

УДК 519.216:62.53

## ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МНОГОКАНАЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ ПРИ БЕЛОШУМНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Н.А. Вундер<sup>а</sup>, Н.А. Дударенко<sup>а</sup>, П.И. Захарова<sup>а</sup>, А.В. Ушаков<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: [polinova\\_nina@mail.ru](mailto:polinova_nina@mail.ru)

### Информация о статье

Поступила в редакцию 24.04.17, принята к печати 18.07.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-938-946

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Вундер Н.А., Дударенко Н.А., Захарова П.И., Ушаков А.В. Формирование матриц спектральных плотностей многоканальных непрерывных систем при белом шумных воздействиях // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 5. С. 938–946. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-938-946

### Аннотация

**Предмет исследования.** Для многоканальных непрерывных систем, возбуждаемых белым шумным векторным воздействием, предлагается алгоритм формирования матрицы спектральных плотностей выхода системы, используемой в следующих случаях. Первый случай состоит в выделении сепаратного канала системы, который возбуждается скалярным белым шумом. В этом случае матрица спектральной плотности будет скалярной. Второй случай возникает при возбуждении системы векторным белым шумом с компонентами различной интенсивности, а интерес представляет стохастический процесс на выбранном выходе. В этом случае матрица спектральных плотностей выхода также является скалярной и становится функцией спектральных плотностей. В третьем случае система возбуждается векторным белым шумом с компонентами различной интенсивности, при этом интерес представляет матрица спектральной плотности векторного выхода. **Метод.** Построение алгоритма основано на использовании матричного уравнения Ляпунова и интеграла Винера–Колмогорова–Хинчина. Скаляризация частотного представления стохастического вектора выхода системы осуществляется как на основе поканального формирования функций спектральных плотностей, так и с помощью сингулярного разложения матрицы спектральной плотности выхода для формирования мажоранты и миноранты спектральных плотностей в пространстве выходов системы. **Основные результаты.** Для многоканальных систем, функционирующих в условиях стохастических воздействий, получен конструктивный алгоритм для исследования спектральных свойств систем как для случая сепаратных каналов, так и для случая векторного отношения «вход–выход». Таким образом, полученные результаты в своей алгоритмической основе инвариантны относительно размерности вход–выходных отношений. **Практическая значимость.** Результаты имеют практическую ценность для случаев, когда многоканальные системы функционируют при внешних воздействиях, не допускающих конечномерное их представление. Наиболее характерными примерами возможной применительной практики результатов статьи являются системы стабилизации пространственного положения функционального объекта при стохастических воздействиях, допускающих белом шумное представление.

### Ключевые слова

стохастическое воздействие, белый шум, многоканальная непрерывная система, уравнение Ляпунова, интеграл Винера–Колмогорова–Хинчина, матрица спектральной плотности, корреляционная матрица, сингулярное разложение матрицы

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (Грант 074-U01), Министерства образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031), гранта Президента Российской Федерации № 14.Y31.16.9281-НШ, а также при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-08-00997.

## GENERATION OF SPECTRAL DENSITY MATRICES FOR MULTICHANNEL CONTINUOUS SYSTEMS UNDER WHITE NOISE ACTION

N.A. Vunder<sup>а</sup>, N.A. Dudarenko<sup>а</sup>, P.I. Zaharova<sup>а</sup>, A.V. Ushakov<sup>а</sup>

<sup>а</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: [polinova\\_nina@mail.ru](mailto:polinova_nina@mail.ru)

### Article info

Received 24.04.17, accepted 18.07.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-938-946

Article in Russian

**For citation:** Vunder N.A., Dudarenko N.A., Zaharova P.I., Ushakov A.V. Generation of spectral density matrices for multichannel continuous systems under white noise action. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 938–946 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-938-946

#### Abstract

**Subject of Research.** We propose an algorithm of spectral density matrix generation for an output of multichannel continuous systems under vector white noise action. The spectral density matrix is used for the following cases. In the first case, a separate channel of the system is considered. The channel is excited by a scalar white noise. In this case, the spectral density matrix is scalar. In the second case, the system is excited by a vector white noise with components of different intensities. Stochastic process of the selected output is of interest. In this case, the spectral density matrix of the output is scalar too and becomes the spectral density function. In the third case, the system is excited by a vector white noise with components of different intensities, like in the second case. But, spectral density matrix of vector output is considered. **Method.** The algorithm development is based on the use of Lyapunov matrix equation and Wiener-Kolmogorov-Khinchin integral. Scalarization of frequency representation of stochastic output vector is based on two methods. The first method is a per-channel generation of spectral density functions. The second method is a singular decomposition of the spectral density matrix of the output to form a majorant and a minorant of spectral densities in the output space of the system. **Main Results.** The constructive algorithm is obtained for studies of the system spectral properties both for the case of separate channels and for the case of vector "input-output" ratio. Thus, the results are invariant to the dimension of the input-output ratios. **Practical Relevance.** The results serve a useful purpose for the cases when multichannel systems operate under external actions undefinable by a finite-dimensional representation. The most illustrative application examples of the paper findings are the systems of stabilizing a plant spatial position under stochastic actions with white noise representation.

#### Keywords

stochastic action, white noise, multichannel continuous system, Lyapunov equation, Wiener-Kolmogorov-Khinchin integral, spectral density matrix, correlation matrix, singular value decomposition

#### Acknowledgments

This work was supported by the Government of the Russian Federation, Grant 074-U01, the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Project 14.Z50.31.0031, Russian Federation President Grant No.14.Y31.16.9281-НШ. This work was funded by the RFBR according to the research project No.16-08-00997.

### Введение. Постановка задачи

Количественная теория стационарных эргодических векторных стохастических процессов [1] строится на использовании трех матричных характеристик этих процессов [1–5]. Первой из них является его матрица дисперсий, второй – корреляционная матрица, третьей – матрица спектральных плотностей распределения энергии случайного процесса по оси частот или, коротко, матрица спектральных плотностей [3, 4, 6]. Каждая из перечисленных характеристик стохастического процесса имеет свое приложение к задачам теории и практики систем управления, функционирующих при стохастических внешних воздействиях. Настоящая работа ориентирована на проблемы анализа информационных возможностей в теории и практике непрерывных многоканальных систем, которые выполняет матрица спектральных плотностей переменных многоканальной системы.

Матрица дисперсий переменных выхода и ошибки многоканальной системы используется для количественной оценки качества процессов при стохастическом внешнем воздействии. Так, если стохастическое внешнее воздействие является полезным сигналом и система, вход которой возбуждается этим воздействием, должна его воспроизводить достаточно точно на своем выходе, то мерой качества воспроизведения внешнего воздействия будет дисперсия (среднеквадратическое отклонение) вектора ошибки. Если стохастическое внешнее воздействие является помехой и по условиям функционирования системы она не должна оказывать влияние на выход системы, то мерой качества воспроизведения внешнего воздействия будет дисперсия вектора выхода, причем система в этом случае должна быть наделена такими параметрами, при которых дисперсия выхода будет минимальна.

Корреляционная матрица чаще всего формируется для вектора выхода системы, внешнее воздействие которой является стохастическим. Основным пользовательским параметром корреляционной матрицы выхода является интервал корреляции, который фиксируется на заданном уровне нормы корреляционной матрицы выхода многоканальной системы. Интервал корреляции используется для организации дополнительной цифровой обработки выходной переменной системы, для чего требуется формировать отсчеты выходной переменной, которые бы были некоррелированными.

Матрица спектральных плотностей переменных многоканальной системы в основном используется в версии матрицы спектральных плотностей выходной переменной системы. В связи с тем, что в последнее время способ вычисления матрицы дисперсии вектора состояния многоканальной системы основывается [3, 4, 7–9] на решении матричного уравнения Ляпунова относительно матрицы дисперсий вектора состояния, то нагрузка на матрицу спектральных плотностей для вычисления матрицы дисперсий с помощью интегральных преобразований, приводящих к сложным аналитическим соотношениям [10], снялась. Содержательная нагрузка на матрицу спектральных плотностей вектора выхода многоканальной системы, являющейся основой для построения сепаратных функций спектральных плотностей компонентов выходной переменной, состоит в формировании частотной модели проектируемой системы [10]. К сказанному следует добавить, что использование возможностей векторно-матричного формализма аппа-

рата пространства состояний [8, 9, 11–13] позволяет для матриц спектральных плотностей получить компактное аналитическое представление.

**Формирование аналитического представления матриц спектральных плотностей переменных многоканальной системы для случая стохастического внешнего воздействия типа «векторный белый шум»**

Рассмотрим многоканальную непрерывную устойчивую систему, представленную в дифференциальной векторно-матричной форме,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{g}(t), \mathbf{x}(0) \equiv 0, \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{y}$  – соответственно вектора состояния, внешнего воздействия и выхода;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}$  – соответственно матрица состояния системы, матрица входа и матрица выхода; размерности векторно-матричных компонентов следующие:  $\dim(\mathbf{x}) = n$ ,  $\dim(\mathbf{g}) = m$ ,  $\dim(\mathbf{y}) = m$ ,  $\dim(\mathbf{F}) = n \times n$ ,  $\dim(\mathbf{G}) = n \times m$ ,  $\dim(\mathbf{C}) = m \times n$ . Внешнее воздействие  $\mathbf{g}(t)$  является стохастическим векторным процессом, стационарным в широком смысле [1], с нулевым математическим ожиданием  $M\{\mathbf{g}(t)\} \equiv 0$ , что в сочетании с условием  $\mathbf{x}(0) \equiv 0$  позволяет полагать, что все переменные системы (1) имеют стохастическую природу и характеризуются нулевыми математическими ожиданиями. Сказанное позволяет записать для переменных системы (1) соотношения, которые оказываются справедливыми в силу нулевого начального состояния системы (1) и нулевого математического ожидания внешнего стохастического воздействия.

А именно, для математического ожидания векторов состояния и выхода системы (1) оказываются справедливыми соотношения

$$M\{\mathbf{x}(t)\} = 0, M\{\mathbf{y}(t)\} = 0,$$

где  $M\{*(t)\}$  – операция вычисления математического ожидания переменной  $*(t)$ .

Для матриц дисперсии векторов состояния и выхода системы (1) справедливы [4, 5, 8, 9] представления

$$\mathbf{D}_x(t) = M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{D}_y(t) = M\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)\} = M\{\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{C}^T\} = \mathbf{C}M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}_x(t)\mathbf{C}^T.$$

В силу того, что система (1) асимптотически устойчива, значения матрицы дисперсий векторов состояния и выхода с течением времени становятся фиксированными, и потому оказываются справедливыми равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{D}_x(t) = \mathbf{D}_x; \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{D}_y(t) = \mathbf{C}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T. \quad (3)$$

Для корреляционной матрицы вектора состояния системы (1) в силу их определения [4, 5, 8, 9, 14] и свойства вектора состояния непрерывной системы можно записать выражения

$$\mathbf{R}_x(\tau) = M\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^T(t)\} = M\{e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\} = e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x, \tau > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_x(\tau) = M\{\mathbf{x}(t-\tau)\mathbf{x}^T(t)\} = e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x; \tau < 0. \quad (5)$$

Нетрудно показать, что для корреляционной матрицы вектора состояния системы оказываются справедливы представления

$$\mathbf{R}_x(\tau) = M\{\mathbf{y}(t+\tau)\mathbf{y}^T(t)\} = M\{\mathbf{C}\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{C}^T\} = \mathbf{C}e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T; \tau > 0,$$

$$\mathbf{R}_y(\tau) = M\{\mathbf{y}(t-\tau)\mathbf{y}^T(t)\} = \mathbf{C}e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T; \tau < 0.$$

Для вычисления матриц спектральных плотностей стохастических векторов состояния и выхода системы (1) воспользуемся теоремой Винера–Колмогорова–Хинчина [1, 15], в соответствии с которой матрица спектральных плотностей стохастического вектора представляет собой прямое преобразование Фурье корреляционных матриц соответствующего вектора. Тогда для матрицы  $\mathbf{S}_x(\omega)$  спектральных плотностей вектора состояния системы (1) получим на основании (4), (5) цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x(\omega) &= F\{\mathbf{R}_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{-\mathbf{F}\tau} \mathbf{D}_x e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{\mathbf{F}\tau} \mathbf{D}_x e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \left( \int_{-\infty}^0 e^{-\mathbf{F}\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{\mathbf{F}\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \mathbf{D}_x = \left( \int_{-\infty}^0 e^{-(\mathbf{F}+j\omega\mathbf{I})\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{(\mathbf{F}-j\omega\mathbf{I})\tau} d\tau \right) \mathbf{D}_x = \\ &= \left( -(\mathbf{F}+j\omega\mathbf{I})^{-1} e^{-(\mathbf{F}+j\omega\mathbf{I})\tau} \Big|_{-\infty}^0 + (\mathbf{F}-j\omega\mathbf{I})^{-1} e^{(\mathbf{F}-j\omega\mathbf{I})\tau} \Big|_0^{+\infty} \right) \mathbf{D}_x = \\ &= \left( -(\mathbf{F}+j\omega\mathbf{I})^{-1} (\mathbf{I}-0) + (\mathbf{F}-j\omega\mathbf{I})^{-1} (0-\mathbf{I}) \right) \mathbf{D}_x = -\left( (\mathbf{F}+j\omega\mathbf{I})^{-1} + (\mathbf{F}-j\omega\mathbf{I})^{-1} \right) \mathbf{D}_x, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $F\{*(\tau)\}$  – прямое преобразование Фурье от функции  $*(\tau)$ ,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $\omega$  – частота.

Для получения вещественнозначного представления матрицы  $S_x(\omega)$  спектральных плотностей вектора состояния системы (1) рассмотрим следующие вспомогательные соотношения

$$\mathbf{D}_x = \mathbf{I}\mathbf{D}_x, \quad (7)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная ( $n \times n$ ) матрица, допускающая представление

$$\mathbf{I} = (\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})(\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} = (\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I}), \quad (8)$$

где матричный сомножитель  $(\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})$ , в свою очередь, представим

$$(\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I}) = (\mathbf{F} + j\omega \mathbf{I})(\mathbf{F} - j\omega \mathbf{I}) = (\mathbf{F} - j\omega \mathbf{I})(\mathbf{F} + j\omega \mathbf{I}). \quad (9)$$

Последовательная подстановка соотношений (7), (8), (9) в (6) дает для матрицы спектральных плотностей вектора состояния вещественнозначное представление:

$$S_x(\omega) = -2\mathbf{F}(\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{D}_x. \quad (10)$$

Нетрудно показать, что матрица  $S_y(\omega)$  спектральных плотностей вектора выхода системы (1) может быть представлена в виде

$$S_y(\omega) = \mathbf{C}S_x(\omega)\mathbf{C}^T = -2\mathbf{C}\mathbf{F}(\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{D}_x \mathbf{C}^T. \quad (11)$$

Ключевым моментом формирования матриц спектральных плотностей векторов состояния и выхода многоканальной системы является знание матрицы  $\mathbf{D}_x$  дисперсии вектора состояния системы. Для случая, когда стохастическое внешнее воздействие  $\mathbf{g}(t)$  является белым шумом, оно может быть записано в форме  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{w}(t)$ , где  $\mathbf{w}(t)$  обладает [3, 4] следующими свойствами:

$$1. \quad M\{\mathbf{w}(t)\} = 0; \quad M\{\mathbf{w}(t+\tau)\mathbf{w}^T(t)\} = \mathbf{N}\delta(\tau);$$

где  $\mathbf{N}$  – матрица интенсивности векторного белого шума,  $\delta(\tau)$  – дельта-функция Дирака, задаваемая

$$\text{в форме } \delta(\tau) = \begin{cases} \infty & \text{при } \tau = 0 \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0 \end{cases}, \text{ что свидетельствует о бесконечности дисперсии непрерывного белого}$$

шума и его некоррелированности при любых сколь угодно малых значениях  $\tau$ ;

$$2. \text{ некоррелированности со всеми переменными системы } M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{w}^T(t)\} = 0, \quad M\{\mathbf{w}(t)\mathbf{x}^T(t)\} = 0,$$

$$M\{\mathbf{y}(t)\mathbf{w}^T(t)\} = 0, \quad M\{\mathbf{w}(t)\mathbf{y}^T(t)\} = 0.$$

Известно [3, 4, 7–9], что матрица дисперсий  $\mathbf{D}_x(t)$  (2) вектора состояний линейной непрерывной системы (1) типа «многомерный вход – многомерный выход», возбуждаемой стохастическим векторным внешним воздействием  $\mathbf{w}(t)$ , стационарным в широком смысле типа «белый шум» [1], определяется матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{D}}_x(t) = \mathbf{F}\mathbf{D}_x(t) + \mathbf{D}_x(t)\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T; \quad \mathbf{D}_x(t)|_{t=0} = \mathbf{D}_x(0). \quad (12)$$

Очевидно, в силу стационарности в широком смысле [1] векторного белого шума  $\mathbf{w}(t)$ , в случае гурвицевости матрицы состояния  $\mathbf{F}$  системы (1), значения матрицы дисперсий  $\mathbf{D}_x(t)$  и  $\mathbf{D}_y(t)$  с течением времени становятся фиксированными, и выполняются соотношения (3). В силу (12) матрица дисперсий  $\mathbf{D}_x$  вектора состояний системы (1) будет удовлетворять алгебраическому матричному уравнению Ляпунова

$$\mathbf{F}\mathbf{D}_x + \mathbf{D}_x\mathbf{F}^T = -\mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T. \quad (13)$$

Таким образом, формирование аналитического представления матриц спектральных плотностей переменных многоканальной системы для случая стохастического внешнего воздействия типа «векторный белый шум» может быть осуществлено с помощью следующего алгоритма.

1. Задать исследуемую многоканальную систему в векторно-матричной форме (1).

2. Задать матрицу  $\mathbf{N}$  интенсивностей белого шума в форме  $\mathbf{N} = \text{diag}(N_j; j = \overline{1, m})$ , где  $N_j$  – интенсивность белого шума компонента  $w_j(t)$  вектора белого шума  $\mathbf{w}(t)$ .

3. Решить матричное уравнение Ляпунова (13) относительно матрицы дисперсии  $\mathbf{D}_x$  вектора состояния системы (1).

4. С использованием соотношений (10) и (11) построить аналитическое представление матриц спектральных плотностей векторов состояния и выхода системы (1).

**Исследование спектральных свойств многоканальной системы на основе матрицы спектральной плотности вектора выхода при внешнем стохастическом воздействии типа «белый шум»**

Фактор многоканальности системы (1) порождает несколько вариантов схем исследования спектральных свойств системы при внешнем стохастическом воздействии типа «белый шум». Эти варианты таковы.

1. Скалярный белый шум  $w_j(t)$  интенсивности  $N_j$  прикладывается к  $j$ -му входу системы (1) ( $j = \overline{1, m}$ ), при этом эффект его воздействия на систему (1) фиксируется на  $l$ -ом выходе  $y_l(t)$  ( $l = \overline{1, m}$ ) в форме  $S_{y_l}(\omega)$  функции спектральной плотности этого сигнала. В этом варианте задача формирования функции спектральной плотности обеспечивается аналитическим соотношением (11), принимающим вид

$$S_{y_l}(\omega) = -2C^l F (F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x (C^l)^T, \quad (14)$$

и матричным уравнением Ляпунова (13)

$$F D_x + D_x F^T = -G_j N_j G_j^T, \quad (15)$$

в соотношениях  $C^l$  –  $l$ -ая строка матрицы  $C$  ( $l = \overline{1, m}$ ),  $G_j$  –  $j$ -й столбец матрицы  $G$  ( $j = \overline{1, m}$ ). Нетрудно видеть, что для случая  $j = l$  выражение (14) будет определять функцию спектральной плотности выхода  $(j, j)$ -го сепаратного канала многоканальной системы. Если  $j \neq l$ , то выражение (14) будет определять функцию спектральной плотности выхода  $(j, l)$ -го сепаратного канала. Причем, если многоканальная система состоит из  $m$  не связанных  $(j, j)$ -сепаратных каналов, то функции спектральных плотностей выходов  $(j, l)$ -х сепаратных каналов будут нулевыми. В случае, когда эти спектральные плотности – ненулевые, они будут свидетельствовать о величине «частотных» межканальных связей.

2. Векторный белый шум  $\mathbf{w}(t)$  матрицы интенсивности  $\mathbf{N}$  прикладывается ко всем входам системы (1), при этом эффект его воздействия на систему (1) фиксируется на  $l$ -ом выходе  $y_l(t)$  ( $l = \overline{1, m}$ ) в форме  $S_{y_l}(\omega)$  функции спектральной плотности этого сигнала. В этом варианте задача формирования функции спектральной плотности  $S_{y_l}(\omega)$  обеспечивается аналитическим соотношением (11), принимающим вид (14), и матричным уравнением Ляпунова (13). Нетрудно видеть, что этот вариант схемы исследования спектральных свойств многоканальной системы позволяет определить совокупный эффект воздействия векторного белого шума на спектральные свойства стохастического сигнала, наблюдаемого на  $l$ -ом сепаратном выходе системы.
3. Скалярный белый шум  $w_j(t)$  интенсивности  $N_j$  прикладывается к  $j$ -му входу системы (1) ( $j = \overline{1, m}$ ), при этом эффект его воздействия на систему (1) фиксируется на всех выходах  $y_l(t)$  ( $l = \overline{1, m}$ ) в форме  $\mathbf{S}_y(\omega)$  матрицы спектральной плотности стохастического вектора выхода этого сигнала. В этом варианте задача формирования матрицы спектральной плотности обеспечивается аналитическим соотношением (11) и матричным уравнением Ляпунова (13), принимающим вид (15).
4. Векторный белый шум  $\mathbf{w}(t)$  матрицы интенсивности  $\mathbf{N}$  прикладывается ко всем входам системы (1), при этом эффект его воздействия на систему (1) фиксируется на всех  $l$  выходах  $y_l(t)$  ( $l = \overline{1, m}$ ) в форме  $\mathbf{S}_y(\omega)$  матрицы спектральной плотности стохастического выходного векторного сигнала. В этом варианте задача формирования матрицы спектральной плотности  $\mathbf{S}_y(\omega)$  обеспечивается аналитическим соотношением (11) и матричным уравнением Ляпунова (13).

Нетрудно видеть, что в двух последних вариантах исследования спектральных свойств выхода многоканальной системы при скалярном и векторном стохастических входных воздействиях типа «белый шум» встает задача отыскать в пространстве выходов и входов два граничных подпространства, в одном из которых наблюдается максимальное значение на каждой частоте функции спектральной плотности выхода и, соответственно, минимальные значения функции спектральной плотности вектора выхода. Для решения этой задачи необходимо воспользоваться аппаратом сингулярного разложения [16] матрицы спектральной плотности вектора выхода  $\mathbf{S}_y(\omega)$ .

### Формирование скалярных функций спектральной плотности выходной переменной непрерывной системы

Как указывалось ранее, формирование скалярных функций спектральных плотностей выходной переменной непрерывной системы может быть осуществлено несколькими способами. Первый способ, основанный на выделении в системе отдельных каналов, приводит к необходимости рассмотрения непрерывных систем типа одномерный вход – одномерный выход, получающихся на основании (1) представления

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_j w_j(t); \mathbf{x}(0) = 0; y_l(t) = \mathbf{C}^l \mathbf{x}(t), \quad (16)$$

где  $\mathbf{G}_j, w_j(t)$  – соответственно  $j$ -й столбец матрицы входа  $\mathbf{G}$  системы и  $j$ -й элемент векторного внешнего стохастического воздействия типа «белый шум»  $\mathbf{w}(t)$ ;  $y_l(t)$  –  $l$ -й элемент вектора выхода,  $\mathbf{C}^l$  –  $l$ -я строка матрицы выхода  $\mathbf{C}$ ;  $j, l = \overline{1, m}$ . Для  $(j, l)$ -го отдельного канала (16) становится справедливой система соотношений (15) и

$$S_{y_l}(\omega) = -2\mathbf{C}^l \mathbf{F} (\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{D}_x (\mathbf{C}^l)^T.$$

Второй способ применяется для случая, когда внешнее стохастическое воздействие является векторным, при этом интерес представляют функции спектральной плотности для каждого компонента вектора выходной переменной. В этом случае математическое обеспечение решения задачи формирования скалярной функции спектральной плотности непрерывной системы (1) может быть представлено системой матричных соотношений:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t); \mathbf{x}(0) = 0; y_l(t) = \mathbf{C}^l \mathbf{x}(t),$$

при этом выполняются матричные соотношения

$$\mathbf{F}\mathbf{D}_x + \mathbf{D}_x \mathbf{F}^T = -\mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T, S_{y_l}(\omega) = -2\mathbf{C}^l \mathbf{F} (\mathbf{F}^2 + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{D}_x (\mathbf{C}^l)^T.$$

Третий способ основан на использовании сингулярного [16] разложения матрицы спектральной плотности  $\mathbf{S}_y(\omega)$ , в соответствии с которым ее можно представить в форме

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{U}(\omega) \mathbf{\Sigma}(\omega) \mathbf{V}^T(\omega), \quad (17)$$

где  $\mathbf{U}(\omega)$  и  $\mathbf{V}^T(\omega)$  – соответственно матрицы левого и правого сингулярных базисов, обладающих свойством  $\mathbf{U}(\omega) \mathbf{U}^T(\omega) = \mathbf{U}^T(\omega) \mathbf{U}(\omega) = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{V}(\omega) \mathbf{V}^T(\omega) = \mathbf{V}^T(\omega) \mathbf{V}(\omega) = \mathbf{I}$ , для  $\forall \omega$ ;  $\mathbf{\Sigma}(\omega) = \text{diag} \{ \alpha_i(\omega) = |\mu_i^{0,5}(\omega)| : \det(\mu_i(\omega) \mathbf{I} - \mathbf{S}_y^T(\omega) \mathbf{S}_y(\omega)) = 0; i = \overline{1, m} \}$ ,  $\alpha_i(\omega)$  – сингулярное число матрицы  $\mathbf{S}_y(\omega)$ . Тогда, в соответствии с (17), становятся справедливыми неравенства

$$\alpha_{\min}(\omega) = S_{y_{\min}}(\omega) \leq \|\mathbf{S}_y(\omega) \mathbf{V}_i(\omega)\| \leq S_{y_{\max}}(\omega) = \alpha_{\max}(\omega),$$

где  $\alpha_{\min}(\omega)$  и  $\alpha_{\max}(\omega)$  – соответственно минимальные и максимальные сингулярные числа матрицы  $\mathbf{S}_y(\omega)$ ;  $S_{y_{\min}}(\omega)$ ,  $S_{y_{\max}}(\omega)$  – соответственно миноранта и мажоранта функции спектральных плотностей выхода системы.

### Иллюстративный пример

В качестве иллюстративного примера рассматривается двухканальная линейная система углового пространственного слежения с перекрестными межканальными связями, структурное представление которой приведено на рис. 1, где  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  – стохастические внешние воздействия типа «белый шум»,  $W_1(s, \gamma\omega_0)$ ,  $W_2(s, \omega_0)$  – передаточные функции прямых ветвей системы.

Векторно-матричное представление системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{g}(t); \mathbf{x}(0) = 0; \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

где  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{w}(t)$  – векторный белый шум с матрицей интенсивности  $\mathbf{N}$ ;

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2(\gamma\omega_0)^2 \cos\mu & -v_1(\gamma\omega_0) & -v_2(\gamma\omega_0)^2 \sin\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_2\omega_0^2 \sin\mu & 0 & -v_2\omega_0^2 \cos\mu & v_1\omega_0 \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v_2(\gamma\omega_0)^2 \cos\mu & v_2(\gamma\omega_0)^2 \sin\mu \\ 0 & 0 \\ -v_2\omega_0^2 \sin\mu & v_2\omega_0^2 \cos\mu \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Будем исследовать систему, у которой при  $\mu = 0$  характеристический полином матрицы  $\mathbf{F}$  имеет биномиальное размещение корней, так что  $v_2 = C_n^n = C_2^2 = 1$ ,  $v_1 = C_n^1 = n = 2$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\gamma \in [0, 1; 10]$   $\mu \in [0^\circ; 45^\circ]$ , матрица интенсивностей  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ .

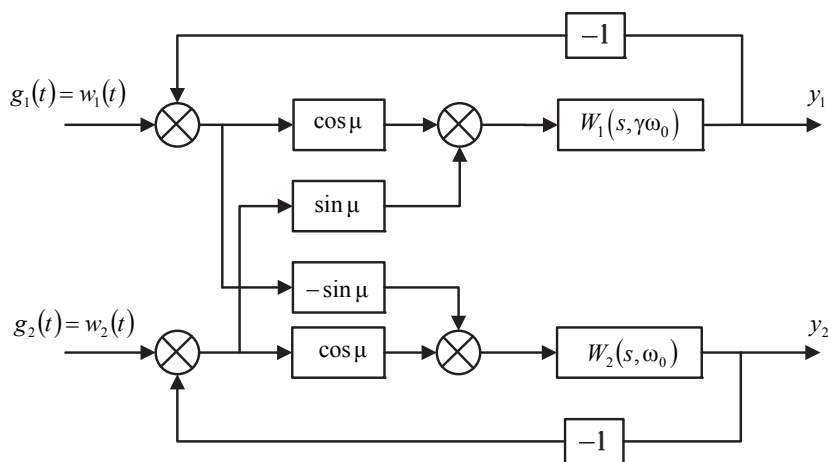


Рис. 1. Структурная схема системы

В задачу исследования входит:

1. проиллюстрировать корректность полученных соотношений (11) для случаев  $\mu = 0$  и  $\gamma = 0, 1; 1; 10$  с формированием кривых спектральных плотностей для каждого выхода;
2. с использованием соотношений (14), (15) при  $\mu \neq 0$  контролировать факт наличия межканальных связей на выходе системы при возмущении белым шумом отдельно по каждому входу;
3. при  $\mu \neq 0$ ,  $\gamma \neq 1$  и возмущении системы белым шумом по обоим входам сформировать кривые спектральной плотности по выходам, а также мажоранту и миноранту функции спектральной плотности стохастического векторного процесса на выходе системы с помощью сингулярного разложения матрицы спектральной плотности, реализуемого с помощью SVD-процедуры в пакете MATLAB<sup>1</sup>.

На рис. 2 представлены кривые спектральных плотностей по выходу системы  $y_1$  для значений  $\mu = 0$  и  $\gamma = 0, 1$  (кривая 1),  $\gamma = 1$  (кривая 2),  $\gamma = 10$  (кривая 3) и по выходу системы  $y_2$  (кривая 2), на который в силу несвязности каналов ( $\mu = 0$ ) изменение величины  $\gamma$  не оказывает влияния.

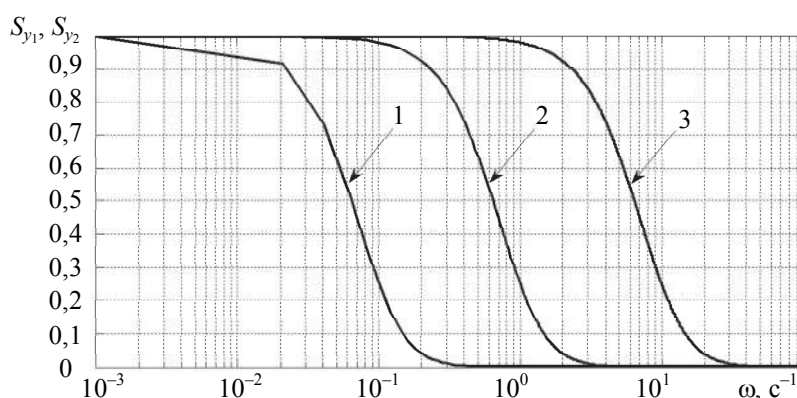


Рис. 2. Кривые спектральных плотностей для каждого выхода системы при различных значениях  $\gamma = 0, 1; 1; 10$  и фиксированном значении  $\mu = 0$

На рис. 3 представлены кривые спектральных плотностей по выходам системы  $y_1$  (рис. 3, а) и  $y_2$  (рис. 3, б) для значений  $\mu = 45^\circ$  и  $\gamma = 1$  при возмущении белым шумом входа  $g_1$  (кривые, изображенные сплошной линией) и входа  $g_2$  (кривые, изображенные пунктирной линией), а также для значений  $\mu = 45^\circ$  и  $\gamma = 3$  при возмущении белым шумом входа  $g_1$  (кривые, изображенные точечной линией).

<sup>1</sup> www.mathworks.com/products/matlab.html



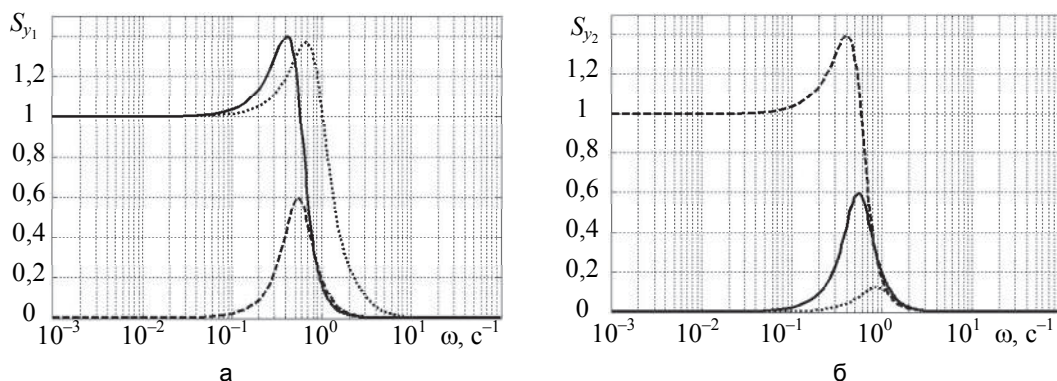


Рис. 3. Кривые спектральных плотностей для выхода системы  $y_1$  (а) и  $y_2$  (б) при возмущении системы белым шумом отдельно по каждому входу

На рис. 4 представлены кривые спектральных плотностей (рис. 4, а) по выходам системы  $y_1$  (кривая 1) и  $y_2$  (кривая 2) для значений  $\mu = 45^\circ$  и  $\gamma = 3$ , и кривые мажоранты и миноранты (рис. 4, б) функции спектральной плотности стохастического векторного процесса на выходе системы при возмущении системы белым шумом по обоим входам.

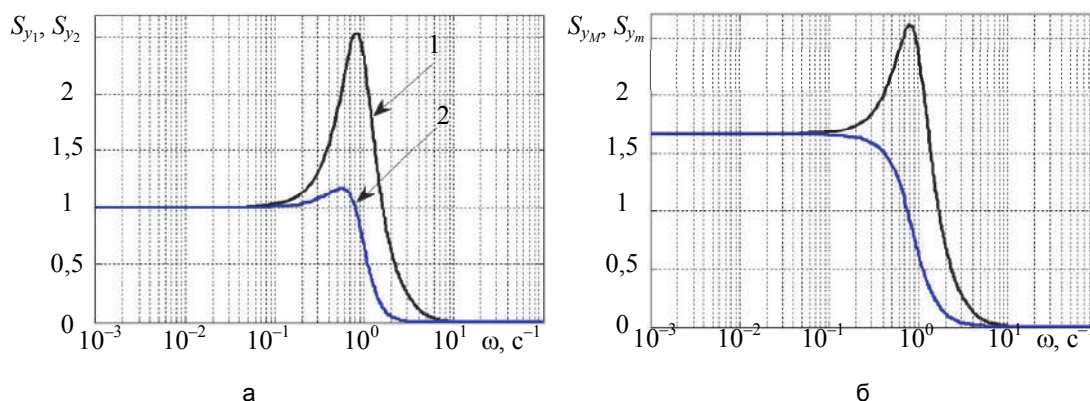


Рис. 4. Кривые спектральных плотностей по выходам системы (а) и мажоранты  $S_{y_M}$  и миноранты  $S_{y_m}$  функции спектральной плотности (б) при  $\mu = 45^\circ$ ,  $\gamma = 3$  и возмущении системы белым шумом по обоим входам

### Заключение

Метод пространства состояний обнаружил свою конструктивность при исследовании систем, возбуждаемых стохастическим воздействием типа «белый шум», который оказался инвариантным относительно отношения «вход–выход» системы. При этом вычисление матрицы дисперсий вектора состояния системы осуществляется с помощью матричного уравнения Ляпунова, вычисление корреляционной матрицы выхода – по схеме свободного движения системы, а вычисление матрицы спектральной плотности – с помощью компактного матричного выражения, не требующего использования интеграла Винера–Колмогорова–Хинчина. Для скаляризации матрицы спектральной плотности предложено два способа, один из которых основан на использовании поканальных спектральных плотностей сепаратных выходов, а другой – на использовании сингулярного разложения этой матрицы, позволяющего сформировать ее максимальное и минимальное сингулярные числа, задающие мажоранту и миноранту спектральной плотности в пространстве выходов исследуемой системы.

### Литература

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
2. Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3 т. / под ред. Б.К. Чемоданова. 3-е изд. Т. 3. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 352 с.

### References

1. Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. *Statistics of Random Processes*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 696 p. (In Russian)
2. Ivanov V.A., Medvedev V.S., Chemedanov B.K., Yushchenko A.S. *Mathematical Bases of Automatic Control Theory. Textbook*. Ed. B.K. Chemedanov. 3<sup>rd</sup> ed. Moscow, MGТУ named by N.E. Bauman Publ., 2009, vol. 3, 352 p. (In Russian)



3. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972. 608 p.
4. Davis M.H.A. *Linear Estimation and Stochastic Control*. London: Chapman and Hall Ltd., 1977. 224 p.
5. Oppenheim A.V., Schaffer R.W. *Digital Signal Processing*. New Jersey: Prentice Hall, 1975. 585 p.
6. Генин Л.Г., Свиридов В.Г. Введение в статистическую теорию турбулентности. М.: МЭИ, 2007. 100 с.
7. Oksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application*. 6<sup>th</sup> ed. Berlin: Springer, 2003. 379 p.
8. Dudarenko N.A., Ushakov A.V. Matrix formalism of the degeneration control problem of multichannel dynamical systems under vector stochastic exogenous impact of the colored noise type // *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. V. 45. N 6. P. 36–47. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i6.40
9. Ушаков А.В., Вундер Н.А., Сержантова М.В., Слита О.В. Стохастическая динамика непрерывных и дискретных систем в условиях неопределенности. СПб.: Университет ИТМО, 2016. 297 с.
10. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. СПб.: Профессия, 2003. 752 с.
11. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
12. Lotfi A. Zadeh, Charles A. Desoer *Linear System Theory: The State Space Approach*. 4<sup>th</sup> ed. NY: Dover Publications, 2008. 656 p.
13. Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 428 с.
14. Вундер Н.А., Надькина Е.А., Ушаков А.В., Чугина Ю.В. Формирование корреляционных функций линейных непрерывных систем на основе их фундаментальных матриц // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2015. Т. 15. № 6. С. 1036–1044. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-6-1036-1044
15. Couch L.W. *Digital and Analog Communication Systems*, 6<sup>th</sup> ed. Printing Prentice Hall, 2001.
16. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. 4<sup>th</sup> ed. Johns Hopkins University Press, 2012. 790 p.
3. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972, 608 p.
4. Davis M.H.A. *Linear Estimation and Stochastic Control*. London, Chapman and Hall Ltd., 1977, 224 p.
5. Oppenheim A.V., Schaffer R.W. *Digital Signal Processing*. New Jersey, Prentice Hall, 1975, 585 p.
6. Genin L.G., Sviridov V.G. *Introduction to the Statistical Theory of Turbulence*. Moscow, MPEI Publ., 2007, 100 p. (In Russian)
7. Oksendal B.K. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6<sup>th</sup> ed. Berlin, Springer, 2003, 379 p.
8. Dudarenko N.A., Ushakov A.V. Matrix formalism of the degeneration control problem of multichannel dynamical systems under vector stochastic exogenous impact of the colored noise type. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2013, vol. 45, no. 6, pp. 36–47. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i6.40
9. Ushakov A.V., Vunder N.A., Serzhantova M.V., Slita O.V. *Stochastic Continuous and Discrete Dynamic Systems under Uncertainty*. St. Petersburg, ITMO University Publ., 2016, 297 p.
10. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya Sistem Avtomaticheskogo Regulirovaniya* [The Theory of Automatic Control Systems]. St. Petersburg, Professiya Publ., 2003, 752 p. (In Russian)
11. Andreev Yu.N. *Control of Finite Linear Objects*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 424 p. (In Russian)
12. Lotfi A. Zadeh, Charles A. Desoer *Linear System Theory: The State Space Approach*. 4<sup>th</sup> ed. NY, Dover Publications, 2008, 656 p.
13. Ushakov A., Dudarenko N., Slita O. *The Modern Theory of Multivariable Control: The Unit of the State Space*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 428 p.
14. Vunder N.A., Nad'kina E.A., Ushakov A.V., Chugina J.V. Creation of correlation functions of linear continuous systems based on their fundamental matrices. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 6, pp. 1036–1044. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-6-1036-1044
15. Couch L.W. *Digital and Analog Communication Systems*. 6<sup>th</sup> ed. Printing Prentice Hall, 2001.
16. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. 4<sup>th</sup> ed. Johns Hopkins University Press, 2012, 790 p.

### Авторы

**Вундер Нина Александровна** – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, polinova\_nina@mail.ru

**Дударенко Наталья Александровна** – кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, dudarenko@yandex.ru

**Захарова Полина Игоревна** – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, polina19920@yandex.ru

**Ушаков Анатолий Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ushakov-avg@yandex.ru

### Authors

**Nina A. Vunder** – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, polinova\_nina@mail.ru

**Natalya A. Dudarenko** – PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, dudarenko@yandex.ru

**Polina I. Zaharova** – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, polina19920@yandex.ru

**Anatoly V. Ushakov** – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ushakov-avg@yandex.ru