



УДК 535.317

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КООРДИНАТ РЕАЛЬНЫХ ЛУЧЕЙ НА ВХОДНОМ ЗРАЧКЕ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ВОЛНОВОЙ АБЕРРАЦИИ ПОЛИНОМАМИ ЦЕРНИКЕ

Т.В. Иванова^а, Д.И. Анощенко^а^а Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская ФедерацияАдрес для переписки: tvivanova@corp.ifmo.ru**Информация о статье**

Поступила в редакцию 16.11.17, принята к печати 18.12.17

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-9-14

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Иванова Т.В., Анощенко Д.И. Анализ возможных распределений координат реальных лучей на входном зрачке оптической системы при аппроксимации волновой aberrации полиномами Цернике // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 1. С. 9–14. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-9-14

Аннотация

Предмет исследования. Приведено описание волновой aberrации оптической системы при помощи полиномов Цернике. Выполнен поиск удачного расположения исходных точек (координат лучей на входном зрачке оптической системы) для аппроксимации методом наименьших квадратов. Рассмотрены шесть возможных вариантов такого распределения, сделаны выводы об их преимуществах и недостатках. **Методы.** Сущность метода заключается в исследовании различных распределений лучей по входному зрачку, позволяющих достичь требуемой точности при минимальном количестве лучей. **Основные результаты.** В результате выполненной работы исследованы различные варианты распределения точек (координат лучей) на входном зрачке оптической системы. Выполнено сравнение среднеквадратического отклонения исходного волнового фронта от восстановленного после аппроксимации полиномами Цернике методом наименьших квадратов. Определена методика распределения точек с наилучшей сходимостью. **Практическая значимость.** Исследуемые распределения точек могут использоваться при вычислении хода лучей через оптическую систему для последующего восстановления и описания волнового фронта полиномами Цернике. Использование оптимального распределения точек позволяет уменьшить требуемое для восстановления волнового фронта количество лучей, что существенно увеличивает скорость вычислений.

Ключевые слова

полиномы Цернике, волновая aberrация, вычисление aberrаций, аппроксимация, распределение точек

DISTRIBUTION ANALYSIS OF REAL RAY COORDINATES ON OPTICAL SYSTEM ENTRANCE PUPIL FOR WAVE ABERRATION APPROXIMATION BY ZERNIKE POLYNOMIALS

T.V. Ivanova^а, D.I. Anoshchenkov^а^а ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian FederationCorresponding author: tvivanova@corp.ifmo.ru**Article info**

Received 16.11.17, accepted 18.12.17

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-9-14

Article in Russian

For citation: Ivanova T.V., Anoshchenkov D.I. Distribution analysis of real ray coordinates on optical system entrance pupil for wave aberration approximation by Zernike polynomials. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 9–14 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-9-14

Abstract

Subject of Research. The paper deals with description of optical system wave aberration by Zernike polynomials. We perform the search of suitable point distribution (real ray coordinates on optical system entrance pupil) for the least squares method approximation. Six possible types of distribution are considered. The conclusion on their advantages and disadvantages is drawn. **Method.** The method essence lies in various types of distribution research for real rays on entrance pupil that allow for necessary accuracy with minimum rays number. **Main Results.** We compare standard deviation between the reference wave front and result wave front after approximation by Zernike polynomials by the least squares method for several types of point distribution (real ray coordinates) on optical system entrance pupil. The best types of distribution with

maximum convergence are determined. **Practical Relevance.** The discussed distribution of points can be useful for ray tracing calculation through optical system for the further wave front reconstruction by Zernike polynomials. The usage of optimal point distribution can reduce the number of rays necessary for wave front reconstruction that increases drastically calculation speed.

Keywords

Zernike polynomials, wave aberration, aberration computation, approximation, point distribution

Введение

При проектировании оптических систем наиболее важной характеристикой качества оптической системы, от которой зависят все остальные, являются волновые aberrации [1–6]. Первоначальное вычисление aberrаций происходит на основе вычисления хода лучей через оптическую систему, однако в дальнейшем для описания волновой aberrации используется ее разложение в ряд по полиномам, чаще всего по полиномам Цернике [7–14]:

$$W(\rho, \varphi) = \sum_n \sum_m c_{nm} R_n^m(\rho) \cdot \cos(m\varphi) + \sum_n \sum_m s_{nm} R_n^m(\rho) \cdot \sin(m\varphi),$$

где ρ и φ – зрачковые полярные канонические координаты; $m+n$ – четное число, причем $n \geq m$; $R_n^m(\rho)$ – радиальные полиномы Цернике, зависящие только от ρ ; c_{nm} , s_{nm} – коэффициенты разложения.

В сравнении с другими способами разложения волновой aberrации в ряд, полиномы Цернике образуют устойчивый базис к погрешностям вычислений при моделировании работы оптических систем на компьютере или математической обработке результатов измерений, а также обеспечивают простоту и удобство дальнейшего использования коэффициентов аппроксимации [10–14].

Для аппроксимации волновой aberrации полиномами Цернике можно использовать один из численных методов аппроксимации, наиболее распространенным из которых является метод наименьших квадратов. Первоначально для аппроксимации необходимо вычислить волновую aberrацию для большого количества лучей, распределенных по входному зрачку оптической системы. В зависимости от выбора способа такого распределения можно добиться уменьшения требуемого количества лучей при сохранении заданной точности вычислений [15].

В данной работе проводится исследование и сравнение различных способов распределения лучей по зрачку для вычисления волновой aberrации и аппроксимации полиномами Цернике методом наименьших квадратов.

Выборки точек первоначальных данных для аппроксимации

Для получения коэффициентов разложения по полиномам Цернике используется выборка точек (координат лучей по зрачку), по которой, используя метод наименьших квадратов, можно получить результат с требуемой точностью. Однако при увеличении точности описания разложения волновой aberrации по полиномам Цернике растет и количество точек, необходимых для расчета по методу наименьших квадратов, что увеличивает продолжительность вычисления [7, 15]. Для уменьшения количества используемых точек при сохранении требуемой точности используются специальные выборки точек [15].

От выбора узлов аппроксимации зависит погрешность полученных коэффициентов. Следовательно, при одинаковом количестве точек можно, аппроксимируя по специальной выборке, добиться уменьшения погрешности.

В данной работе исследовались следующие методы распределения узлов аппроксимации (рис. 1).

Декартово распределение – равномерная выборка точек с постоянным значением разности между координатами ближайших точек, расположенных на единичном круге (рис. 1, а).

Угловое распределение – равномерная выборка точек с постоянным расстоянием между окружностями и постоянным углом между точками в пределах одной окружности (рис. 1, б).

Распределение на площадки с равной площадью [16] – равномерная выборка точек с постоянным расстоянием между окружностями. Расстояние между точками в окружности определяется таким образом, чтобы точки находились в центре площадок равной площади (рис. 1, в):

$$N_i = (2i - 1) \cdot N_1,$$

где i – номер окружности; N_i – количество точек (площадок) в i -й окружности; N_1 – количество точек (площадок) в 1-й окружности.

Ромбовидное распределение – равномерная выборка точек, разбивающая единичный круг на ромбы с одинаковыми сторонами. При этом чем дальше от центра ромб, тем более он вытянут вдоль касательных к границе диска (рис. 1, г). Распределение точек для такой выборки можно описать следующим образом:

$$x_{i,j} = \cos\left(\pi \frac{i}{2m}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{2j+i}{2m}\right),$$

$$y_{i,j} = \cos\left(\pi \frac{i}{2m}\right) \cdot \sin\left(\pi \frac{2j+i}{2m}\right),$$

где i – номер окружности; m – количество окружностей; j – номер точки на окружности ($0 \leq j \leq 2m$).

Спиралевидное распределение описывается спиралью с заданным углом поворота θ , на которой расположены точки с возрастающей частотой, пропорциональной квадрату расстояния от центра до точки (рис. 1, д). Частным случаем спиралевидного распределения является равномерное распределение по «золотой спирали» с углом поворота, приблизительно равным $2,4\pi$ (рис. 1, е). Распределение точек для спиралевидной выборки можно описать следующим образом:

$$\rho_i = \sqrt{i/N},$$

$$\varphi_i = \theta i,$$

где i – номер точки в выборке; N – общее количество точек в выборке.

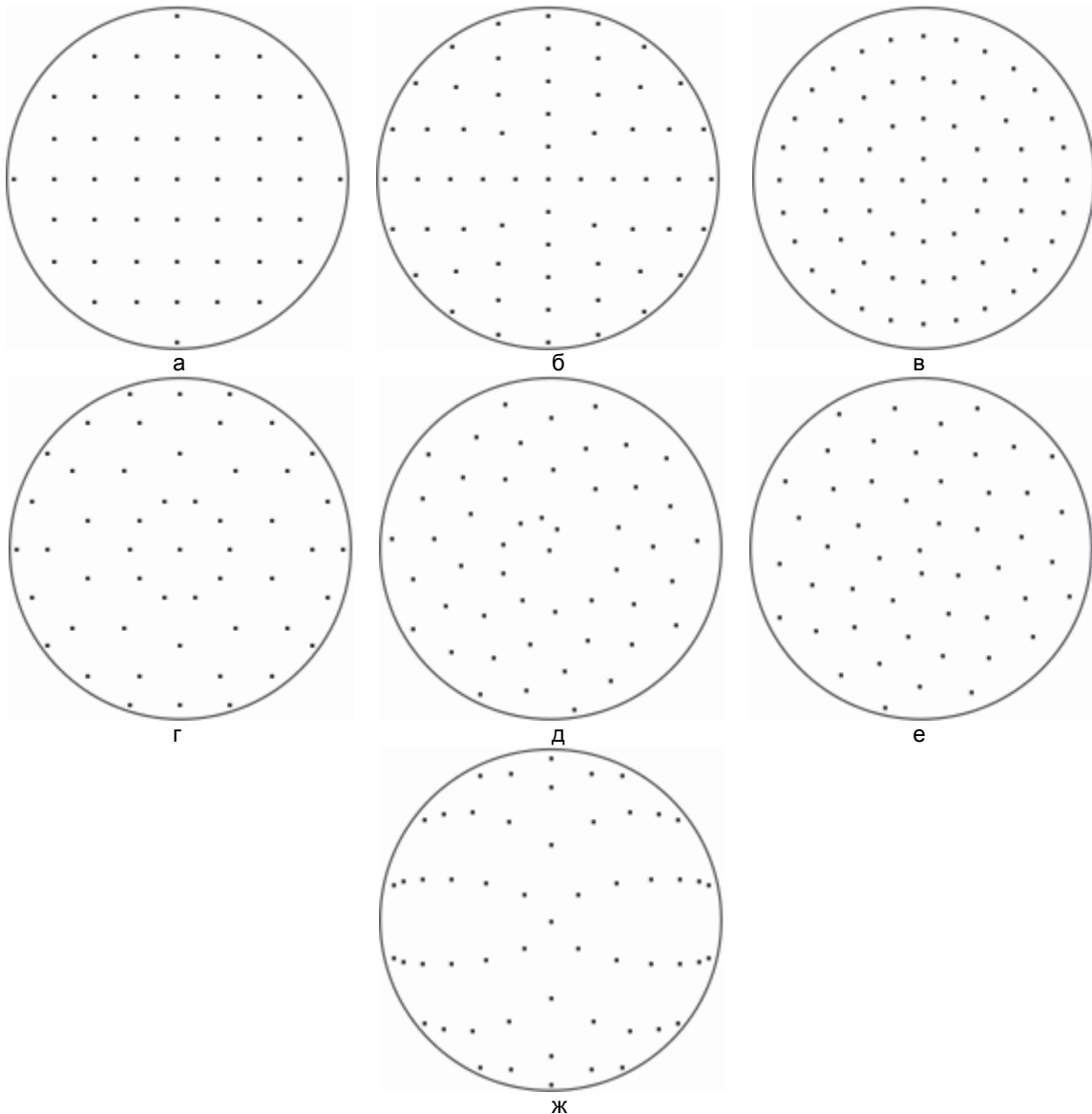


Рис. 1. Исследуемые виды распределения точек по кругу: декартово распределение (49 точек) (а); угловое распределение (61 точка) (б); распределение на площадки с равной площадью (64 точки) (в); ромбовидное распределение (51 точка) (г); спиралевидное распределение (50 точек, угол поворота 70°) (д); спиралевидное распределение (50 точек, метод спиралей золотого сечения) (е); распределение методом Родионова (55 точек) (ж)

Распределение по методу Родионова [15] – неравномерная выборка точек, охватывающая всю область круга и сгущающаяся к периферии (рис. 1, ж).

$$\rho_i = \cos\left(\pi \cdot \frac{2i-1}{2N}\right),$$

$$\varphi_j = \frac{\pi}{2k}(2j+1), \quad k = \frac{N+1}{2} + 1 - i,$$

где i – номер окружности ($1 \leq i \leq \frac{N+1}{2}$); j – номер точки на окружности ($1 \leq j \leq k$); N – общее количество точек в выборке.

Методика исследования

В качестве референтных данных для сравнения результатов аппроксимации по описанным выше выборкам точек использовались исходные полиномы Цернике, описывающие aberrации осевых и внеосевых пучков оптических систем и вычисленные при помощи среды автоматического проектирования OPAL-PC. Всего в работе использовано 68 таких разложений.

Для каждого исследуемого разложения использованы выборки точек, построенные различными методами с различным общим количеством точек в распределении. Полученные выборки точек являлись экспериментальными данными для последующей аппроксимации методом наименьших квадратов. Поскольку реальный волновой фронт всегда имеет более сложную форму, чем его описание при помощи полиномов, в исследовании волновой фронт восстанавливался для базиса с меньшим количеством коэффициентов.

Полученные в результате полиномы Цернике для различных выборок точек сравнивались с исходным разложением. В качестве параметра, оценивающего эффективность аппроксимации, использовалось среднеквадратическое отклонение (СКО). При этом для вычисления СКО использовалась всегда одно и то же количество точек (124980) с декартовым распределением, что заведомо больше, чем количество точек, используемое для аппроксимации:

$$\text{СКО} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (W_{2i} - W_{1i})^2},$$

где W_1 – референтный волновой фронт; W_2 – восстановленный волновой фронт; N – общее количество сравниваемых точек на волновом фронте; i – порядковый номер точки.

Сравнение результатов аппроксимации

В ходе исследования были рассчитаны и проанализированы результаты аппроксимаций по описанным выше методам построения выборок точек с постепенно возрастающим количеством точек. При этом все исследуемые выборки, кроме спиралевидного распределения, не могут быть определены для произвольного количества точек, а только для некоторого (зависящего от распределения) их количества.

Результаты исследований показали, что для всех исследуемых референтных волновых фронтов прослеживается общий паттерн зависимости СКО от количества точек для каждого типа распределения точек. Результаты СКО для всех представленных видов распределений точки для одного из референтных волновых фронтов представлены в таблице и на рис. 2.

Декартово распределение		Угловое распределение		Распределение на площадке с равной площадью		Ромбовидное распределение		Распределение Родионова		Спиралевидное распределение (золотого сечения)		Спиралевидное распределение (70°)	
кол-во точек	СКО (длин волн)	кол-во точек	СКО (длин волн)	кол-во точек	СКО (длин волн)	кол-во точек	СКО (длин волн)	кол-во точек	СКО (длин волн)	кол-во точек	СКО (длин волн)	кол-во точек	СКО (длин волн)
16	2,5084	–	–	16	37,4967	19	87376,2000	19	92,2116	16	0,0012	16	0,0008
29	0,0025	25	0,4394	–	–	–	–	29	0,0012	29	0,0005	29	0,0004
32	0,0073	–	–	36	1,4990	33	0,0015	41	0,0011	32	0,0004	32	0,0004
49	0,0017	–	–	–	–	51	0,0011	55	0,0011	49	0,0003	49	0,0003
60	0,0013	61	0,0019	64	0,0069	–	–	–	–	60	0,0003	60	0,0003
77	0,0012	–	–	–	–	73	0,0011	71	0,0011	77	0,0003	77	0,0003
88	0,0019	85	0,0013	100	0,0043	99	0,0011	89	0,0011	88	0,0003	88	0,0003

Таблица. СКО для различных методов построения распределений

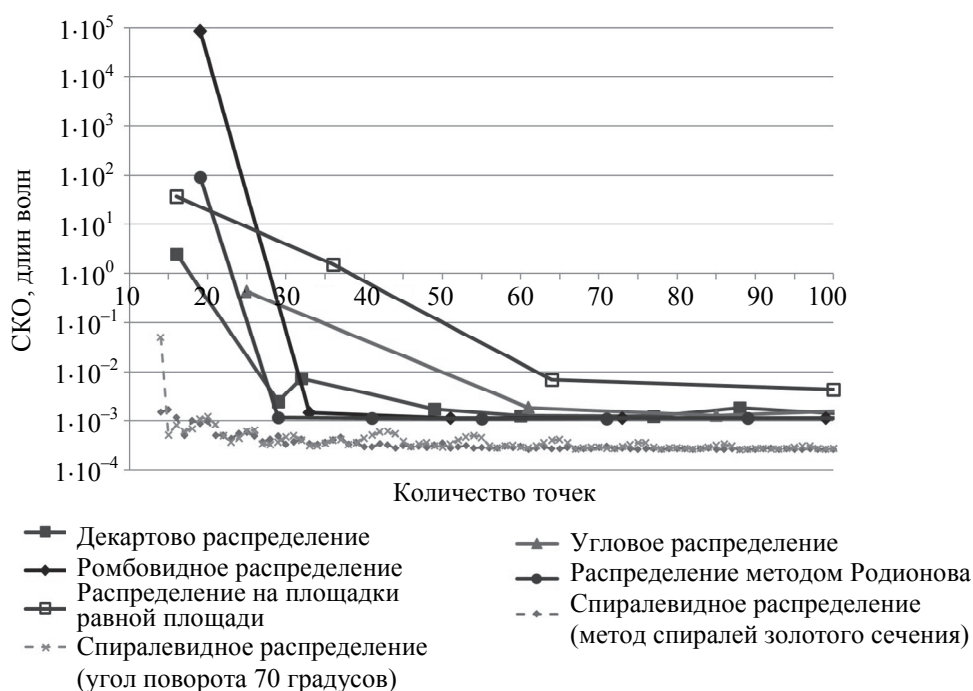


Рис. 2. Графики зависимости среднеквадратического отклонения для различных методов построения распределений (в логарифмическом масштабе)

Из таблицы и графика на рис. 2 видно, что быстрее всего и к меньшему СКО аппроксимация сходится для спиралевидных распределений. Уже начиная с 17 точек, СКО не превышает 10^{-3} длин волн. Хотя колебание погрешности полностью прекращается только после 80 точек, эти колебания незначительны и не превышают заданную точность. Отличия от спиралевидных распределений с различными углами поворота также незначительны.

Следующим по сходимости является метод распределения точек Родионова, где точки располагаются по окружности неравномерно. Метод окончательно сходится, начиная от 29 точек. Для ромбовидного распределения (точки также более густо расположены на краях зрачка) метод сходится, начиная с 33 точек. Для случая декартова распределения метод сходится медленнее, и не всегда увеличение количества точек гарантирует увеличение точности. Это связано с особенностью распределения – с тем, сколько точек оказывается на краю зрачка. Колебание погрешности более существенно, чем для спиралевидных распределений. Случаи углового распределения и распределения по площадкам равной площади – самые неудачные, несмотря на то, что их рекомендуют использовать для расчета хода лучей [16].

Таким образом, меньшая погрешность при минимальном количестве точек на зрачке достигается при спиралевидных распределениях. Кроме того, в этих распределениях, в отличие от всех остальных, можно задавать произвольное количество точек.

Часто при аппроксимации волнового фронта используют свойство симметрии волнового фронта (для центрированных оптических систем). В этом случае использование метода Родионова либо ромбовидного распределения может также быть эффективным за счет использования половины выборки, так как оба эти распределения симметричны относительно оси ординат.

Заключение

Таким образом, в работе были исследованы различные методики распределения точек (координат лучей по зрачку) при аппроксимации волнового фронта полиномами Цернике. В работе показано, что спиралевидное распределение дает наименьшую погрешность при наименьшем количестве точек. Однако отсутствие симметрии при спиралевидном распределении делает невозможным его использование для половины зрачка, как часто делается при вычислении хода лучей через центрированные оптические системы. Кроме того, пригодными для аппроксимации являются метод распределения Родионова и ромбовидное распределение, особенно с использованием свойства симметрии волнового фронта для центрированных оптических систем. Исследуемые распределения точек могут использоваться при вычислении хода лучей через оптическую систему для последующего восстановления и описания волнового фронта полиномами Цернике. Использование оптимального распределения точек может уменьшить требуемое для восстановления волнового фронта количества лучей, что существенно увеличит скорость вычислений.

Литература

1. Tolstoba N.D. Gram-Schmidt technique for aberration analysis in telescope mirror testing // *Proceedings of SPIE*. 1999. V. 3785. P. 140–151.
2. Smirnov A.J., Utkin A.B. On relation between the wave aberration function and the phase transfer function in an adaptive optical system for Earth observation // *Proceedings of SPIE*. 2001. V. 4353. P. 256–265. doi: 10.1117/12.417744
3. Zhao Q., Fan H., Hu S., Zhong M., Baida L. Effect of optical aberration of telescopes to the laser radar // *Proceedings of SPIE*. 2010. V. 7656. Art. 76565Z. doi: 10.1117/12.867716
4. Zhang W., Liu P., Wei X., Zhuang S., Yang B. The analysis of the wavefront aberration caused by the gravity of the tunable-focus liquid-filled membrane lens // *Proceedings of SPIE*. 2010. V. 7849. Art. 78491W. doi: 10.1117/12.869866
5. Romanova G., Ivanova T., Korotkova N. Automation design of cemented doublet // *Proceedings of SPIE*. 2015. V. 9626. Art. 96262S. doi: 10.1117/12.2191115
6. Иванова Т.В., Романова Г.Э., Жукова Т.И., Калинин О.С. Метод расчета и анализа склеенного компонента с ахроматической и апланатической коррекцией // *Оптический журнал*. 2017. Т. 84. № 8. С. 54–58.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 713 с.
8. Sheppard C.J.R., Campbell S., Hirschhorn M.D. Zernike expansion of separable functions of Cartesian coordinates // *Applied Optics*. 2004. V. 43. N 20. P. 3963–3966. doi: 10.1364/AO.43.003963
9. Bezdidko S.N. New principles of synthesis and optimization of optical systems using a computer // *OSA Proc. Int. Optical Design Conference*. 1994. V. 22. P. 16–22.
10. Mahajan V.N. Zernike polynomials and aberration balancing // *Proceedings of SPIE*. 2003. V. 5173. P. 1–17. doi: 10.1117/12.511384
11. Bezdidko S.N. Theory of orthogonal aberrations and its use in lens design // *Optical Review*. 2014. V. 21. N 5. P. 632–638. doi: 10.1007/s10043-014-0101-2
12. Бездидко С.Н. Определение коэффициентов разложения волновой aberrации по полиномам Цернике // *Оптико-механическая промышленность*. 1975. № 7. С. 75–77.
13. Bezdidko S.N. Orthogonal aberrations: theory, methods, and practical applications in computational optics // *Journal of Optical Technology*. 2016. V. 83. N 6. P. 351–359. doi: 10.1364/JOT.83.000351
14. Ezhova K.V. Expansion of photogrammetric distortion in orthogonal Zernike polynomials // *Journal of Optical Technology*. 2012. V. 79. N 5. P. 299–301.
15. Родионов С.А. Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: Машиностроение, 1982. 270 с.
16. Masset L., Bruls O., Kerschen G. Partition of the circle in cells of equal area and shape. [Электронный ресурс]. Technical Report. University of Liege. 2012. Режим доступа: http://orbi.ulg.ac.be/bitstream/2268/91953/1/masset_isocell_orb_i.pdf, свободный. Яз. англ. (дата обращения 14.09.2017).

Авторы

Иванова Татьяна Владимировна – кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 7202117384, ORCID ID: 0000-0001-8564-243X, tvivanova@corp.ifmo.ru

Анощенко Дмитрий Игоревич – студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0001-5684-5182, s55078m@gmail.com

References

1. Tolstoba N.D. Gram-Schmidt technique for aberration analysis in telescope mirror testing. *Proceedings of SPIE*, 1999, vol. 3785, pp. 140–151.
2. Smirnov A.J., Utkin A.B. On relation between the wave aberration function and the phase transfer function in an adaptive optical system for Earth observation. *Proceedings of SPIE*, 2001, vol. 4353, pp. 256–265. doi: 10.1117/12.417744
3. Zhao Q., Fan H., Hu S., Zhong M., Baida L. Effect of optical aberration of telescopes to the laser radar. *Proceedings of SPIE*, 2010, vol. 7656, art. 76565Z. doi: 10.1117/12.867716
4. Zhang W., Liu P., Wei X., Zhuang S., Yang B. The analysis of the wavefront aberration caused by the gravity of the tunable-focus liquid-filled membrane lens. *Proceedings of SPIE*, 2010, vol. 7849, art. 78491W. doi: 10.1117/12.869866
5. Romanova G., Ivanova T., Korotkova N. Automation design of cemented doublet. *Proceedings of SPIE*, 2015, vol. 9626, art. 96262S. doi: 10.1117/12.2191115
6. Ivanova T.V., Romanova G.E., Zhukova T.I., Kalinkina O.S. Method for calculation and analysis of a cemented component with achromatic and aplanatic correction. *Journal of Optical Technology*, 2017, vol. 84, no. 8, pp. 548–551. doi: 10.1364/JOT.84.000548
7. Born M., Wolf E. *Principles of Optics*. NY, Pergamon, 1959.
8. Sheppard C.J.R., Campbell S., Hirschhorn M.D. Zernike expansion of separable functions of Cartesian coordinates. *Applied Optics*, 2004, vol. 43, no. 20, pp. 3963–3966. doi: 10.1364/AO.43.003963
9. Bezdidko S.N. New principles of synthesis and optimization of optical systems using a computer. *OSA Proc. Int. Optical Design Conference*, 1994, vol. 22, pp. 16–22.
10. Mahajan V.N. Zernike polynomials and aberration balancing. *Proceedings of SPIE*, 2003, vol. 5173, pp. 1–17. doi: 10.1117/12.511384
11. Bezdidko S.N. Theory of orthogonal aberrations and its use in lens design. *Optical Review*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 632–638. doi: 10.1007/s10043-014-0101-2
12. Bezdidko S.N. Determination of the coefficients of wave aberration expansion in Zernike polynomials. *Journal of Optical Technology*, 1975, no. 7, pp. 75–77. (In Russian)
13. Bezdidko S.N. Orthogonal aberrations: theory, methods, and practical applications in computational optics. *Journal of Optical Technology*, 2016, vol. 83, no. 6, pp. 351–359. doi: 10.1364/JOT.83.000351
14. Ezhova K.V. Expansion of photogrammetric distortion in orthogonal Zernike polynomials. *Journal of Optical Technology*, 2012, vol. 79, no. 5, pp. 299–301.
15. Rodionov S.A. *Automation of Optical Systems Design*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1982, 270 p. (In Russian)
16. Masset L., Bruls O., Kerschen G. *Partition of the circle in cells of equal area and shape*. Technical Report. University of Liege. 2012. Available at: http://orbi.ulg.ac.be/bitstream/2268/91953/1/masset_isocell_orb_i.pdf (accessed 14.09.2017).

Authors

Tatiana V. Ivanova – PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 7202117384, ORCID ID: 0000-0001-8564-243X, tvivanova@corp.ifmo.ru

Dmitriy I. Anoshchenkov – student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0001-5684-5182, s55078m@gmail.com