



УДК 534.134

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ МИКРОСИСТЕМНОЙ ТЕХНИКИ

А.В. Лукин<sup>a</sup>, И.А. Попов<sup>a</sup>, Д.Ю. Скубов<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация

<sup>b</sup> Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация

Адрес для переписки: lukin\_av@spbstu.ru

### Информация о статье

Поступила в редакцию 04.08.17, принята к печати 29.09.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 6. С. 1107–1115. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115

### Аннотация

**Предмет исследования.** В работе рассмотрены нелинейные статические и динамические связанные задачи электроупругости для электростатических (емкостных) преобразователей – датчиков и актуаторов, входящих в состав нано- и микроэлектромеханических систем различного назначения. **Метод.** Для решения указанных задач применен математический аппарат нелинейной механики и теории ветвления, а также современные численные методы, в том числе методы продолжения по параметрам решений нелинейных краевых статических и динамических задач математической физики. **Основные результаты.** Выполнено сравнительное исследование аналитических и численных методов решения нелинейных задач статики и динамики упругих элементов нано- и микросистемной техники. Для базовых дискретных (нелинейные осцилляторы) и распределенных (мембраны, пластинки) электромеханических моделей определены формы равновесия, их устойчивость и бифуркации во внешнем электростатическом поле различных конфигураций. Построены диаграммы ветвления в зависимости от характерных физических параметров. Рассмотрены связанные динамические задачи в переменных электрических полях. **Практическая значимость** работы обусловлена выявлением и качественным исследованием принципиально важных для приборостроения свойств (структура возможных положений равновесия, допускаемые значения физических параметров системы) и характеристик (спектральных, резонансных) упругих элементов различных современных и перспективных нано- и микроэлектромеханических систем. Примененные методы и математические постановки могут быть использованы при проектировании микромеханических акселерометров и гироскопов, микродатчиков давления, микронасосов, ультразвуковых преобразователей, высокочастотных переключателей, элементов оптических и телекоммуникационных систем, систем автономного энергоснабжения, а также биомедицинских приборов.

### Ключевые слова

нано- и микросистемная техника, нано- и микроэлектромеханические системы, электростатические преобразователи, формы равновесия, динамика, устойчивость

### Благодарности

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 17-01-00414 А.

## NONLINEAR DYNAMICS AND STABILITY OF MICROSYSTEMS ENGINEERING ELEMENTS

A.V. Lukin<sup>a</sup>, I.A. Popov<sup>a</sup>, D.Yu. Skubov<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation

<sup>b</sup> Institute of Problems of Mechanical Engineering (IPME RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation

Corresponding author: lukin\_av@spbstu.ru

### Article info

Received 04.08.17, accepted 29.09.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115

Article in Russian

**For citation:** Lukin A.V., Popov I.A., Skubov D.Yu. Nonlinear dynamics and stability of microsystems engineering elements. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 6, pp. 1107–1115 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115

**Abstract**

**Subject of Research.** Static and dynamic problems of coupled electroelasticity are considered for electrostatic (capacitive) transducers used in sensors and actuators based on nano- and microsystem technology of various applications. **Method.** Above-mentioned problems are analyzed by mathematical apparatus of nonlinear mechanics and bifurcation theory as well as modern numerical methods, including numerical continuation techniques for nonlinear boundary-value problems of mathematical physics. **Main Results.** Comparative analysis of analytical and numerical methods was performed for nonlinear static and dynamic boundary-value problems of electroelasticity for microsystems and nanosystems engineering. Basic discrete (nonlinear nano/micro-electromechanical oscillators) and distributed (membranes, plates) electromechanical models were considered. Equilibrium forms, their stability and bifurcations were studied for afore-named elastic systems under the influence of electric fields of various configurations. Bifurcation diagrams were derived depending on key physical parameters. Nonlinear dynamic problems for elastic systems at time-varying electric fields were also considered. **Practical Relevance.** The present research is of considerable practical significance because it reveals and analyzes qualitatively the elastic elements properties and characteristics that are important for nano/micro-system design, such as equilibria structure and stability, amplitude and force response of the system, etc. Used methods and mathematical formulations can be applied in the design process of micromechanical accelerometers and gyroscopes, pressure sensors, micro-pumps, capacitive micro-machined ultrasound transducers, radio-frequency and optical switches, electromagnetic energy harvesting systems and biomedical devices.

**Keywords**

nano/microsystem technology, nano/micro-electromechanical systems, electrostatic transducers, equilibrium forms, stability

**Acknowledgements**

The research leading to these results has received funding from the Russian Foundation for Basic Research (17-01-00414 A).

**Введение**

Широкое применение нано- и микросистемной техники (НМСТ) в современном приборостроении связано с высокой чувствительностью данных систем к нано- и микромасштабным изменениям физических (давление, ускорение, температура, длина волны, интенсивность магнитного поля, напряжение), химических и биологических параметров (состав и концентрация вещества, скорость реакции) [1]. Причиной этому является определяющее влияние совместного действия физических полей различной природы (механического, температурного, электромагнитного) на состояние элементов НМСТ. В связи с масштабным фактором внутренняя связанность, междисциплинарность задачи анализа динамики и прочности элементов НМСТ приводит к необходимости исследования существенно нелинейных эффектов, вызванных совместным действием указанных физических полей.

Настоящая работа посвящена разработке и исследованию аналитических и численных методов решения нелинейных задач статики и динамики упругих элементов НМСТ – мембран и пластин, действующих в электрических полях различных конфигураций. Рассматриваемые методы и математические постановки могут быть использованы при проектировании микромеханических акселерометров и гироскопов [2–5], микродатчиков давления [6], микронасосов [7], ультразвуковых преобразователей [8], радиочастотных переключателей [9, 10], элементов оптических и телекоммуникационных систем (линзы, диафрагмы, оптические переключатели, микрзеркала и дифракционные решетки) [7], систем автономного энергоснабжения [11], а также биомедицинских приборов (биосенсоры, детекторы массы прилипающей частицы, системы направленного транспорта лекарственных веществ в организме) [12, 13].

**Статическая устойчивость упругих элементов НМСТ**

**Модель микроэлектромеханического осциллятора с одной степенью свободы.** Рассмотрим модель микроэлектромеханического осциллятора, состоящую из массы на пружине с демпфером, прикрепленной к подвижной обкладке плоскопараллельного конденсатора. С учетом известного выражения для пондеромоторной силы, действующей на подвижную пластину конденсатора, уравнение движения примет вид

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + k(u - l) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d-u)^2}, \tag{1}$$

где  $u$  – смещение подвижной обкладки;  $d$  – расстояние между неподвижной обкладкой и точкой крепления осциллятора;  $m$  – масса подвижной пластины;  $c$  – коэффициент диссипации;  $k$  – жесткость пружины;  $l$  – длина недеформированной пружины;  $\epsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды в пространстве между обкладками;  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $S$  – площадь обкладки;  $V$  – разность потенциалов между обкладками. Перейдя к безразмерным величинам  $x = \frac{u-l}{d-l}$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t$ ,  $\alpha = \frac{c}{\sqrt{mk}}$  преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \alpha \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{\lambda}{(1-x)^2}, \tag{2}$$

где  $\lambda = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{k(d-l)^3}$  – безразмерный параметр, определяющий соотношение между пондеромоторной и упругой силами, действующими на систему. В случае системы с двумя неподвижными электродами, когда

подвижная обкладка конденсатора симметрично расположена на расстоянии  $d$  от них, уравнение движения записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + x = \lambda \left[ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right], \quad (3)$$

где  $x = \frac{u}{d}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{k d^3}$ .

Анализ статической устойчивости систем (2), (3) состоит в определении числа и типа положений равновесия  $X_*$  в зависимости от значений физического параметра  $\lambda$ . На рис. 1 показаны вычисленные диаграммы ветвления положений равновесия.

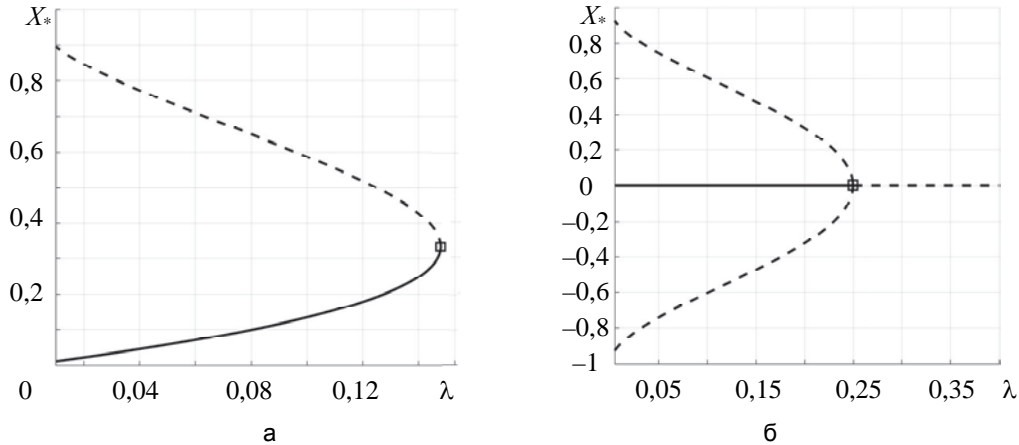


Рис. 1. Диаграммы ветвления положений равновесия: система с одним электродом (а); система с двумя электродами (б) (сплошной линией обозначены устойчивые решения, пунктирной – неустойчивые)

Как видно из рис. 1, а, в системе с одним электродом при достижении  $\lambda$  некоторого критического значения происходит бифуркация – слияние устойчивого (особая точка типа «центр») и неустойчивого (седло) положений равновесия с их последующим исчезновением. Бифуркационное значение  $\lambda$  находится из условия сложного экстремума – обращения в нуль первой и второй производных потенциальной энергии системы (1). В англоязычной литературе указанная бифуркация часто называется «static pull-in instability» в силу характерности именно для базовых элементов микроэлектромеханических систем, где она физически соответствует «схлопыванию» подвижного упругого элемента с неподвижным электродом [14].

Согласно рис. 1, б, в системе с двумя электродами при малых  $\lambda$  существуют три положения равновесия в геометрически допустимом интервале  $x \in (-1; 1)$ : устойчивое нулевое (нейтральное) и два неустойчивых, симметричных относительно нуля с большими амплитудами ( $x \cong \pm 1$ ). При увеличении  $\lambda$  боковые положения равновесия смещаются к нулю и при некотором критическом значении  $\lambda_*$  сливаются с нейтральным равновесием. При дальнейшем росте  $\lambda$  в системе сохраняется единственное неустойчивое нулевое положение равновесия.

**Распределенные модели упругих элементов НМСТ.** Рассмотрим частный случай нелинейной теории гибких пластин (уравнения Т. Кармана), которые имеют следующий вид [15, 16]:

$$D \nabla^4 \hat{w} = \hat{L}(\hat{w}, \hat{\Phi}) + h \hat{\Pi}(\sigma, \hat{w}) + \hat{F}, \quad (4)$$

$$\hat{\nabla}^4 \hat{\Phi} = - \frac{Eh}{2} L(\hat{w}, \hat{w}),$$

где  $\hat{w}$  – прогиб пластинки;  $\hat{\Phi}$  – функция напряжений;  $h$  – толщина пластинки;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – изгибная жесткость пластинки;  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала;  $\hat{F}$  – интенсивность внешней поперечной нагрузки, вообще говоря, зависящей от прогиба  $\hat{w}$ ;  $\hat{L}$  и  $\hat{\Pi}$  представляют собой нелинейные дифференциальные операторы, характеризующие соответственно геометрическую нелинейность задачи и действие напряжений  $\sigma$  в срединной плоскости пластинки.

Исследуем ветвление форм равновесия круглых мембран и пластинок в поле одного и двух электродов. Безразмерное уравнение равновесия мембраны в поле одного электрода в предположении об осевой симметрии решений записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} &= \frac{\lambda}{(1+u)^2}, \\ r = 0: \quad u &= \sigma p.; \\ r = 1: \quad u &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u = -w$  – безразмерный прогиб;  $\lambda = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2 V^2}{2d^3 T}$ ;  $T$  – натяжение мембраны;  $R$  – ее радиус;  $d$  – расстояние между обкладками. Полученная нелинейная эллиптическая краевая задача не имеет явного аналитического решения, но допускает сведение к уравнению Эмдена–Фаулера [17–19], что позволяет получить все

множество ее решений с помощью численных методов. Важно отметить, что в общем случае прямой численный метод решения существенно нелинейных краевых задач не позволяет выполнить исчерпывающее исследование, так как, вообще говоря, неизвестно количество положений равновесия при заданном значении физического параметра  $\lambda$ ; неизвестен и характер зависимости найденных решений от  $\lambda$ . В связи с этим рассматриваемая задача (5) является исключительной в том смысле, что допускает исчерпывающее численное исследование. В дальнейшем будут рассматриваться математические модели микромеханических систем, для которых аналитические методы не разработаны. Это приводит к необходимости применения более универсальных, но приближенных методов решения нелинейных краевых задач эллиптического типа. Основным методом такого класса является метод Галеркина в применении к исходному нелинейному уравнению (Reduced order method, ROM, [6]). Решение задачи (5) будем искать в виде ряда по формам свободных осесимметричных колебаний:

$$u(r) = \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r), \tag{6}$$

где  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка, а коэффициенты  $\gamma_{0m}$  определяются из уравнения  $J_0(\gamma_0) = 0$ .

Подставив ряд (6) в (5) и записав проекционные условия, мы получим систему нелинейных уравнений, в которой неизвестные коэффициенты  $C_m$  находятся под знаком интеграла, что затрудняет поиск решений. Чтобы преодолеть эту трудность, можно либо предварительно умножить уравнение на  $(1 + u)^2$ , либо разложить правую часть в ряд Тейлора по функции прогиба  $u$ . Следуя первому методу, приходим к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\int_0^1 r \left[ 1 + \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r) \right]^2 \left( \sum_{m=1}^n C_m \gamma_{0m}^2 J_0(\gamma_{0m} r) \right) J_0(\gamma_{0s} r) dr = -\lambda \int_0^1 r J_0(\gamma_{0s} r) dr, \quad s = 1, \dots, n.$$

Можно показать [19], что, согласно теореме Ниренберга [20], кососимметричные формы равновесия мембраны в поле одного электрода отсутствуют. Рассматривая мембрану в поле двух электродов, приходим к следующей краевой задаче в полярных координатах  $(r, \theta)$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \lambda \left[ \frac{1}{(1+w)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right] = -\lambda \frac{4w}{(1-w)^2},$$

$$r = 0: \quad w = \text{const.};$$

$$r = 1: \quad w = 0. \tag{7}$$

Данная задача в двух отношениях математически существенно отличается от задачи о мембране в поле одного электрода. Во-первых, для краевой задачи (7) не выполняются условия теоремы Ниренберга о радиальной симметричности решений, т.е. в системе возможно существование кососимметричных форм равновесия. Во-вторых, для рассматриваемой задачи не разработаны эффективные аналитические методы, подобные методу сведения исходного уравнения к уравнению Эмдена–Фаулера, которые позволяли бы проводить качественный анализ зависимости числа и вида форм равновесия от физического параметра  $\lambda$ . По этим причинам решение задачи (7) строится с помощью метода Галеркина.

На рис. 2 показаны вычисленные диаграммы ветвления форм равновесия мембраны в поле одного и двух электродов.

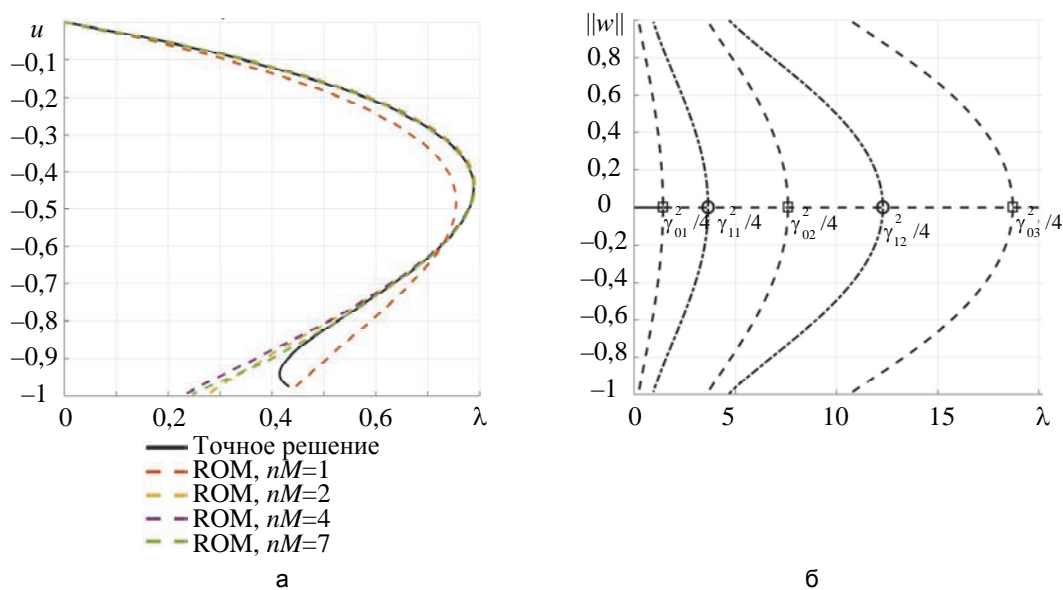


Рис. 2. Диаграммы ветвления положений равновесия: система с одним электродом (а); система с двумя электродами (б) ( $nM$  – число учтенных координатных функций)

Как видно из рис. 2, а, неточность метода Галеркина проявляется лишь для заостренных к центру форм прогиба, которые не соответствуют исходному предположению о малости кривизны мембраны. Представляющие основной интерес устойчивые формы равновесия определяются точно, и при этом для их нахождения достаточно использовать две координатные функции  $J_0(\gamma_{01}r), J_0(\gamma_{02}r)$ . Отметим, что при решении задач динамики мембран в электрическом поле под действием периодического внешнего возбуждения точное нахождение неустойчивых ветвей диаграммы, соответствующих большим прогибам, имеет большое значение, так как они определяют области притяжения различных установившихся динамических режимов.

На рис. 2, б, пунктирными линиями обозначены осесимметричные формы, штрих-пунктирными – формы с индексом симметрии  $k = 1$ . Точки ответвления данных форм от нулевого решения обозначены квадратными и круглыми маркерами соответственно.

Перейдем к изучению статической устойчивости круглых пластинок. Запишем нелинейные уравнения равновесия круглой пластинки (4) в безразмерном виде:

$$\nabla^4 w = \beta L(w, \Phi) + \delta \nabla^2 w + \lambda \tilde{F}_e, \quad \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w),$$

где  $\tilde{F}_e$  – пондеромоторная сила, и

$$r = \frac{\hat{r}}{R}, \quad w = \frac{\hat{w}}{d}, \quad \Phi = \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, \quad \delta = \frac{R^2 T}{D}, \quad \beta = \frac{12d^2(1-\nu^2)}{h^2}, \quad \lambda = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^4 V^2}{2d^3 D}.$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$r = 0: \quad w, \Phi = \text{const};$$

$$r = 1: \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \nu \frac{d\Phi}{dr} = 0.$$

На рис. 3 показаны вычисленные диаграммы ветвления осесимметричных форм равновесия пластинки в поле одного электрода для различных значений параметров  $\beta, \delta$ .

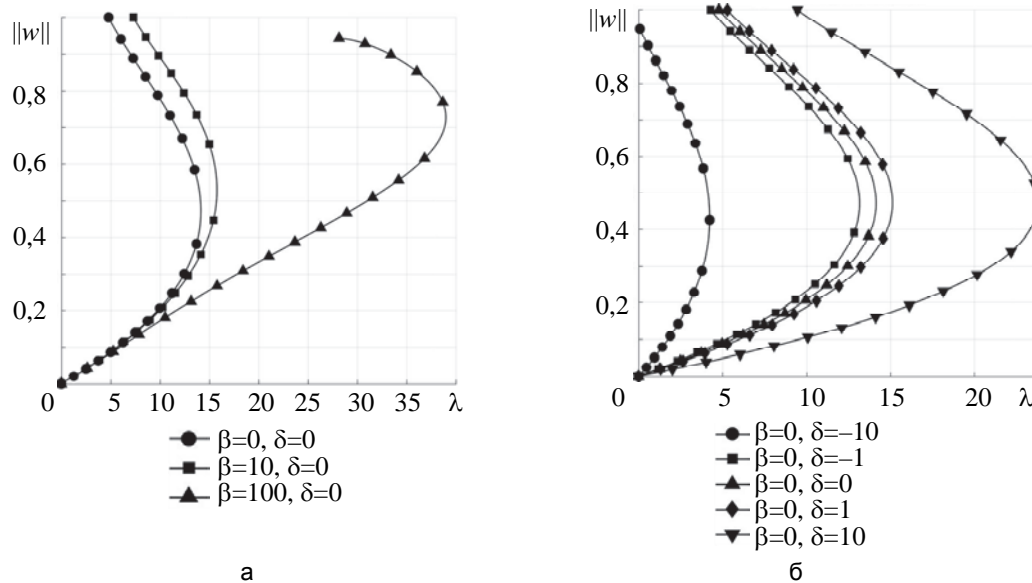


Рис. 3. Диаграммы ветвления положений равновесия в поле одного электрода в зависимости: от  $\beta$  (а); от  $\delta$  – (б)

Как видно из рис. 3, а, при увеличении  $\beta$ , т.е. при уменьшении толщины пластинки  $h$  или увеличении зазора между пластинкой и неподвижным электродом  $d$ , значение нелинейных членов в уравнениях равновесия возрастает и выражается в росте бифуркационного значения параметра  $\lambda$  и соответствующей ему величины прогиба пластинки  $\|w\|$ . Согласно рис. 3, б, величина мембранных усилий определяет бифуркационное значение параметра  $\lambda$ , соответствующее исчезновению равновесных положений пластинки (явлению «pull-in»).

На рис. 4 показаны вычисленные диаграммы ветвления осесимметричных форм равновесия пластинки в поле двух электродов для различных значений параметров  $\beta, \delta$ . Как видно из рис. 4, а, параметр  $\beta$  качественным образом влияет на характер бифуркационной картины: при малых  $\beta$  наблюдается субкритическая бифуркация с ответвлением неустойчивых форм равновесия пластинки, подобно тому, как это ранее было установлено для мембраны; при увеличении  $\beta$  тип бифуркации изменяется на суперкритический, что влечет за собой ответвление устойчивых нетривиальных форм равновесия, ветви которых, в свою очередь, содержат регулярные экстремальные точки, аналогичные «pull-in»-значениям в случае одного электрода. Согласно рис. 4, б, величина мембранных усилий определяет бифуркационное значение

параметра  $\lambda$ , соответствующее потере устойчивости нейтрального положения равновесия (не обозначено на рисунке) и субкритической бифуркации – ответвлению неустойчивых нетривиальных форм равновесия.

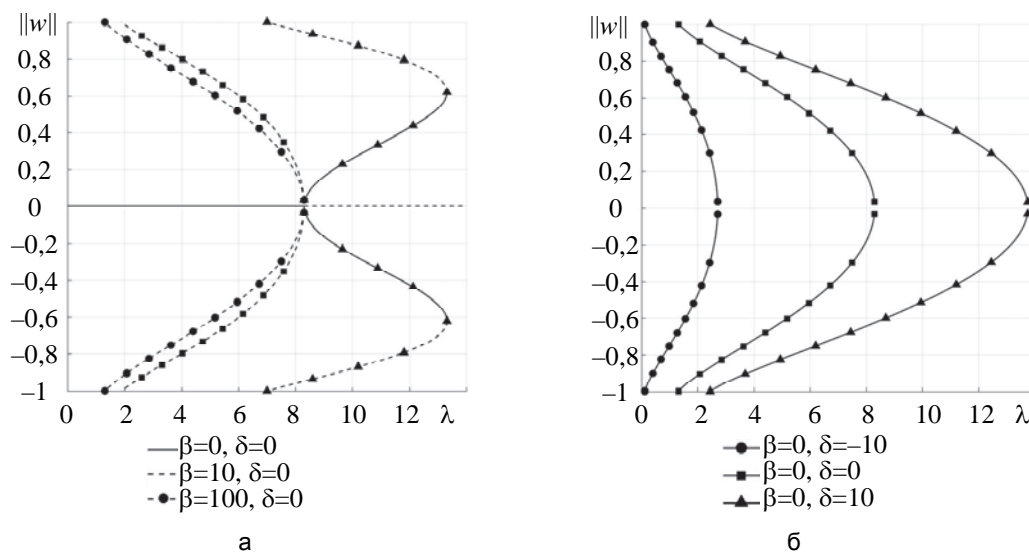


Рис. 4. Диаграммы ветвления положений равновесия в поле двух электродов в зависимости: от  $\beta$  (а); от  $\delta$  – (б)

### Динамическая устойчивость упругих элементов НМСТ

Перейдем к задаче о вынужденных колебаниях микроэлектромеханического осциллятора в поле одного электрода. Здесь можно рассматривать два различных случая возбуждения колебаний. В первом случае напряжение между неподвижной обкладкой конденсатора и проводящим упругим элементом является знакопеременной функцией времени, например, меняется по гармоническому закону. Во втором случае динамическое возбуждение накладывается на стационарный уровень напряжения.

Первый режим возбуждения используется в высокочастотных переключателях и других микро-системных устройствах, в которых требуется максимально быстро вывести упругий элемент из устойчивого положения равновесия и обеспечить контакт с неподвижной обкладкой («pull-in»). Второй режим применяется в работе резонаторов, акселерометров, датчиков давления, генераторов частоты.

Рассмотрим первый вариант возбуждения колебаний. Уравнение движения в безразмерных величинах имеет вид

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = \frac{\lambda \cos^2 \Omega t}{(1-x)^2}. \tag{8}$$

Построим приближенное аналитическое решение уравнения (8) с помощью асимптотических методов теории нелинейных колебаний [21, 22]. Введем малый параметр  $\epsilon$  в обозначение коэффициента диссипации  $\epsilon\mu$  и амплитуды возбуждения  $\epsilon\lambda$  и разложим нелинейное слагаемое в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\ddot{x} + \epsilon\mu\dot{x} + x = \epsilon\lambda \cos^2 \Omega t (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots). \tag{9}$$

Применение метода многих масштабов к уравнению (9) при исследовании главного резонанса  $\Omega = \frac{1}{2} + \epsilon\sigma$  приводит к следующему уравнению, неявно определяющему зависимость амплитуды установившихся колебаний  $a$  от частотной расстройки  $\sigma$ :

$$\frac{\lambda^2}{16} = \frac{1}{4} \frac{\mu^2 a^2}{(1 + \frac{3}{4}a^2)^2} + \left( \frac{2a\sigma + \frac{1}{2}\lambda a + \frac{3}{4}\lambda a^3}{1 + \frac{9}{4}a^2} \right)^2. \tag{10}$$

На рис. 5 показано сравнение амплитудно-частотных характеристик при различных значениях  $\lambda$ , полученных следующими тремя методами: согласно аналитическому выражению (10); прямым численным расчетом приближенной системы (9); прямым численным расчетом полной системы (8). Численные зависимости  $a(\sigma)$  определены с помощью алгоритма продолжения по параметру периодических решений, реализованного в программном комплексе MATCONT [23]. Коэффициент демпфирования  $\mu$  принят равным 0,005.

Как видно из рис. 5, при достаточно малых значениях  $\lambda$  первое приближение к решению, полученное методом многих масштабов, практически совпадает с прямым численным решением уравнения (9). Отличие приближенных решений от прямого численного решения исходного нелинейного уравнения (8) состоит в существовании ветви неустойчивых периодических движений при отрицательных значениях параметра расстройки  $\sigma$ . Практическое значение данной ветви состоит в том, что она ограничивает об-

ласть притяжения устойчивого периодического режима с малыми амплитудами колебаний. Разложение правой части уравнения (8) в ряд Тейлора, с удержанием степеней не выше третьей может привести к ошибочному выводу об устойчивости стационарного колебательного движения системы при больших начальных возмущениях.

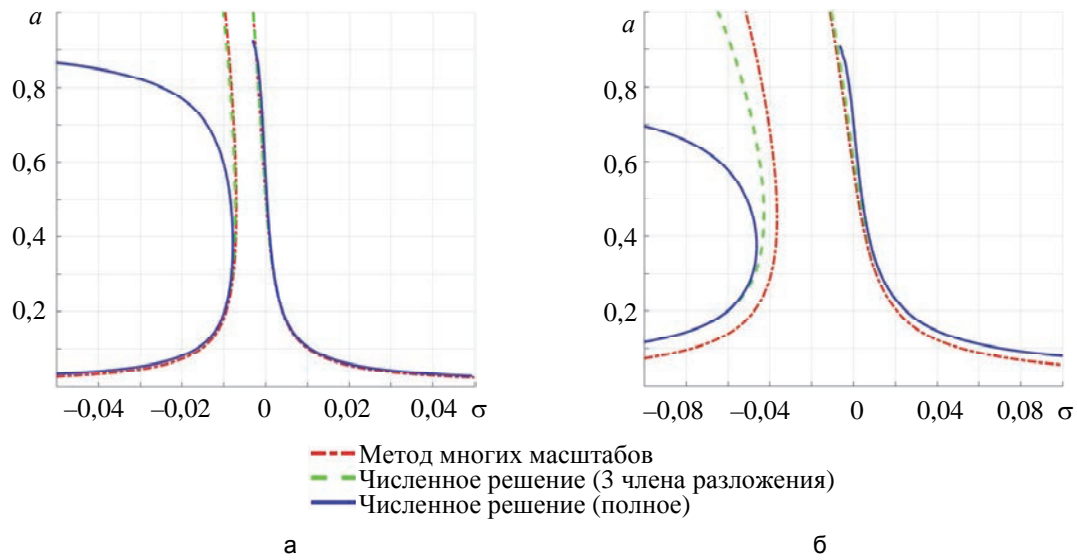


Рис. 5. Сравнение амплитудно-частотных характеристик в окрестности главного резонанса  $\Omega \approx \frac{1}{2}$  при:  $\lambda = 0,01$  (а);  $\lambda = 0,05$  (б)

Исследуем теперь зависимость амплитуды установившихся колебаний от параметра силы внешнего возбуждения  $\lambda$  при фиксированной его частоте в окрестности главного резонанса  $\Omega \approx \frac{1}{2}$ . На рис. 6 показано сравнение прямого численного решения системы (8) с приближенным аналитическим решением (10), а также с численным решением соответствующей ему системы (9).

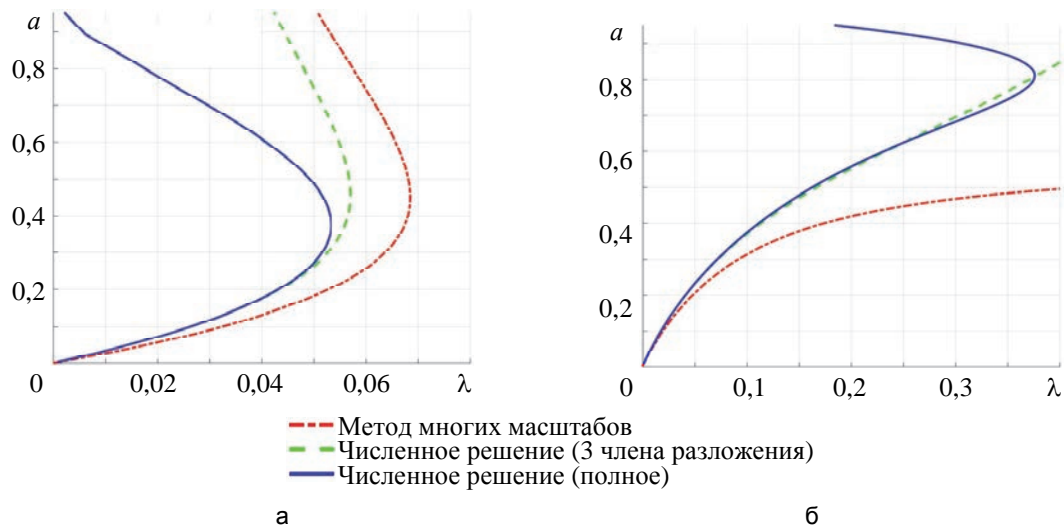


Рис. 6. Зависимость амплитуды колебаний от  $\lambda$  при:  $\sigma = -0,05$  (а);  $\sigma = 0,02$  (б)

Как видно из рис. 6, а, при частотах, меньших резонансной ( $\sigma < 0$ ), зависимость амплитуды колебаний от  $\lambda$  по форме совпадает с полученной ранее диаграммой ветвления форм равновесия системы (см. рис. 1, а) и характеризуется наличием критического значения параметра  $\lambda$ , ограничивающего сверху область существования стационарных режимов колебаний. При этом максимальная амплитуда устойчивых периодических движений не превышает величины 0,5.

Согласно рис. 6, б, в зарезонансной зоне ( $\sigma > 0$ ) характер зависимости амплитуды  $a$  от параметра  $\lambda$  иной: существенно возрастают как критическое значение  $\lambda \cong 0,37$ , так и максимальная амплитуда устойчивых колебаний  $a \cong 0,8$ . Для сравнения, критическое значение  $\lambda$  при статическом анализе («static pull-in») составляет  $\lambda_* \cong 0,148$  при соответствующей величине статического перемещения  $a_* \cong 0,32$  (см.

рис. 1, а). Таким образом, в зарезонансной зоне возможны устойчивые колебания с амплитудами, значительно превышающими возможные амплитуды устойчивых положений равновесия.

Как видно из рис. 6, приближенное аналитическое решение совпадает с численным лишь при малых значениях  $\lambda$ , что соответствует исходным предположениям примененного метода многих масштабов.

### Заключение

В настоящей работе получены аналитические и численные решения ряда нелинейных задач статики и динамики упругих элементов нано- и микросистемной техники. Для базовых чувствительных и исполнительных элементов (мембран, пластин) определены формы равновесия, их устойчивость и бифуркации во внешнем электростатическом поле. Построены диаграммы ветвления форм равновесия в зависимости от характерных физических параметров. Показано, что в случае системы с двумя неподвижными электродами, расположенными симметрично относительно упругой пластинки, учет геометрической нелинейности и связанного с ней эффекта повышения жесткости системы при деформировании приводит к качественному изменению структуры положений равновесия – возникновению устойчивых нетривиальных форм прогиба. Подобные мультистабильные системы (системы с переключениями) могут иметь различные применения в нано- и микросистемной технике (высокочастотных переключатели, сенсоры и др.). Получены аналитическое и численные решения связанной динамической задачи для микроэлектромеханического осциллятора в переменном электрическом поле. Показано, что в зарезонансной зоне возможны устойчивые колебания с амплитудами, значительно превышающими возможные амплитуды устойчивых положений равновесия. Примененные в работе аналитические и численные методы имеют достаточно общий характер и могут быть использованы при решении существенно нелинейных связанных задач, возникающих при проектировании конкретных приборов. Представленные в работе решения могут рассматриваться как база для верификации прямых численных методов нелинейной динамической электростатической, таких как метод конечных элементов.

### Литература

1. Распопов В.Я. Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
2. Беляев Я.В. Методы снижения порога чувствительности микромеханического гироскопа: автореф. ... канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2010. 23 с.
3. Евстифеев М.И., Челпанов И.Б. Вопросы обеспечения стойкости микромеханических гироскопов при механических воздействиях // Гироскопия и навигация. 2013. № 1 (80). С. 119–133.
4. Некрасов Я.А., Моисеев Н.В., Беляев Я.В., Павлова С.В., Локшонков Р.Г. Влияние поступательных вибраций, ударов и акустических помех на характеристики микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2016. № 2 (93). С. 56–67. doi: 10.17285/0869-7035.2016.24.2.056-067
5. Acar C., Shkel A. MEMS Vibratory Gyroscopes. Structural Approaches to Improve Robustness. Springer, 2009. 256 p. doi: 10.1007/978-0-387-09536-3
6. Younnis M.I. MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics. Springer, 2011. 468 p.
7. Pelesko J.A., Bernstein D.H. Modelling MEMS and NEMS. CRC Press, 2003. 384 p.
8. Oralkan O., Ergun A.S., Johnson A.S. et al. Capacitive micromachined ultrasonic transducers: next-generation arrays for acoustic imaging? // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2002. V. 49. P. 1596–1610. doi: 10.1109/TUFFC.2002.1049742
9. Muldavin J., Rebeiz G. 30 GHz tuned MEMS switches // IEEE MTT-S Int. Microwave Symposium Digest. 1999. P. 1511–1514. doi: 10.1109/mwsym.1999.780241
10. Rebeiz G.M. RF MEMS. Theory, Design and Technology. John Wiley, 2003. 483 p.
11. Blokhina E., Galayko D., Alarcon E., Galayko D. Nonlinearity in Energy Harvesting Systems. Micro- and Nanoscale Applications. Springer, 2016. 361 p.
12. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Jaber N., Younis M.I. Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2016. V. 26. P. 105009. doi: 10.1088/0960-1317/26/10/105009

### References

1. Raspopov V.Ya. *Micromechanical Devices*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2007, 400 p. (In Russian)
2. Belyaev Ya.V. *Methods for Reducing the Sensitivity Threshold of a Micromechanical Gyro*. PhD Eng. Sci. Thesis. St. Petersburg, 2010, 23 p. (In Russian)
3. Evstifeev M.I., Chelpanov I.B. Providing the mechanical stability of MEMS gyros. *Гироскопия и Навигация*, 2013, no. 1, pp. 119–133.
4. Nekrasov Ya.A., Moiseev N.V., Belyaev Ya.V., Pavlova S.V., Lokshonkov R.G. Influence of translational vibrations, shocks and acoustic noise on MEMS gyro performance. *Гироскопия и Навигация*, 2016, no. 2, pp. 56–67. doi: 10.17285/0869-7035.2016.24.2.056-067
5. Acar C., Shkel A. *MEMS Vibratory Gyroscopes. Structural Approaches to Improve Robustness*. Springer, 2009, 256 p. doi: 10.1007/978-0-387-09536-3
6. Younnis M.I. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. Springer, 2011, 468 p.
7. Pelesko J.A., Bernstein D.H. *Modelling MEMS and NEMS*. CRC Press, 2003, 384 p.
8. Oralkan O., Ergun A.S., Johnson A.S. et al. Capacitive micromachined ultrasonic transducers: next-generation arrays for acoustic imaging? *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2002, vol. 49, pp. 1596–1610. doi: 10.1109/TUFFC.2002.1049742
9. Muldavin J., Rebeiz G. 30 GHz tuned MEMS switches. *IEEE MTT-S Int. Microwave Symposium Digest*, 1999, pp. 1511–1514. doi: 10.1109/mwsym.1999.780241
10. Rebeiz G.M. *RF MEMS. Theory, Design and Technology*. Wiley, 2003, 483 p.
11. Blokhina E., Galayko D., Alarcon E., Galayko D. *Nonlinearity in Energy Harvesting Systems. Micro- and Nanoscale Applications*. Springer, 2016, 361 p.
12. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Jaber N., Younis M.I. Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2016, vol. 26, pp. 105009. doi: 10.1088/0960-1317/26/10/105009
13. Yan H., Zhang W. et al. A measurement criterion for accurate mass detection using vibrating suspended microchannel



13. Yan H., Zhang W. et.al. A measurement criterion for accurate mass detection using vibrating suspended microchannel resonators // *Journal of Sound and Vibration*. 2017. V. 403. P. 1–20. doi: 10.1016/j.jsv.2017.05.030
14. Zhang W.M., Yan H., Peng Z.K., Meng G. Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: a review // *Sensors and Actuators A*. 2014. V. 214. P. 187–218. doi: 10.1016/j.sna.2014.04.025
15. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
16. Nayfeh A.H., Pai P.F. *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. New York: Wiley, 2004. 746 p.
17. Khodzhaev K.Sh. Nonlinear problems on the deformation of elastic bodies by a magnetic field // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1970. V. 34. N 4. P. 622–641. doi: 10.1016/0021-8928(70)90114-0
18. Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш. Нелинейная электромеханика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 360 с.
19. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Исследование устойчивости и ветвления форм равновесия упругих элементов микросистемной техники / В сб. Нелинейная динамика машин - SCHOOL-NDM 2017. Москва, 2017. С. 313–322.
20. Gidas B., Wei-Ming Ni, Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle // *Commun. Math. Phys.* 1979. V. 68. P. 209–243. doi: 10.1007/bf01221125
21. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
22. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
23. Kuznetsov Yu.A., Govaerts W. et.al. MATCONT and CL\_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB. Utrecht University, 2010 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://sourceforge.net/projects/matcont/files/Documentation/ManualSep2012.pdf/download>, свободный. Яз. англ. (дата обращения 08.08.2017).
- resonators. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, vol. 403, pp. 1–20. doi: 10.1016/j.jsv.2017.05.030
14. Zhang W.M., Yan H., Peng Z.K., Meng G. Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: a review. *Sensors and Actuators A*, 2014, vol. 214, pp. 187–218. doi: 10.1016/j.sna.2014.04.025
15. Vol'mir A.S. *Stability of Deformable Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1967, 984 p. (In Russian)
16. Nayfeh A.H., Pai P.F. *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. NY, Wiley, 2004, 746 p.
17. Khodzhaev K.Sh. Nonlinear problems on the deformation of elastic bodies by a magnetic field. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, no. 4, pp. 622–641. doi: 10.1016/0021-8928(70)90114-0
18. Skubov D.Yu., Khodzhaev K.Sh. *Nonlinear Electromechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 360 p. (In Russian)
19. Lukin A.V., Popov I.A., Skubov D.Yu. Investigation of stability and branching of equilibrium forms of elastic elements of microsystem technology. In *Nonlinear Dynamics of Machines - SCHOOL-NDM 2017*. Moscow, 2017, pp. 313–322. (In Russian)
20. Gidas B., Wei-Ming Ni, Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Commun. Math. Phys.*, 1979, vol. 68, pp. 209–243. doi: 10.1007/bf01221125
21. Nayfeh A.H. *Perturbation Methods*. Wiley-Interscience, 1973, 425 p.
22. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. NY, Wiley, 1981, 519 p.
23. Kuznetsov Yu.A., Govaerts W. et al. MATCONT and CL\_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB. Utrecht University, 2010. Available at: <https://sourceforge.net/projects/matcont/files/Documentation/ManualSep2012.pdf> (accessed 08.08.2017).

#### Авторы

**Лукин Алексей Вячеславович** – ассистент, инженер, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, lukin\_av@spbstu.ru

**Попов Иван Алексеевич** – ассистент, инженер, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, popov\_ia@spbstu.ru

**Скубов Дмитрий Юльевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация; ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация, skubov.dsk@yandex.ru

#### Authors

**Aleksey V. Lukin** – assistant, engineer, Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, lukin\_av@spbstu.ru

**Ivan A. Popov** – assistant, engineer, Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, popov\_ia@spbstu.ru

**Dmitry Yu. Skubov** – D.Sc., Full Professor, Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation; Leading Researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering (IPME RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation, skubov.dsk@yandex.ru