligned} u(t) &= u([k-1]\Delta t) + \Delta u(t), k = 1, 2, 3... \\ \Delta u(t) &= 0, \end{aligned}$$

в котором игнорируется динамика входного воздействия  $u(t)$  внутри интервала  $\Delta t$ .

Теперь найдем дискретное описание системы (1) на интервале  $[(k-1), k]\Delta t$  при использовании другого экстраполятора нулевого порядка с интервалом дискретности  $\Delta t/r$ , где  $r$  – целое число, при котором учитывается динамика входного воздействия внутри интервала  $[(k-1), k]\Delta t$ . Тогда для свободной и вынужденной составляющей будем иметь цепочку соотношений. На первом шаге система имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{св}} \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right) &= e^{\frac{A\Delta t}{r}} \mathbf{x}([k-1]\Delta t); \\ \mathbf{x}_{\text{в}} \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right) &= e^{A \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right)} \cdot \int_{[k-1]\Delta t}^{[k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r}} e^{-A\tau} d\tau \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t) = \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t), \end{aligned} \quad (3)$$

на втором –

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \left( [k-1]\Delta t + 2 \frac{\Delta t}{r} \right) &= e^{\frac{A\Delta t}{r}} \mathbf{x} \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right) + \\ &+ e^{A \left( [k-1]\Delta t + 2 \frac{\Delta t}{r} \right)} \cdot \int_{[k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r}}^{[k-1]\Delta t + 2 \frac{\Delta t}{r}} e^{-A\tau} d\tau \cdot \mathbf{B} \cdot u \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right) = \\ &= e^{\frac{A\Delta t}{r}} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} \mathbf{x}([k-1]\Delta t) + \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t) \right) + \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично (3) и (4) в конечной точке интервала  $[(k-1), k]\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \left( [k-1]\Delta t + r \frac{\Delta t}{r} \right) &= e^{\frac{A\Delta t}{r}} \mathbf{x} \left( [k-1]\Delta t + (r-1) \frac{\Delta t}{r} \right) + e^{A \left( [k-1]\Delta t + r \frac{\Delta t}{r} \right)} \cdot \int_{[k-1]\Delta t + (r-1) \frac{\Delta t}{r}}^{[k-1]\Delta t + r \frac{\Delta t}{r}} e^{-A\tau} d\tau \cdot \mathbf{B} \cdot u \left( [k-1]\Delta t + (r-1) \frac{\Delta t}{r} \right) = \\ &= e^{A\Delta t} \mathbf{x}([k-1]\Delta t) + e^{A \left( [k-1]\Delta t + (r-1) \frac{\Delta t}{r} \right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t) + \dots + \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u \left( [k-1]\Delta t + (r-1) \frac{\Delta t}{r} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

В результате очевидно равенство свободной составляющей движения для (2) и (5). Потребуем выполнения равенства вынужденной составляющей в моменты  $k\Delta t$ .

Представим входное воздействие  $u(t)$  в окрестности точки  $[k-1]\Delta t$  с помощью ряда Тейлора:

$$u(t) = u([k-1]\Delta t) + \Delta u(t), k = 1, 2, 3...$$

$$\Delta u(t) = \frac{u([k-1]\Delta t)'(t-[k-1]\Delta t)}{1!} + \frac{u([k-1]\Delta t)''(t-[k-1]\Delta t)^2}{2!} + \dots \neq 0 \quad (6)$$

Выделим и преобразуем в (5) матричные коэффициенты при  $u([k-1]\Delta t)$ :

$$\begin{aligned} & e^{A\Delta t \left(\frac{r-1}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) + e^{A\Delta t \left(\frac{r-2}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) + \dots + e^{A\Delta t \left(\frac{1}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) + \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) = \\ & = e^{A\Delta t} - e^{A\Delta t \left(\frac{r-1}{r}\right)} + e^{A\Delta t \left(\frac{r-1}{r}\right)} - e^{A\Delta t \left(\frac{r-2}{r}\right)} + \dots + e^{A\Delta t \left(\frac{2}{r}\right)} - e^{A\Delta t \left(\frac{1}{r}\right)} + e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} = e^{A\Delta t} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (7)$$

В итоге с использованием (7) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \left( [k-1]\Delta t + r \frac{\Delta t}{r} \right) &= e^{A\Delta t} \mathbf{x}([k-1]\Delta t) + (e^{A\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot u([k-1]\Delta t) + \\ &+ e^{A\Delta t \left(\frac{r-2}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta u \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right) + \dots + \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta u \left( [k-1]\Delta t + (r-1) \frac{\Delta t}{r} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8), вычитая (2), имеем ошибку

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(k\Delta t) &= e^{A\Delta t \left(\frac{r-2}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta u \left( [k-1]\Delta t + \frac{\Delta t}{r} \right) + \dots \\ &\dots + \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta u \left( [k-1]\Delta t + (r-1) \frac{\Delta t}{r} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Для целей дальнейших исследований в выражении (6) ограничимся первыми членами разложения:

$$\Delta u(t) \approx \alpha \cdot (t - [k-1]\Delta t), \quad (10)$$

$$\alpha > 0, t \in ([k-2]\Delta t, k\Delta t), k > 0,$$

где  $\alpha$  – скалярный коэффициент, что основано на малости  $\Delta u(t)$  при выборе экстраполятора нулевого порядка.

Для минимизации ошибки в точке  $k\Delta t$  введем задержку входного сигнала на величину  $\tau$ . Перейдя [15] к нормам в выражении ошибки (9) и применив (10), имеем:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\| &\leq \left\| e^{A\Delta t \left(\frac{r-2}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right\| \cdot \left\| \Delta u \left( [k-1]\Delta t - \tau + \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| + \dots \\ &\dots + \left\| \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right\| \cdot \left\| \Delta u \left( [k-1]\Delta t - \tau + (n-1) \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \\ \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\| &\leq \left\| e^{A\Delta t \left(\frac{r-2}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right\| \cdot \left\| \alpha \cdot \left( -\tau + \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| + \dots \\ &\dots + \left\| \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right\| \cdot \left\| \alpha \cdot \left( -\tau + (r-1) \frac{\Delta t}{r} \right) \right\|. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем выражение (11):

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\| &\leq \sum_{i=1}^{r-1} \left( \left\| e^{A\Delta t \left(\frac{r-1-i}{r}\right)} \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right\| \cdot \left\| \alpha \cdot \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right) \\ \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\| &\leq \left\| \left( e^{\frac{A\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \alpha \right\| \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \left( \left\| e^{A\Delta t \left(\frac{r-1-i}{r}\right)} \right\| \cdot \left\| \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя (12), найдем такое  $\tau$ , при котором ошибка будет минимальна:

$$\min \{ \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\| \}, \tau : \min \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \left( \left\| e^{A\Delta t \left(\frac{r-1-i}{r}\right)} \right\| \cdot \left\| \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right) \right\}. \quad (13)$$

Заметим, что в силу Предположения 1 на минимум ошибки слабо влияет изменение матричной экспоненты в пределах  $\Delta t$ . В связи с этим выражение (13) можно упростить, проигнорировав динамику экспоненты:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \left( \left\| e^{A\Delta t \left( \frac{r-1-i}{r} \right)} \cdot \left\| \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right) \right\} \rightarrow \min \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \left\| \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right\}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть [16], что на основании (14) становится справедливым выражение

$$\tau = \Delta t \cdot \arg \min_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \left\| \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right\} = \frac{\Delta t}{2}. \quad (15)$$

В итоге ошибка  $\|\epsilon(\tau)\|$  будет минимальна при (15). Следовательно, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Дискретная система, полученная в результате агрегирования экстраполятора нулевого порядка с интервалом дискретности  $\Delta t$  и непрерывной системой, с учетом выполнения Предположения 1 имеет эквивалентное представление в виде дискретной системы, полученной в результате агрегирования экстраполятора нулевого порядка с меньшим интервалом дискретности и непрерывной системой с введением на входе задержки  $\tau = \Delta t/2$ .

### Основной результат. Оценка сигнальной невязки

Воспользуемся Утверждением 1. Для перехода от дискретной системы, образованной путем агрегирования непрерывной части с экстраполятором нулевого порядка с интервалом дискретности  $\Delta t$ , к системе с интервалом дискретности  $\Delta t/r$  и сохранением поведения системы в точках  $t = k\Delta t$  с исходным интервалом дискретности  $\Delta t$  достаточно стандартного перехода к дискретной системе с включением на входе элемента задержки  $\tau = \Delta t/2$ . Учитывая специфику дискретных систем, можно представить задержку  $\tau = \Delta t/2$  в виде цепочки дискретных элементов задержки нового представления дискретной системы. Однако не всегда задержка  $\tau = \Delta t/2$  будет кратна  $\Delta t/r$ . Для решения этой задачи рассмотрим выражение ошибки, полученное выше:

$$\|\epsilon(\tau)\| \leq \left\| \left( e^{A\frac{\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \alpha \right\| \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \left( \left\| e^{A\Delta t \left( \frac{r-1-i}{r} \right)} \cdot \left\| \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right). \quad (16)$$

Найдем выражение для коэффициента  $\alpha$ . Учитывая предположение о выполнении теоремы Котельникова–Шеннона, будем считать, что максимальная частота входного воздействия  $\Delta u(t)$  составляет величину  $\omega = \pi/\Delta t$ . Также введем предположение, что в окрестности точки  $t = k\Delta t$ , в которой произошло квантование входного сигнала, достаточно представления сигнала первыми двумя членами ряда Тейлора. Рассмотрим гармоническое воздействие с частотой  $\omega = \pi/\Delta t$ , для которого максимальное значение производной составит величину  $\pi/\Delta t$ , откуда для второго члена ряда максимальный коэффициент будет  $\pi/\Delta t$ . В итоге имеем  $\alpha \leq \pi/\Delta t$ . Модифицируем выражение (16):

$$\|\epsilon(\tau)\| \leq \left\| \left( e^{A\frac{\Delta t}{r}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\pi}{\Delta t} \right\| \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \left( \left\| e^{A\Delta t \left( \frac{r-1-i}{r} \right)} \cdot \left\| \left( -\tau + i \frac{\Delta t}{r} \right) \right\| \right). \quad (17)$$

График зависимости ошибки от величины запаздывания  $\tau$  представлен на рисунке.

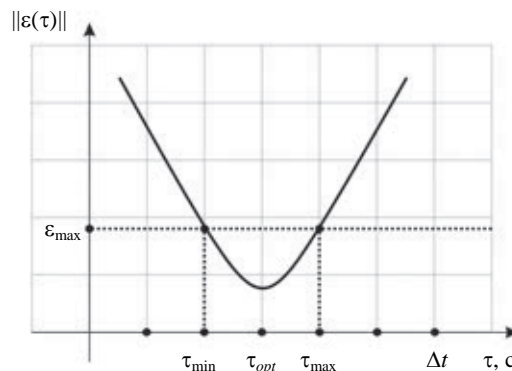


Рисунок. Ошибка, порождаемая переходом к меньшему интервалу дискретности

Будем считать, что существует такая  $\epsilon_{max}$ , которой можно пренебречь. Тогда можно выбрать задержку  $\tau_{opt} \in [\tau_{min}, \tau_{max}]$ .

Таким образом, при анализе многоканальных систем с различными интервалами дискретности сепаратных достаточно следовать следующему утверждению.

**Утверждение 2.** Дискретная система, полученная в результате агрегирования экстраполятора нулевого порядка с интервалом дискретности  $\Delta t$  и непрерывной системой (1), с учетом выполнения Предположения 1 имеет эквивалентное представление в виде дискретной системы, полученной в результате агрегирования экстраполятора нулевого порядка с меньшим интервалом дискретности  $\Delta t_r = \Delta t/r$  и непрерывной системой, с введением на входе цепочки из  $r/2$  дискретных элементов задержки при четном  $r$  и из  $(r-1)/2$  дискретных элементов задержки при нечетном  $r$ .

### Заключение

Полученные результаты могут быть применены при анализе процессов в многоканальных дискретных системах, построенных на сепаратных каналах с разными интервалами дискретности, путем перехода к единому интервалу дискретности. Представлен способ получения оценки (17) сигнальной невязки при таком переходе в случае использования представления экстраполятора нулевого порядка в виде элемента задержки. На основе предложенной оценки можно сделать вывод об адекватности использованного представления.

### Литература

1. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 576 с.
2. Солодовников В.В., Коньков В.Г., Суханов В.А., Шевяков О.В. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы. М.: Высшая школа, 1991. 255 с.
3. Kuo B.C. Digital Control Systems. Oxford University Press, 1995. 784 p.
4. Tou J.T. Digital and Sampled-data Control Systems. NY: McGraw-Hill Inc., 1959. 631 p.
5. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Контроль вырождения дискретных многоканальных систем с кратными интервалами дискретности // Автометрия. 2012. Т. 48. № 5. С. 66–73.
6. Быстров С.В., Григорьев В.В., Рабыш Е.Ю., Черевко Н.А. Экспоненциальная устойчивость непрерывных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2011. № 3 (73). С. 44–47.
7. Tou J.T. Modern Control Theory. NY: McGraw-Hill, 1964.
8. Zadeh L.A., Desoer C.A. Linear System Theory: The State Space Approach. NY: McGraw-Hill, 1963. 628 p.
9. Shannon C.E. A mathematical theory of communication // Bell System Technical Journal. 1948. V. 27. P. 379–423.
10. Котельников В.А. О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи (Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. 1933) // УФН. 2006. Т. 176. №7. С. 762–770. doi: 10.3367/UFN.0176.200607h.0762
11. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 968 с.
12. Isermann R. Digital Control Systems. V. 1: Fundamentals, Deterministic Control. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989. 336 p. doi: 10.1007/978-3-642-86417-9
13. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963. 456 с.
14. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
15. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
16. Xu Jiagu. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses V. 8. For Senior Section (V. 1). World Scientific, 2012. 260 p.

### Авторы

**Павлов Андрей Сергеевич** – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, a.s.pavlov@email.su

**Ушаков Анатолий Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ushakov-avg@yandex.ru

### References

1. Besekerskii V.A. Digital Automatic Systems. Moscow, Nauka Publ., 1976, 576 p. (In Russian)
2. Solodovnikov V.V., Kon'kov V.G., Sukhanov V.A., Shevyakov O.V. Microprocessor-Based Automatic Control Systems. Basics of Theory and Elements. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1991, 255 p. (In Russian)
3. Kuo B.C. Digital Control Systems. Oxford University Press, 1995, 784 p.
4. Tou J.T. Digital and Sampled-data Control Systems. NY, McGraw-Hill Inc., 1959, 631 p.
5. Dudarenko N.A., Polyakova M.V., Ushakov A.V. Control of degeneration of discrete multichannel systems with multiple discrete intervals. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 66–78.
6. Bystrov S.V., Grigoriev V.V., Rabysh E.Yu., Cherevko N.A. Exponential stability of continuous dynamic systems. Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2011, no. 3, pp. 44–47. (In Russian)
7. Tou J.T. Modern Control Theory. NY, McGraw-Hill, 1964.
8. Zadeh L.A., Desoer C.A. Linear System Theory: The State Space Approach. NY, McGraw-Hill, 1963, 628 p.
9. Shannon C.E. A mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal, 1948, vol. 27, pp. 379–423.
10. Kotelnikov V.A. On the transmission capacity of 'ether' and wire in electric communications. Physics-Uspekhi, 2006, vol. 49, pp. 736–744. doi: 10.1070/PU2006v049n07ABEH006160
11. Tsympkin Ya.Z. Theory of Linear Pulse Systems. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 968 p.
12. Isermann R. Digital Control Systems. V. 1: Fundamentals, Deterministic Control. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989, 336 p. doi: 10.1007/978-3-642-86417-9
13. Jury E.I. Sampled-Data Control Systems. NY, John Wiley & Sons, 1958.
14. Grigor'ev V.V., Drozdov V.N., Lavrent'ev V.V., Ushakov A.V. Synthesis of Digital Systems Using Computer Controls. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1983, 245 p. (In Russian)
15. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matrices and Calculations. Moscow, Nauka Publ., 1984, 320 p.
16. Xu Jiagu. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses V. 8. For Senior Section (V. 1). World Scientific, 2012, 260 p.

### Authors

**Andrey S. Pavlov** – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, a.s.pavlov@email.su

**Anatoly V. Ushakov** – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ushakov-avg@yandex.ru