

УДК 533.65

## О СОВРЕМЕННОМ ПОДХОДЕ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ САМОЛЕТНОГО ТИПА С КОРОТКИМ ВЗЛЕТОМ И ПОСАДКОЙ.

### ЧАСТЬ III. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВОЙ АЭРОДИНАМИКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

П.В. Булат<sup>a,b,c</sup>, О.П. Минин<sup>d</sup>

<sup>a</sup> ООО «Проблемная лаборатория «Турбомашин», Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация

<sup>b</sup> Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация

<sup>c</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>d</sup> ПАО «Туполев», Москва, 105005, Российская Федерация

Адрес для переписки: [pavelbulat@mail.ru](mailto:pavelbulat@mail.ru)

#### Информация о статье

Поступила в редакцию 12.01.18, принята к печати 12.02.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-2-169-190

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Булат П.В., Минин О.П. О современном подходе к проектированию беспилотных летательных аппаратов самолетного типа с коротким взлетом и посадкой. Часть III. Численное моделирование вихревой аэродинамики летательного аппарата методом дискретных вихрей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 2. С. 169–190. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-2-169-190

#### Аннотация

Настоящая публикация продолжает серию обзорных статей, посвященных актуальным задачам проектирования беспилотных летательных аппаратов следующего поколения, появления которых стоит ожидать в период с 2025 г. по 2035 г. Рассмотрены простые и эффективные численные методы, основанные на идеях вихревой несущей поверхности, позволяющие выполнять полноценный параметрический анализ летательных аппаратов, имеющих весьма сложную аэродинамическую форму крыла. Приведены примеры расчетов треугольного крыла малого и умеренного удлинения с острой и скругленной передней кромкой. Рассмотрены методы проектирования деформированных аэродинамических поверхностей с оптимальными свойствами, метод расчета механизации крыла. Изучено формирование вихрей на острых передних кромках, разрушение вихрей над поверхностью крыла, механизм диффузии вихрей. Изложен метод расчета крыльев малого удлинения. Выполнено сравнение полученных результатов с результатами эксперимента и проверочных численных расчетов.

#### Ключевые слова

Национальная технологическая инициатива, «Аэронет», беспилотный летательный аппарат, вертикальный взлет и посадка, короткий взлет и посадка, аэродинамика, метод дискретных вихрей, треугольное крыло малого удлинения, вихревая подъемная сила

## ON MODERN APPROACH TO AIRPLANE-TYPE UNMANNED AERIAL VEHICLES DESIGN WITH SHORT TAKEOFF AND LANDING PART III. NUMERICAL MODELING OF AIRCRAFT VORTEX AERODYNAMICS BY DISCRETE VORTEX METHOD

P.V.Bulat<sup>a,b,c</sup>, O.P. Minin<sup>d</sup>

<sup>a</sup> LLC "Problem Laboratory "Turbomachines", Saint Petersburg, 198035, Russian Federation

<sup>b</sup> Baltic State Technical University "VOENMEH" n.a. D.F. Ustinov, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation

<sup>c</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>d</sup> PSC "Tupolev", Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: [pavelbulat@mail.ru](mailto:pavelbulat@mail.ru)

#### Article info

Received 12.01.18, accepted 12.02.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-2-169-190

Article in Russian

**For citation:** Bulat P.V., Minin O.P. On modern approach to airplane-type unmanned aerial vehicles design with short takeoff and landing. Part III. Numerical modeling of aircraft vortex aerodynamics by discrete vortex method. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 169–190 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-2-169-190

### Abstract

This publication continues a series of review papers devoted to the urgent problems of designing unmanned aircrafts of the next generation, which are expected to appear in the period from 2025 to 2035. The paper considers simple and effective numerical methods based on the ideas of a vortex lift surface that allow for performing a full parametric analysis of aircrafts with very complex aerodynamic shape of the wing. Calculation examples are given for triangular wing of small and moderate aspect ratio with an acute and rounded leading edge, as well as a wing of complex shape. We consider design methods for deformed aerodynamic surfaces with optimal properties and a method for wing mechanization calculating. The formation of vortices on sharp front edges, the destruction of vortices over the wing surface and diffusion mechanism of vortices are studied. The calculation method for small aspect ratio wings is described. The results obtained are compared with the results of the experiment and numerical verification.

### Keywords

national technological initiative, aeronet, unmanned aerial vehicle, vertical take-off and landing, short take-off and landing, aerodynamics, discrete vortex method, slender-delta wing, vortex lift

### Введение

В первой статье [1] настоящего цикла, посвященного концептуальному проектированию беспилотных летательных аппаратов (БЛА) самолетного типа, было приведено описание базовых методов аэродинамического анализа, основанных на линейной теории несущей поверхности Прандтля (Prandtl) [2]. В рамках этой модели крыло описывается безразмерными параметрами:  $\lambda=4l^2/S$  – удлинение ( $A$  или  $AR$  – международное обозначение);  $\eta=b_0/b_k$  – сужение крыла ( $\lambda$  – международное обозначение);  $C_y = F_y/(S \rho u^2/2)$  – коэффициент подъемной силы ( $C_L$  – международное обозначение);  $C_x = F_x/(S \rho u^2/2)$  – коэффициент лобового сопротивления ( $C_D$ ), где  $l$  – длина консоли крыла,  $S$  – площадь крыла,  $b_0$  – длина корневой хорды крыла,  $b_k$  – длина концевой хорды крыла,  $F_y$  – подъемная сила,  $F_x$  – сила сопротивления,  $\rho$  – плотность воздуха,  $u$  – скорость. Крыло полагается плоским и тонким, эффект формы не учитывается.

Опираясь только на классическую теорию Прандтля и базовые уравнения движения, в [1] получены выводы относительно возможного облика БЛА с вертикальным или коротким взлетом и посадкой (ВВП/КВП). Показано, что в рамках традиционной аэродинамической компоновки с крылом большого удлинения сложно совместить летные характеристики и транспортную эффективность обычного самолета с возможностью базирования на неподготовленных площадках. При дальности полета до 800 км и крейсерской скорости 500–750 км/ч перспективным оказалась компоновка типа «летающее крыло» с малым удлинением крыла, большой относительной толщиной и большим внутренним объемом. Такая компоновка летательного аппарата (ЛА) потенциально позволяет при КВП использовать эффект близости земли (экраный эффект), предоставляет достаточно места внутри для размещения груза и топлива, а небольшое удлинение крыла упрощает посадку на неровные неподготовленные площадки, например, ледяные поля с торосами.

В рамках направления «Аэронет» [3] Национальной технологической инициативы [4] прогнозируется появление большого числа проектов БЛА с нетрадиционной аэродинамической формой, что уменьшает ценность баз данных ранее выполненных расчетных и экспериментальных исследований. Следовательно, актуальными задачами являются: разработка технологий экспресс-проектирования и параметрического анализа необычных аэродинамических компоновок; создание методик проектирования новых аэродинамических профилей и поверхностей с энергетическими методами создания подъемной силы; разработка методов уменьшения лобового сопротивления и управления ЛА при помощи микроэлектромеханических, плазменных и энергетических устройств.

По мере развития современных численных методов (Computer Fluid Dynamics, CFD) стало модным сводить работу по проектированию ЛА к серии численных расчетов во всем диапазоне проектных параметров, что вряд ли можно признать разумным. На этапе выбора основных параметров аэродинамической схемы и их оптимизации применение CFD-методов требует чрезвычайно трудоемкой работы по подготовке 3D-моделей, разностных сеток, выбору модели турбулентности и теоретическому обоснованию постановки задачи. Непростой часто бывает и интерпретация результатов.

Аэродинамика крыльев малого удлинения носит преимущественно вихревой характер. Корректный расчет вихревой системы ЛА в рамках существующих CFD-методов и ее анализ требуют значительных вычислительных ресурсов, сложных вихреразрешающих численных методов (Large Eddy Simulation, LES) [5] либо существенной доработки традиционных двухкомпонентных моделей турбулентности [6, 7], в частности, учета большой кривизны линий тока в вихрях [8, 9]. Ожидается, что в полной мере эти проблемы могут быть разрешены не ранее конца текущего столетия, а первые опыты регулярного практического использования метода LES появятся не ранее 40-х годов [10]. Вопросы моделирования отрыва и вовсе не решены и требуют комбинации расчета пограничного слоя в ламинарной постановке с последующим моделированием перехода к турбулентному течению. К счастью, существуют простые и эффективные методы, которые прекрасно себя зарекомендовали как средство первого приближения на

этапе концептуального аэродинамического проектирования ЛА. Ниже рассматриваются численные методы аэродинамического анализа, появившиеся в результате развития классической теории крыла, а также конкретные методы выбора параметров несущей поверхности ЛА.

### Численные методы, основанные на решении сингулярных уравнений

В классической теории Прандтля все выводы получены в рамках модели бесконечно тонкой плоской поверхности. Мы далее не будем полагать крыло тонким, а рассмотрим общий подход и покажем, как можно свести задачу к расчету бесконечно тонких несущих поверхностей. При этом мы будем опираться на выводы, полученные в работе [1]. Для распределения возмущения скорости  $u_x$  вдоль хорды по всей поверхности крыла можно записать следующее выражение для случая безциркуляционного обтекания:

$$\frac{u_x(x, y, 0)}{u_\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^b \int_{-l}^l \frac{dz(\bar{x})}{d\bar{x}} \frac{(x - \bar{x})d\bar{x}d\bar{y}}{[(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

где  $u_\infty$  – скорость невозмущенного потока;  $x$  – координата, направленная вдоль хорды;  $y$  – координата, направленная вдоль размаха крыла;  $z$  – координата, перпендикулярная поверхности, образованной хордами крыла. Именно такая система координат принята в большинстве иностранных работ. В СССР и России принято вдоль крыла располагать ось  $z$ , а перпендикулярно его поверхности – ось  $y$ . Причина в том, что коэффициент подъемной силы у нас принято обозначать  $C_y$ , а за рубежом –  $C_L$ . Черточками в (1) обозначены переменные интегрирования. Уравнение (1) может быть проинтегрировано точно для некоторых частных случаев, например, когда профили крыла образованы эллипсом.

Теория Прандтля привела к развитию методов, основанных на решении сингулярных интегральных уравнений. В газодинамике потенциальных течений вводится три вида сингулярных особенностей. Это – вихрь, диполь и источник (рис. 1). Источник отвечает за эффект толщины, т.е. за распределение линий тока по поверхности. Вихри и диполи отвечают за циркуляцию и, соответственно, за нормальные нагрузки на поверхность, т.е. за подъемную силу.

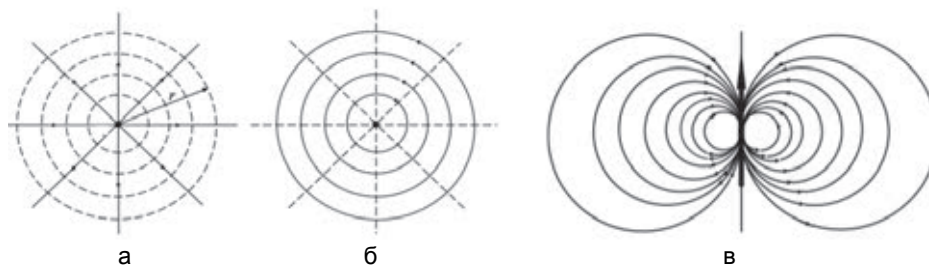


Рис. 1. Сингулярные особенности: источник (а); вихрь (б); диполь (в).  
 $r$  – расстояние до контрольной поверхности

Комбинируя сингулярные особенности в панели и распределяя эти панели по поверхности ЛА, можно добиться удовлетворительного описания обтекания ЛА потенциальным потоком. Уравнение (1) эквивалентно описанию поверхности крыла при помощи источников, откуда следует, что оно не может адекватно описывать течение у концов крыла, так как при этом появляется составляющая возмущения скорости  $u_y$ , направленная вдоль размаха крыла. В практике проектирования крыла обычно считается, что трехмерные концевые эффекты локализованы и оказывают влияние на расстоянии, примерно равном половине хорды крыла от его конца.

Очевидно, существует проблема описания поверхности при помощи источников также и в окрестностях точек торможения. Ее можно преодолеть в рамках линейной теории при помощи того факта, что циркуляция вектора скорости вокруг несущей поверхности должна быть равна нулю, следовательно, должны быть равны нулю все линейные интегралы скорости вдоль контура крыла, откуда следует, что

$$\frac{u_x(x, z)}{u_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz(x)}{dx}\right)^2}} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dz(\bar{x})}{d\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{x - \bar{x}} \right). \quad (2)$$

В уравнении (2)  $z(x)$  – уравнение, описывающее форму профиля в сечении  $y$ . Соотношение (2) дает удовлетворительные результаты вплоть до относительной толщины профиля 20% [11]. Таким образом, используя систему (1)–(2), можно рассчитывать возмущение в потоке, которое вызывает толстое несущее крыло большого удлинения. Добавляя на поверхности ЛА особенности, создающие завихренность в потоке, можно получить уравнение, описывающее создание подъемной силы [1, 12]:

$$\frac{u_x(x, y)}{u_\infty} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\Delta p(\bar{x}, \bar{y})}{y - \bar{y}} \left[ 1 + \frac{\sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}}{x - \bar{x}} \right] d\bar{x}d\bar{y}, \quad (3)$$

где  $\Delta p(x, y)$  – подъемная сила, действующая в точке крыла с заданными координатами  $(x, y)$ . Решая систему сингулярных интегральных уравнений (2)–(3), можно рассчитать подъемную силу и сопротивление ЛА, обтекаемого идеальной несжимаемой жидкостью.

**Панельные методы**

Для решения подобных задач были разработаны панельные методы, относящиеся к численным методам, но, в отличие от CFD, в них дискретизация производится не во всем объеме течения, а только на поверхности ЛА, которая покрывается четырехугольными панелями с сингулярными элементами (источники, диполи, вихри) внутри (рис. 2).

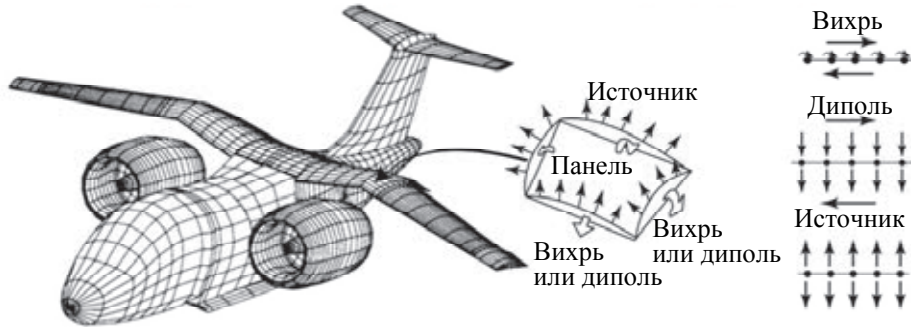


Рис. 2. Дискретизация задачи в панельном методе

Наиболее последовательное изложение теории панельных методов в хронологической последовательности их развития дано Катцом (Katz) [13]. В панельных методах поток около ЛА считается потенциальным, за исключением вихревых следов, точки (линии) схода которых задаются при постановке задачи расчета. Поскольку из теоремы Гельмгольца следует, что у замкнутого вихря напряженность  $\gamma$  постоянна, то такой замкнутый вихрь, стороны которого совпадают со сторонами панели, будет генерировать точно такое же поле скоростей, что и диполи [14] (рис. 3, б). Следовательно, описания поверхности ЛА при помощи диполей и кольцевых вихрей равноценны (рис. 3, а).

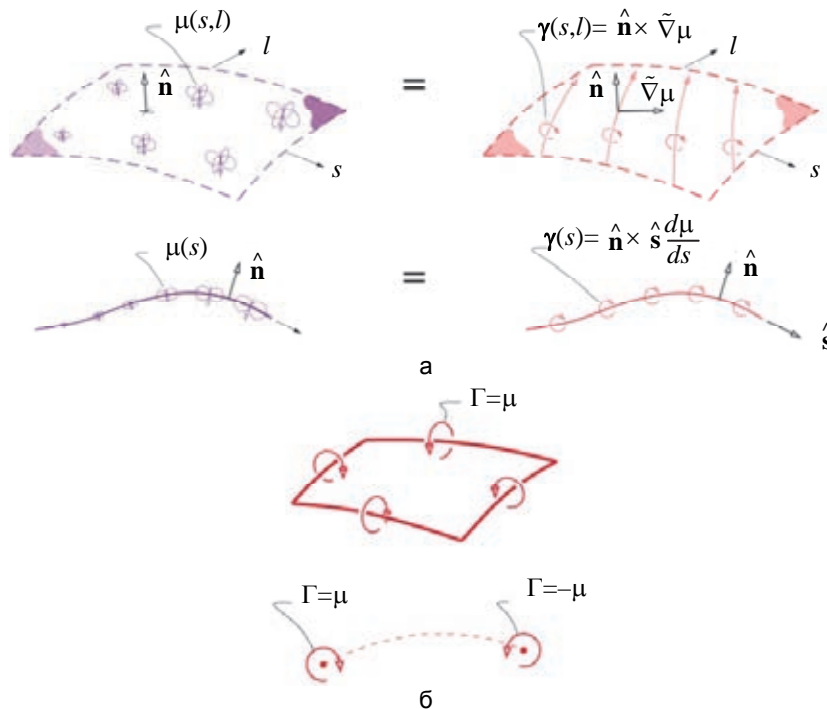


Рис. 3. Эквивалентность описания поверхности летательного аппарата (а) системой диполей с интенсивностями  $\mu(s, l)$  или системой вихревых нитей интенсивностью  $\gamma(s, l)$ , где  $\gamma$  – вектор завихренности;  $s, l$  – естественная система координат, заданная на поверхности;  $\hat{n}$ ,  $\hat{s}$  – вектор нормали и по касательной к поверхности;  $\tilde{\nabla}$  – символический вектор Гамильтона. Эквивалентность поля скоростей, индуцированного кольцевым вихрем с циркуляцией  $\Gamma$  и диполем с интенсивностью  $\mu$  (б)

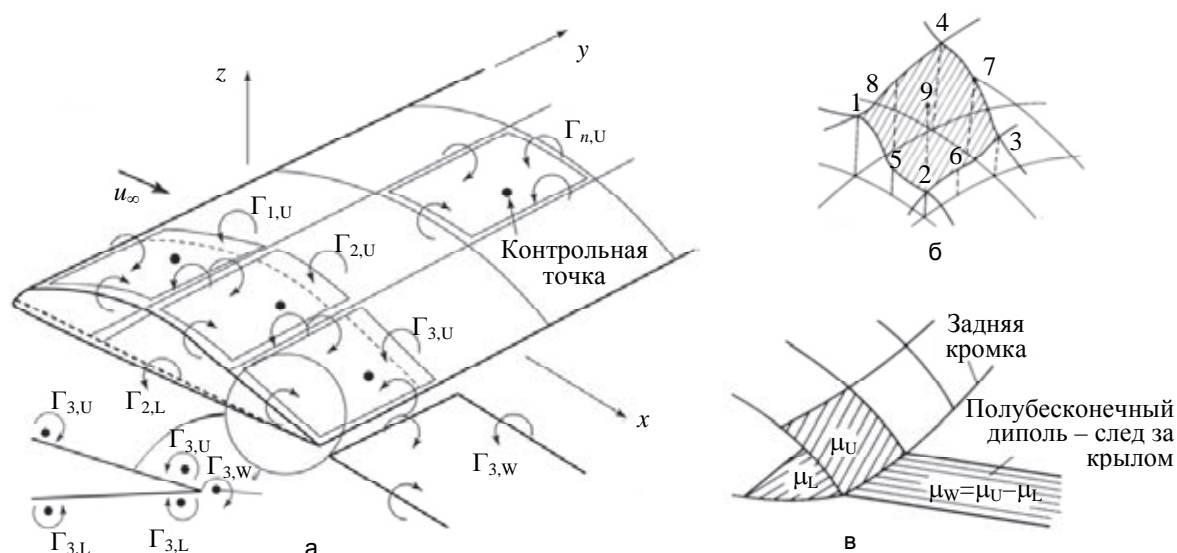


Рис. 4. Моделирование поверхности крыла и вихревой пелены в вихревом панельном методе VPN (а) и в панельном методе с описанием поверхности крыла конечными элементами высокого порядка (б) и имитацией вихревой пелены полубесконечными диполями (в). Индексы означают: U – верхняя поверхность крыла, L – нижняя поверхность крыла, W – вихревая пелена.  $\Gamma$  – циркуляция вихря,  $\mu$  – интенсивность диполя

Единственное принципиальное отличие вихревых панельных методов (VPM) от дипольного панельного метода состоит в способе моделирования вихревой пелены, которая в первом случае задается П-образным полубесконечным вихрем (рис. 4, а), а во втором – полубесконечным диполем (рис. 4, в). Кроме этого, в VPM панели могут быть только плоскими (причины пояснены ниже). В дипольном панельном методе панели могут быть плоскими или образованными поверхностями второго или третьего порядка (рис. 4, б). В последнем случае панельные методы называются методами повышенного порядка точности.

Если каждая сторона панели задается тремя точками, в которых определены не только координаты, но и производные, а распределение интенсивности диполей задается непрерывной функцией (сплайном) второго или третьего порядка, то вместо 4 параметров вихревого кольца задается 8 параметров. Такая разновидность панельных методов получила название потенциального метода конечных элементов.

М.А. Головкиным был развит альтернативный, весьма строгий метод решения сингулярных уравнений, основанный на моделировании поверхности ЛА и вихревого следа тангенциальными разрывами [15].

### Особенности численной реализации панельных методов

При всей схожести и даже эквивалентности теории источникные (Source Panel Method, SPM) и дипольные панельные методы, потенциальные методы конечных элементов и вихревые панельные методы существенно отличаются по численной реализации.

Все разновидности панельных методов, использующих различные аэродинамические особенности, помещаемые на поверхности ЛА, сводятся к решению уравнений Фредгольма II рода. Наиболее полные сведения по ним и по методам их решений в приложении к различным задачам математической физики приведены в монографии И.К. Лифанова [16].

При переходе от интегральных сингулярных уравнений к их дискретным аналогам получается система линейных уравнений [17], которая для устойчивости решения должна быть хорошо обусловлена. Однако в VPM это возможно только в том случае, если панели образованы отрезками прямых линий. Методы с использованием криволинейных вихрей приводят к плохо обусловленным системам нелинейных уравнений. Накладываются и определенные ограничения на расположение панелей. Одна из групп вихрей должна быть ориентирована преимущественно вдоль линий тока. Размеры другой группы должны быть одинаковыми. Нарушение этих правил приводит к плохой сходимости метода [18]. У источникных/дипольных панельных методов и потенциальных методов конечных элементов таких ограничений нет.

В 1985 г. Маргосоном (Margason) было выполнено сравнение результатов расчета стреловидного крыла с профилями NASA 64A010/64A112 с экспериментом [19]. Использовались такие методы, как источникный метод первого порядка, метод конечных элементов первого порядка, метод конечных элементов второго порядка и вихревой панельный метод. Все методы показали очень близкие результаты в линейной области, когда обтекание крыла безотрывное (рис. 5).



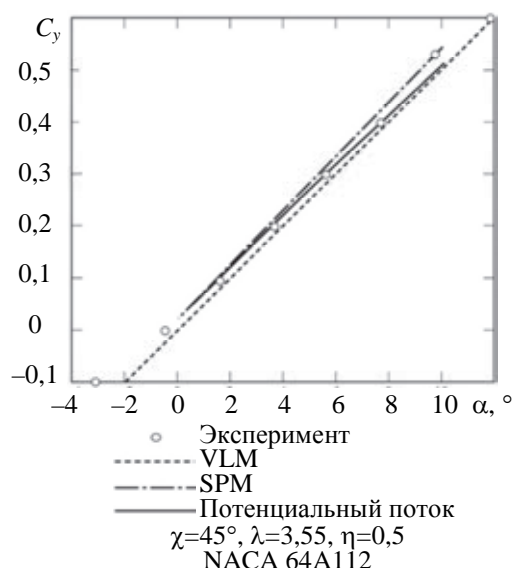


Рис. 5. Сравнение расчетов зависимости коэффициента подъемной силы  $C_y$  треугольного крыла со стреловидностью передней кромки  $\chi$ , удлинением  $\lambda$ , сужением  $\eta$  и профилем NACA 64A112 от угла атаки  $\alpha$  методом вихревых решеток VLM (Vortex Lattice Method), панельным источниковым методом SPM (Source Panel Method), аналитическим методом в рамках модели потенциального течения с данными эксперимента

На рис. 6 приведено сравнение результатов расчетов источниковым панельным методом с результатами эксперимента Эббота (Abbott) и Бангассера (Bangasser). В области отрывных течений отличия результатов расчетов методом источников от эксперимента оказалось большими. Именно поэтому панельные методы вытеснены CFD-методами и считаются устаревшими. В то же время метод дискретных вихрей (МДВ) работает в области линейной теории так же хорошо, как и панельные методы, но при этом позволяет рассчитывать и обтекание крыльев на больших углах атаки, поэтому вихревые методы являются актуальным инструментом для исследования отрывных течений, особенно на стадии параметрической оптимизации или фундаментальных исследований вихрей и вихревых генераторов.

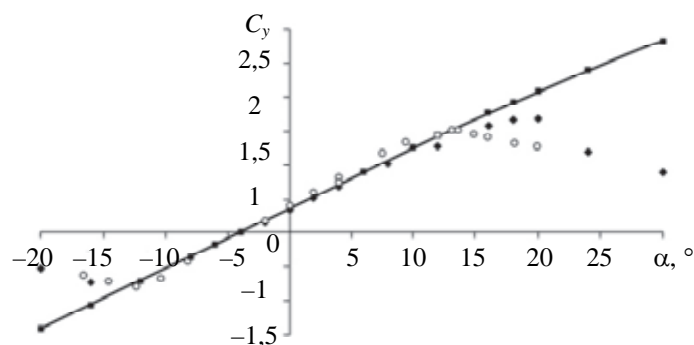


Рис. 6. Сравнение результатов расчета длинного прямого крыла с профилем NACA 4412 с экспериментами  $\circ$  – Эббота [20] и  $\blacklozenge$  – Бангассера [21],  $\blacksquare$  – расчет методом дискретных вихрей по схеме безотрывного обтекания передней кромки и сходом вихревой пелены с задних кромок, сплошная линия – метод линейной теории несущей поверхности Прандтля

#### Метод дискретных вихрей для тонких трехмерных поверхностей

На этапе концептуального аэродинамического проектирования стоит задача оценки основных аэродинамических коэффициентов. При этом достаточно, чтобы эти зависимости воспроизводились качественно верно с точностью на уровне 10–15%. Если несущая поверхность ЛА не слишком толстая, то, как следует из теории, ее подъемная сила зависит практически полностью от кривизны профиля, а его толщину можно игнорировать [22]:

$$C_y = 2\pi(1 + 0,77c) \sin(\alpha + 2f), \quad (4)$$

где  $c$  – относительная толщина профиля,  $f$  – относительная кривизна (прогиб) профиля, отнесенные к хорде  $b$ . Таким образом, подъемная сила полностью может моделироваться системой присоединенных вихрей, расположенных на бесконечно тонкой срединной поверхности (рис. 7, б), а не на самой поверхности (рис. 7, а), при этом ее подъемная сила может быть оценена по формуле (4).

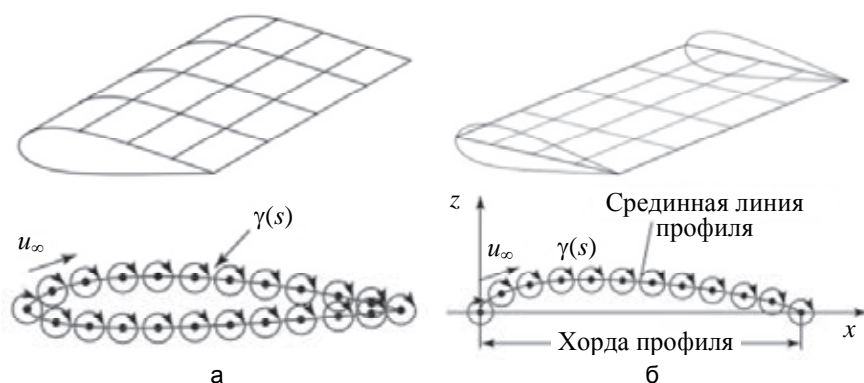


Рис. 7. Моделирование толстого крыла при помощи системы вихрей  $\gamma$ , расположенных на его поверхности  $s$  (а), а также на тонкой срединной поверхности (б)

В общем случае несущая поверхность имеет конечную толщину и обтекается вязким потоком, что приводит к образованию пограничного слоя (рис. 8, а). Пограничный слой можно заменить системой дискретных вихрей  $\gamma$ , распределенных по поверхности  $s$ , с завихренностью, равной соответствующей завихренности пограничного слоя  $\omega$  (рис. 8, а). Кривизну срединной поверхности можно моделировать переменной интенсивностью вихрей, расположенных вдоль хорды (рис. 8, б). Таким образом, для тонких трехмерных поверхностей, составленных из профилей, имеющих небольшую толщину и кривизну, допустима их замена плоскими поверхностями. При этом подъемная сила и вихревое сопротивление будут моделироваться достаточно точно [23].

Описанный в работе [1] метод вихревых решеток VLM, разработанный Фэлкнером (Falkner) [24], позволяет рассчитывать плоские тонкие крылья и может быть использован с учетом идей, представленных на рис. 8, для оценки обтекания тонких крыльев с небольшой кривизной. С некоторой натяжкой можно учитывать геометрическую крутку крыла, задавая разные углы атаки в различных сечениях крыла.

В реальности несущая система ЛА всегда трехмерная. Крыло имеет аэродинамическую и геометрическую крутку, т.е. в различных сечениях крыло может иметь разные профили, установленные под разными углами атаки. ЛА имеет объемный фюзеляж, который нельзя считать тонким, хвостовое оперение, механизацию крыла, которая может отклоняться в полете. Консоли крыла часто имеют отогнутые вверх законцовки (winglets), сами они обычно устанавливаются под некоторым углом к оси фюзеляжа, т.е. концевые сечения могут быть расположены существенно выше или ниже концевых сечений. Все это необходимо как-то учитывать на стадии параметрического анализа. Следующим за методом Фэлкнера приближением является идея расположить подковообразные вихри на поверхности или срединной поверхности крыла в несколько рядов (рис. 9). Очевидно, что это позволяет учесть кривизну крыла (рис. 9, а) и моделировать трехмерную поверхность сходящей с его задней кромки вихревой пелены (рис. 9, б).

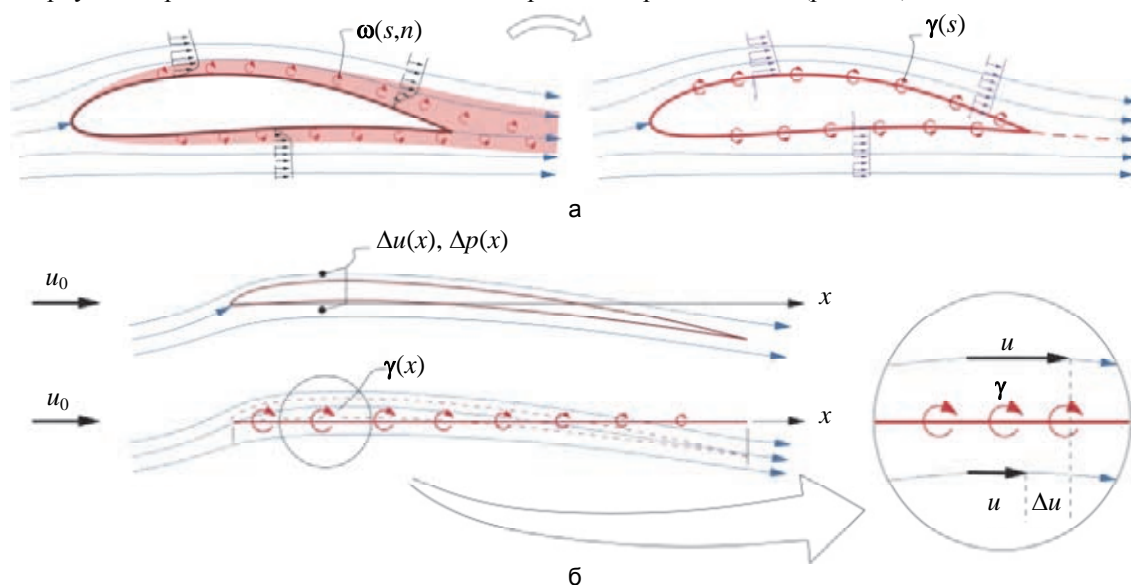


Рис. 8. Имитация реального профиля крыла конечной толщины (а), обтекаемого вязким потоком с пограничным слоем с локальной завихренностью  $\omega(s,n)$ , системой дискретных вихрей  $\gamma(s)$ , присоединенных к его поверхности  $s$ , и переход к идеализированной схеме с имитацией кривизны профиля изменением интенсивности  $\gamma(x)$  присоединенных вихрей (б)

Вихревая пелена может моделироваться замкнутыми вихрями (рис. 9, в), а не полубесконечными, как показано на рис. 9, а. Касательная к поверхности пелены параллельна местным векторам скорости на задней кромке, что математически строго доказано в работе М.А. Головкина [25]. Для учета влияния пелены на обтекание крыла необходимо вводить время  $t$ , стартовый вихрь и длину пелены. Обычно достаточно длины в 500 хорд крыла.

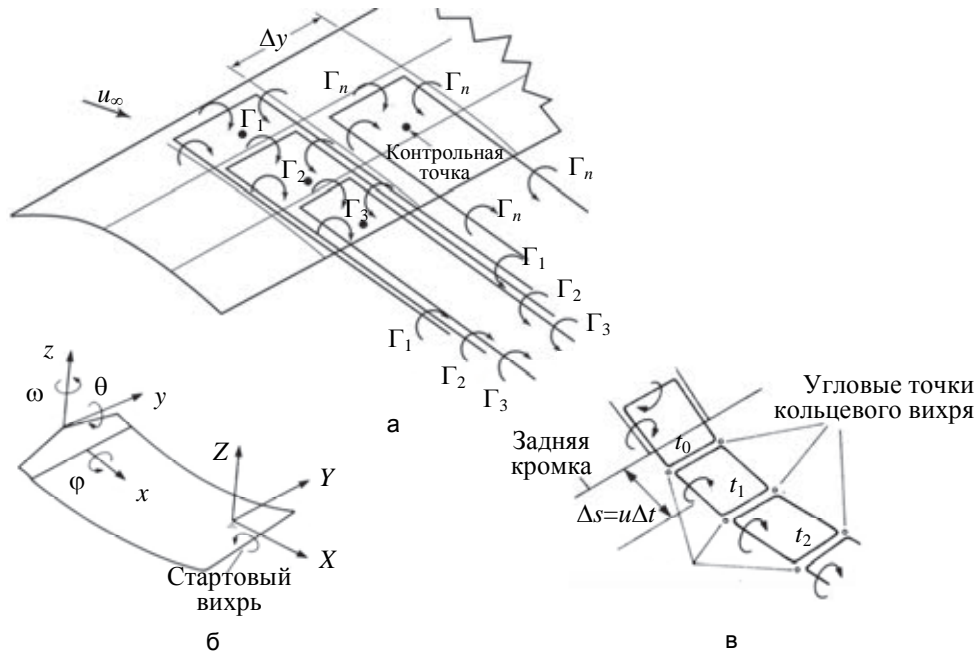


Рис. 9. Формулировка метода дискретных вихрей, позволяющая учесть кривизну несущей поверхности (а) за счет размещения на ее срединной поверхности П-образных присоединенных вихрей с циркуляцией  $\Gamma_i$ , где  $i=1..n$ , для нестационарного случая (б) замена пелены замкнутыми вихрями с размером стороны  $\Delta s = u \Delta t$ , где  $\Delta t$  – шаг по времени, позволяет учесть вращение по осям  $x, y, z$  и трехмерную форму вихревой пелены (в)

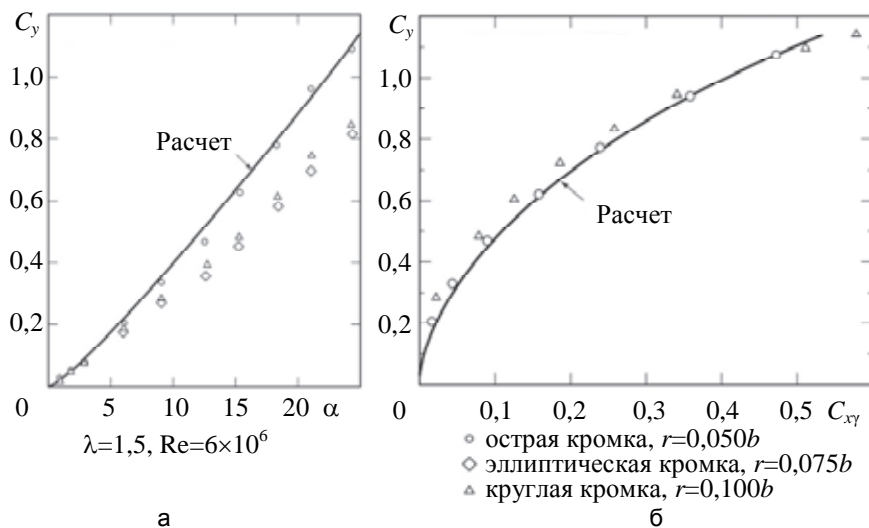


Рис. 10. Сравнение результатов расчетов треугольного крыла методом дискретных вихрей (4 вихря по хорде, 15 вихрей по полуразмаху крыла) с экспериментом Бертло (G.E. Bartlett) и Видаля (R.J. Vidal): зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки (а); поляра, где полагается, что все сопротивление равняется индуктивному  $C_{xv}$  (б)

МДВ для тонкой несущей поверхности в полной трехмерной нестационарной постановке, позволяющей учитывать, в том числе и, отклонение механизации крыла, описан в монографии С.М. Белоцерковского и М.И. Ништа [26]. Поскольку в такой задаче появляется масштаб времени  $t$ , то можно учитывать и вращение крыла вокруг осей  $x, y, z$  на углы  $\varphi, \theta, \psi$ .

Исходные уравнения косых П-образных и замкнутых вихрей с произвольным количеством угловых точек приведены в приложении «Справочник дискретных вихрей» к более поздней монографии



С.М. Белоцерковского и др. [27]. Там же даны полные системы уравнений для всех актуальных задач МДВ в нелинейной и нестационарной постановке, а также наиболее полная библиография.

Как показано в работе [28], вследствие экспоненциального нарастания скорости при приближении к оси вихря системы уравнений МДВ для нестационарного случая имеют сильные особенности, связанные со сближением свободных вихрей в процессе расчета. Способы преодоления этих вычислительных трудностей, устойчивость и сходимость МДВ исследованы в работах [17, 29].

МДВ отлично отработан методически и хорошо теоретически обоснован для задач, в которых известно, с каких кромок сходит вихревая пелена, а также в тех случаях, когда отрыв с кромок является полностью развитым. Даже при совсем небольшом количестве вихревых панелей на крыле течение моделируется с достаточной точностью. В большинстве случаев бывает достаточно 2–4 вихрей по хорде профиля и 15–20 по полуразмаху крыла [30], что просто несоизмеримо с числом разностных ячеек в CFD-методах. На рис. 10 показаны результаты расчета методом дискретных вихрей треугольного крыла в сравнении с данными эксперимента [31]. Видно, что в случае острых передних кромок, когда имеет место полностью развитый отрыв потока с них, совпадение результатов очень хорошее.

Для тупых передних кромок отличие существенное, так как степень реализации вихревой составляющей подъемной силы уменьшается, зато сильнее проявляется подсосывающая сила, что снижает индуктивное сопротивление (рис. 11). Эти вопросы подробнее рассмотрены ниже в разделе, посвященном отрыву потока на передней кромке.

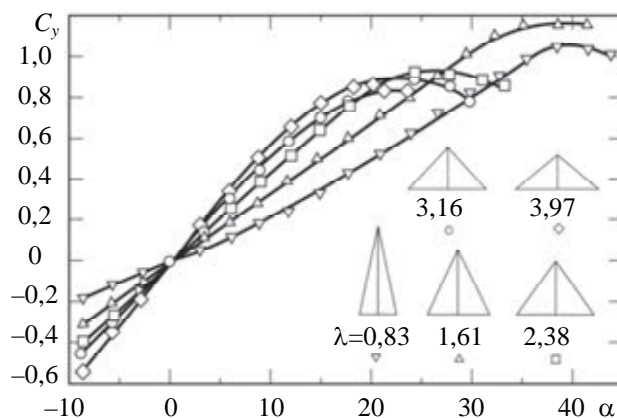


Рис. 11. Экспериментальные данные [32, 33] Шлихтинга (Schlichting) и Тракенброта (Truckenbrodt) по зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки в градусах для крыла с скругленной кромкой.  $Re=7 \times 10^5$ . Радиус скругления передней кромки  $r = 0,12b$

#### Применение теоремы обратимости для исследования эффективности деформации срединной поверхности и отклонения механизации крыла

В современной авиации активно применяются крылья с деформированной срединной поверхностью, гибкие аэроупругие крылья, крылья с адаптивной механизацией, у которых носки и закрылки отклоняются не только на взлете и посадке, но и на всем протяжении полета в зависимости от режима. В процессе создания Ту-144 и сверхзвуковых самолетов второго поколения (Ту-244 и Ту-444) изучалась возможность оснащения крыла отклоняемым в полете носком. Результаты превзошли все ожидания. Аэродинамическое качество увеличилось на 2 единицы как на дозвуковых, так и на сверхзвуковых скоростях.

Исследования законов деформации срединной линии и ее влияния на обтекание крыла представляют для CFD исключительно трудоемкую задачу, поскольку для каждого нового закона деформации срединной линии или каждого нового угла отклонения механизации крыла каждый раз нужно строить новую модель расчетной области и генерировать новую сетку. В интегрированной среде современных CFD-пакетов, например, Ansys Workbench, в ряде случаев удается построить итерационную процедуру для решения сопряженных задач аэроупругости. При этом последовательно рассчитывается напряженно-деформированное состояние крыла, а сетка перестраивается автоматически. Затем выполняется аэродинамический расчет и расчет нагрузок на крыло. Механизацию же крыла приходится исследовать почти всегда вручную. К счастью, в пределах линейной теории существует удобный инструмент, позволяющий на несколько порядков сократить трудозатраты исследователя.

Речь идет о теореме обратимости [34], которая устанавливает связь аэродинамических коэффициентов крыла в основном (прямом) потоке и обратном ему. Под обратным понимается поток, в котором вектор скорости противоположен исходному. Теорема обратимости доказана для всех практически важных случаев, включая движение вблизи экрана, кольцевого крыла и полиплана, гармонических колебаний крыла и т.п. В работе С.М. Белоцерковского [35] приведено доказательство теоремы и подробно изложена методика ее применения для исследования деформированного состояния крыла и эффективности

его механизации. Кроме того, даны исходные уравнения МДВ и обширный фактический материал с результатами расчетов прямоугольных, стреловидных и треугольных крыльев и зависимостей их основных аэродинамических коэффициентов от удлинения крыла, угла стреловидности по передней кромке и числа Маха. Несмотря на то, что монография вышла более 50 лет назад, она может служить хорошим справочником.

Рассмотрим кратко аппарат теоремы обратимости. Обозначим символом «+» параметры прямого потока, а «-» – параметры обратного потока. Тогда для соответствующих потенциалов возмущений  $\Phi$  можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial z^2} &= 0, \\ (1-M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $M_\infty$  – число Маха невозмущенного течения. Из (5) и уравнения Бернулли следуют соотношения для возмущенных давлений  $p'$  на верхней поверхности крыла:

$$p'_+ = \rho_\infty u_0 \frac{\partial \Phi_+}{\partial x}, \quad p'_- = \rho_\infty u_0 \frac{\partial \Phi_-}{\partial x}.$$

Теорема обратимости устанавливает интегральную связь между возмущенными давлениями на верхней и нижней поверхности крыла или, что то же самое, между их разностью и скосами потока в прямом и обратном потоке:

$$\iint_S \Delta p_+ u_{y-} dS = \iint_S \Delta p_- u_{y-} dS. \tag{6}$$

Важным следствием (6) является то, что при вращательном движении крыла все его производные в прямом и обратном потоке оказываются связанными:

$$c_{y+}^\alpha = c_{y-}^\alpha, \quad m_{x+}^{\omega_x} = m_{x-}^{\omega_x}, \quad m_{z+}^{\omega_z} = m_{z-}^{\omega_z}, \quad m_{z+}^\alpha = c_{y-}^{\omega_z}, \quad m_{z-}^\alpha = c_{y+}^{\omega_z}. \tag{7}$$

В уравнении (7) верхний индекс означает частную производную по соответствующему параметру,  $m$  – момент относительно соответствующей оси, обозначенной нижним индексом ( $x, y, z$ ),  $\omega$  – угловая скорость вращения.

Часто нет необходимости вычислять детальное распределение давления по крылу, а достаточно знать суммарный эффект от отклонения механизации или деформации крыла. Пусть крыло описывается локальными координатами  $\eta = \Delta f(\xi, \zeta)$ , где  $\eta = y/b$ ,  $\xi = x/b$ ,  $\zeta = z/b$ ,  $\Delta$  – малый параметр, который задает деформацию крыла или отклонение его механизации. Тогда в точке с координатами  $\xi_0, \zeta_0$  с учетом малости производных по  $\xi$  кривизну крыла можно описать следующим образом:

$$\cos(\mathbf{n}, x) = -\Delta \frac{\partial f}{\partial \xi_0}, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = 1, \quad \cos(\mathbf{n}, z) = -\Delta \frac{\partial f}{\partial \zeta_0}. \tag{8}$$

Производная по  $\zeta$  в (8), вообще говоря, необязательно должна быть малой, т.е. все последующие выводы справедливы и для крыльев с винглетами, крестообразных и кольцевых крыльев. Для зависимости аэродинамических коэффициентов от параметра деформации  $\Delta$  можно записать

$$\begin{aligned} c_y &= c_y^\alpha \alpha + c_y^{\omega_z} \omega_z + c_y^\Delta \Delta, \quad m_x = m_x^{\omega_x} \omega_x + m_x^\Delta \Delta, \\ m_z &= m_z^\alpha \alpha + m_z^{\omega_z} \omega_z + m_z^\Delta \Delta. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда из теоремы обратимости (6) и следствий (7) из нее следует, что при любом законе деформации крыла или отклонении органов управления суммарные аэродинамические характеристики деформированного крыла (9) определяются простым интегрированием, если известны нагрузки на исходном жестком крыле в обратном потоке:

$$\begin{aligned} c_{y+}^\Delta &= \frac{1}{S} \iint_S \left( \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)_- \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_0} \right)_+ dS, \quad m_{x+}^\Delta = \frac{1}{S} \iint_S \left( \frac{\partial p}{\partial \omega_x} \right)_- \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_0} \right)_+ dS, \\ m_{z+}^\Delta &= \frac{1}{S} \iint_S \left( \frac{\partial p}{\partial \omega_z} \right)_- \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_0} \right)_+ dS. \end{aligned} \tag{10}$$

Интегрирование ведется только по тем областям, где имеет место деформация, например, по отклоненным закрылкам. В любом случае в (10) форма поверхности основного крыла  $f(\xi, \zeta)$  и частные производные по  $\xi$  считаются известными. Чтобы вычислить интегралы в (10), необходимо знать распределение по обратному плоскому крылу частных производных от давления, которые через интенсивность присоединенного вихревого слоя выражаются так:

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 2\gamma_z^\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial \omega_x} = 2\gamma_z^{\omega_x}, \quad \frac{\partial p}{\partial \omega_z} = 2\gamma_z^{\omega_z}. \tag{11}$$

В уравнениях (11) верхний индекс, как и раньше, означает частную производную по соответствующему параметру. Если на жестком крыле в обратном потоке циркуляции присоединенных вихрей вычислены, то в произвольной точке такого крыла интенсивность присоединенного вихревого слоя и, соответственно, производные в правых частях уравнения (11) в каждом сечении крыла  $z_k = \text{const}$  с хордой  $b_k$  и координатой передней кромки  $x_*$  могут быть вычислены аппроксимацией кубическими многочленами:

$$\gamma_z^\alpha = \sum_{r=1}^3 \frac{a_r (1-t)^r}{\sqrt{t}}, \quad t = \frac{x_* - x}{b_k}. \quad (12)$$

Коэффициенты  $a_r$  в (12) находятся из решения системы трех линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} a_1 + \frac{16}{15} a_2 + \frac{32}{35} a_3 &= \frac{1}{N} \frac{1}{2b_k} \sum_{m=1}^n \frac{\partial \Gamma_m}{\partial \alpha}, \\ \frac{4}{15} a_1 + \frac{16}{105} a_2 + \frac{32}{315} a_3 &= \frac{1}{N} \frac{1}{2b_k} \sum_{m=1}^n \frac{\partial \Gamma_m}{\partial \alpha} t_m, \quad t_m = \frac{m-3/4}{n}, \\ \frac{4}{15} a_1 + \frac{16}{315} a_2 + \frac{32}{1115} a_3 &= \frac{1}{N} \frac{1}{2b_k} \sum_{m=1}^n \frac{\partial \Gamma_m}{\partial \alpha} t_m^2. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнениях (13)  $N$  – число вихрей по размаху крыла,  $n$  – число вихрей по хорде в  $k$ -ом сечении крыла. Для других производных  $\partial \gamma_z / \partial \omega_z$  и  $\partial \gamma_z / \partial \omega_x$ , в системе уравнений (13) нужно заменить в правой части производные  $\partial \Gamma / \partial \alpha$  на  $\partial \Gamma / \partial \omega_z$  и  $\partial \Gamma / \partial \omega_x$  соответственно.

Общий алгоритм оптимизации – следующий. Сначала для заданных режимов полета (крейсерский режим, маневр, набор высоты и т.п.) выполняется расчет плоского крыла в прямом и обратном потоке. Затем задаются семейства деформаций (в частном случае – законов отклонения механизации) крыла, и ищется оптимальная деформация. Как будет показано ниже, одной из самых актуальных является задача отыскания оптимального угла отклонения носка профиля.

#### О влиянии профилирования передней кромки и толщины профиля на величину вихревой подъемной силы и подсосывающей силы

МДВ позволяет рассчитать потенциальное безотрывное обтекание несущей поверхности или отрывное обтекание в случае, когда заданы поверхности отрыва. На рис. 12 показан расчет тонкого крыла малого удлинения с острыми передними кромками, с которых сходят мощные вихри. Видно, что в вихрях скорость потока почти в два раза выше, чем в среднем над крылом. В вихрях создается сильное разрежение. Подъемная сила, создаваемая такими вихрями, может быть сопоставима по величине с подъемной силой, создаваемой потенциальным течением. Для полной реализации вихревой составляющей подъемной силы, как известно, передние кромки должны быть острыми, а угол стреловидности крыла – большим. С другой стороны, обтекание тупой скругленной передней кромки вызывает образование подсосывающей аэродинамической силы, направленной вперед–вверх. Таким образом, возникает вопрос – в каких случаях кромку делать острой, а в каких тупой.

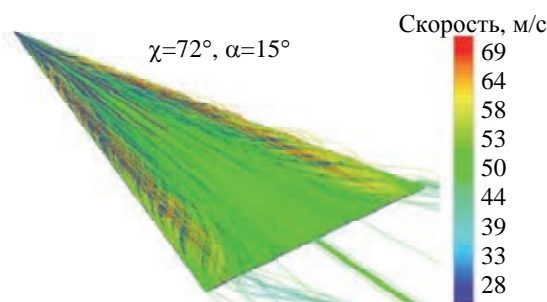


Рис. 12. Полностью развитые вихри на острых передних кромках.  $u_\infty = 50$  м/с

На рис. 13 показаны расчеты крыльев в двух постановках задачи: с отрывом от передней кромки (сплошная линия) и без отрыва (пунктирная линия). В расчетах крыло полагалось бесконечно тонким. Приведено сравнение с экспериментальными данными.

На рис. 13, а, рассмотрены результаты для прямоугольного толстого крыла малого удлинения. Эксперименты показывают, что экспериментальная полярная для крыла с тупой кромкой соответствует случаю полностью потенциального обтекания тонкой пластины. Заостренная кромка приводит к ликвидации подсосывающей силы, и экспериментальные данные соответствуют результатам расчета тонкой пластины с отрывом потока от передней кромки. Таким образом, можно сделать вывод, что толщина крыла не влияет существенно на результаты расчета МДВ, а форма кромки влияет, и весьма существенно.

На рис. 13, б, приведены результаты для стреловидного крыла малого удлинения с различной толщиной профиля, тупой и острой кромкой. Для крыла с острой кромкой результаты расчета с полностью

развитым отрывом с передней кромки совпадают с данными эксперимента. Более тонкое крыло с тупой кромкой имеет большую подъемную силу и меньшее индуктивное сопротивление за счет более полной реализации подсосывающей силы. При малых углах атаки результаты расчета такого крыла по потенциальной модели без отрыва потока хорошо совпадают с данными эксперимента. При увеличении угла атаки на поверхности крыла начинается срыв потока, что приводит к расхождению экспериментальных данных и результатов расчета по потенциальной модели. Как видно из результатов, представленных на рис. 13, б, определяющей является форма передней кромки крыла, а не толщина профиля. Это позволяет использовать для расчетов МДВ тонкие несущие поверхности, что серьезно упрощает постановку задачи расчета. Однако для получения корректных результатов необходимо учитывать форму передней кромки крыла.

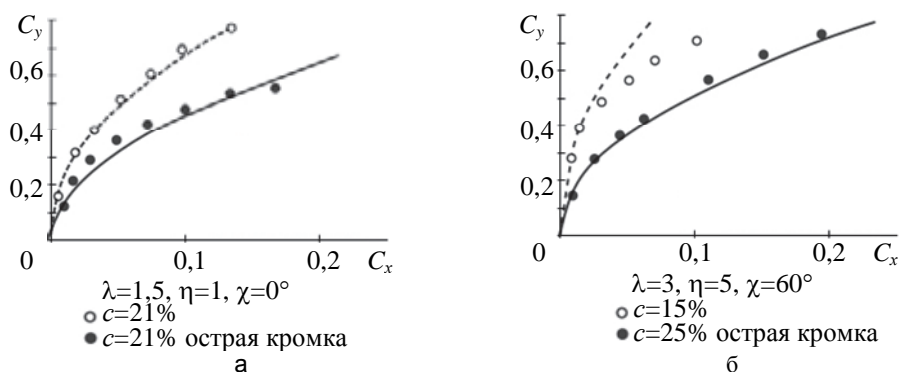


Рис. 13. Сравнение результатов расчетов плоских крыльев методом дискретных вихрей при полностью развитом отрыве с передних кромок (—) и отсутствии отрыва (- - -) с результатами эксперимента [36]: сравнение толстых прямых крыльев с острой и тупой кромкой (а); сравнение треугольных крыльев с тупой кромкой различного радиуса закругления (б)

На рис. 14 показаны результаты расчета тонких крыльев с передними кромками, имеющими малый радиус кривизны, в сравнении с экспериментом. Видно (рис. 14, а), что крыло умеренного удлинения и с умеренной стреловидностью имеет более высокое значение подъемной силы и меньшее индуктивное сопротивление, чем крыло малого удлинения с большим углом стреловидности (рис. 14, б). При этом в первом случае данные экспериментов хорошо совпадают с результатами расчетов по модели с отрывом потока, а во втором случае – с результатами расчетов по потенциальной модели, хотя отрыв потока с передней кромки имеет место в обоих случаях. Это говорит о подобии вихревой и подсосывающей силы.

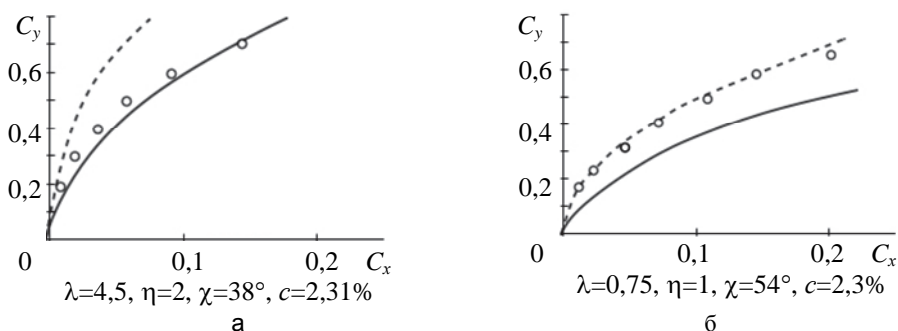


Рис. 14. Сравнение результатов расчетов методом дискретных вихрей подъемной силы тонкого крыла умеренного (а) и малого (б) удлинения при полностью развитом отрыве с передних кромок (—) и при отсутствии отрыва (- - -) с результатами экспериментов (o)

В части II настоящего цикла статей [1] подробно обсуждалась модель Полхамуса (Polhamus) обтекания крыла малого удлинения, основанная на аналогии вихревой и подсосывающей силы. При отрывном обтекании крыла малого удлинения на поверхности крыла в районе передней кромки образуется отрывной пузырь, который ограничен линиями отрыва с передней кромки и последующего присоединения линий тока к поверхности крыла (см. рис. 15 и 16 в Части II публикации [1] и результаты расчета на рис. 12 данной статьи). Внешнее потенциальное течение обтекает вихревой пузырь, как толстую скругленную переднюю кромку. В результате получается эффект, аналогичный возникновению подсосывающей силы, но имеющий вихревую природу. Для расчета крыльев малого удлинения хорошо подтверждается экспериментально формула Полхамуса [37]:

$$C_y = K_p \sin \alpha \cos^2 \alpha + K_\gamma \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad C_x = C_{xf} + K_p \sin^2 \alpha \cos \alpha + K_\gamma \sin^3 \alpha, \quad (14)$$

$$K_p = C_{yp}^\alpha = 2\pi \tan(90 - \chi),$$

где  $K_p$  – коэффициент, равный производной от  $C_y$  по  $\alpha$  в потенциальном потоке;  $K_\gamma$  – коэффициент вихревой подъемной силы. Результаты их расчетов для треугольных крыльев произвольной формы в плане приведены на рис. 17 в Части II публикации [1].

Формула (14) учитывает, что углы атаки  $\alpha$  необязательно должны быть малыми. Для малых углов атаки при разложении (14) в ряд по  $\alpha$  до третьего порядка малости получим

$$\frac{C_y}{K_p} = \alpha + \frac{K_\gamma}{K_p} \alpha^2 - \frac{7}{6} \alpha^3. \tag{15}$$

Если в (15)  $10\alpha < K_p/K_\gamma$ , т.е. вклад вихревой подъемной силы намного меньше потенциальной, то зависимость можно считать линейной,  $C_y = K_p \alpha$ , т.е. работает линейная теория. Если  $K_p/K_\gamma < 10$ , то зависимость (15) полностью нелинейна. Для треугольного крыла с прямой задней кромкой ( $a=0$  на рис. 17, а, в [1]) можно считать, что  $K_\gamma \approx \pi$  (см. рис. 17, в, в [1]). Тогда в рамках модели Полхамуса имеет место приближенная формула:

$$\frac{K_\gamma}{K_p} = \frac{\pi}{C_{yp}^\alpha} \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{2}{\lambda} \operatorname{tg} \alpha. \tag{16}$$

Таким образом, в уравнении (14) можно положить

$$K_\gamma = 2K_p \operatorname{tg} \alpha / \lambda. \tag{17}$$

Модель Полхамуса справедлива для тех случаев, когда «взрыв» вихрей происходит за задней кромкой, т.е. она не может предсказывать максимальное значение вихревой составляющей подъемной силы. Формула (17) показывает, что доля вихревой составляющей подъемной силы с увеличением угла атаки  $\alpha$  увеличивается. На рис. 15 приведено сравнение результатов расчетов по потенциальной модели (сплошные линии), по формулам (14), (16) и МДВ по модели с полностью развитым отрывом с передней кромки (штрих-пунктирная линия) с результатами экспериментов для острой и тупой передней кромки.

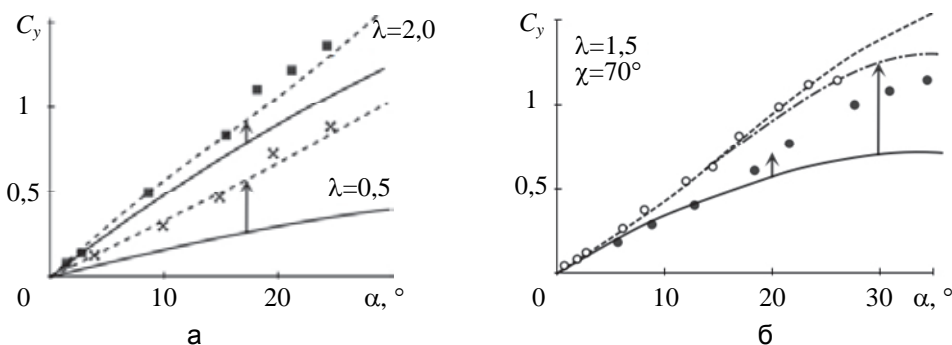


Рис. 15. Сравнение результатов расчета треугольного крыла методом дискретных вихрей в рамках потенциальной модели без отрыва потока с передней кромки (—), по формулам (14), (16) (- - -) с учетом вихревой составляющей подъемной силы, методом дискретных вихрей при отрыве потока с передней кромки (— · —) в сравнении с экспериментальными данными для острой кромки (а) Полхамуса (Polhamus) [38] – ■, × и данными ЦАГИ (Центральный аэрогидродинамический институт им. Жуковского), для острой и тупой кромки (б): ○ – острая передняя кромка, ● – тупая передняя кромка [39]. Стрелками показано увеличение подъемной силы за счет вихревой составляющей

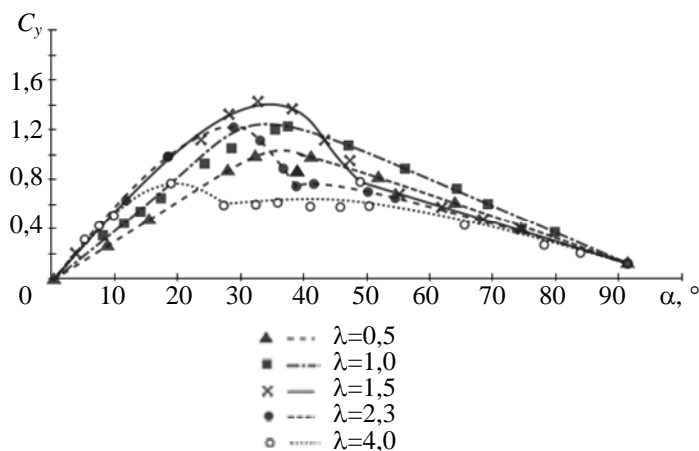


Рис. 16. Сравнение результатов расчетов методом дискретных вихрей тонкого крыла с острыми передними кромками в сравнении с экспериментами ЦАГИ [39].  $Re=10^6$



Таким образом, для треугольных крыльев малого и умеренного удлинения с острыми передними кромками модель Полхамуса и формулы (14)–(16) можно использовать в достаточно широком диапазоне углов атаки (до 20–25°) до тех пор, пока точка «взрыва» вихря располагается за задней кромкой (явление взрыва вихря рассмотрено ниже). В этом диапазоне нет необходимости выполнять численные расчеты.

На рис. 16 приведено сравнение результатов расчетов МДВ треугольных крыльев с острыми кромками с результатами экспериментов в аэродинамической трубе. Видно, что зависимости  $C_y(\alpha)$  имеют до трех характерных участков: участок роста ( $\partial C_y/\partial \alpha > 0$ ), когда действуют формулы (14), (16), участок, когда точка «взрыва» вихря расположена над крылом ( $\partial C_y/\partial \alpha < 0$ ), и участок, когда точка «взрыва» вихря достигает передней кромки и имеет место срыв потока с передней кромки с неупорядочным, хаотическим вихревым движением (участок кривой правее точки излома).

При умеренном удлинении крыла на восходящем участке  $C_y$  больше, чем у крыла с малым удлинением, но  $C_{y\max}$  наступает раньше. У крыльев с малым удлинением  $C_y$  нарастает с увеличением угла атаки медленнее, но сама ветвь длиннее. Имеет место оптимальное значение удлинения  $\lambda=1-2$  и угла стреловидности  $\chi=65-75^\circ$ , при которых достигается абсолютный максимум  $C_{y\max}=1,3-1,4$ .

### Влияние скругления передней кромки и числа Рейнольдса на подсосывающую силу

Во второй части настоящего цикла статей [1] подробно рассказано о механизмах возникновения так называемой подсосывающей силы. Эта сила уменьшает индуктивное сопротивление. Степень ее реализации принято обозначать [1, 39] безразмерным коэффициентом  $S$  (suck) или, реже  $K_q$ .  $S$  зависит от характера обтекания передней кромки крыла, формы крыла в плане, деформации срединной поверхности крыла.

Поскольку подсосывающая сила является важным фактором улучшения летных данных самолета, ей были посвящены обширные экспериментальные исследования. В ЦАГИ [39] изучались вопросы корректного перенесения результатов продувок аэродинамических моделей на натурные условия, поскольку в условиях реального полета число Рейнольдса  $Re$  имеет порядок  $10^7-10^8$  (см. рис. 7 в Части I публикации [1]), при испытаниях в аэродинамических трубах реализуются более низкие значения числа  $Re$  – порядка  $10^3-10^4$ . В ходе исследований изучалась зависимость  $S$  от числа  $Re$ , вычисленного по радиусу  $r_\perp$  скругления носика профиля, взятого перпендикулярно передней кромке,

$$Re_c = r_\perp u \cos \chi / \nu, \tag{18}$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость газа, т.е. с уменьшением радиуса носика профиля число Рейнольдса уменьшается. Аналогичные исследования в середине 60-х годов XX века проводил Хендерсон [40], на работы которого ссылаются многие более поздние статьи.

Обширные исследования влияния формы передней кромки были проведены в США в 90-е годы XX века в связи с отработкой аэродинамики гиперзвуковых и воздушно-космических многоразовых ЛА. Как известно, из-за требований теплозащиты передние кромки крыла многоразовых кораблей приходится выполнять тупыми. Среди всех работ стоит выделить два отчета NASA [41, 42], в которых приведены наиболее полные сведения по крыльям малого удлинения и влиянию формы кромки на индуктивное сопротивление и подъемную силу.

На рис. 17 представлены результаты Хендерсона, демонстрирующие, что затупление передней кромки увеличивает степень реализации подсосывающей силы и аэродинамическое качество крыла, причем это преимущество увеличивается с ростом числа  $Re$ . На рис. 18 приведены результаты расчетов треугольного крыла с разными радиусами кривизны передней кромки [40].

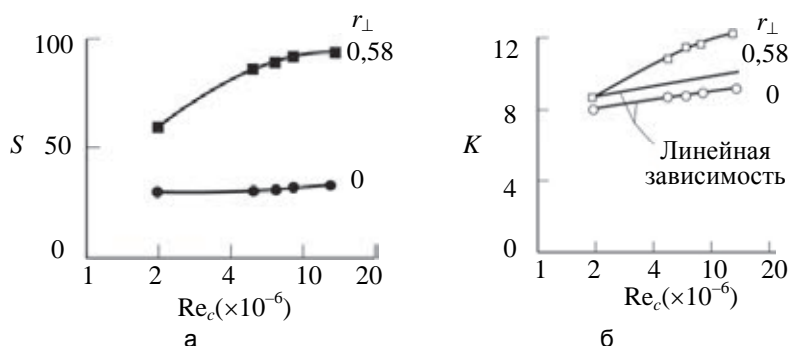


Рис. 17. Зависимость степени реализации подсосывающей силы  $S$  (а) и аэродинамического качества крыла  $K$  (б) от числа Рейнольдса  $Re_c$ , вычисленного по радиусу носика профиля  $r_\perp$  по формуле (18), и от радиуса носика профиля  $r_\perp$ . Удлинение крыла  $\lambda=2$ , угол стреловидности передней кромки  $\chi=67^\circ$ , радиус  $r_\perp$  дан в долях % от хорды профиля  $b$ . Число Маха  $M<0,3$

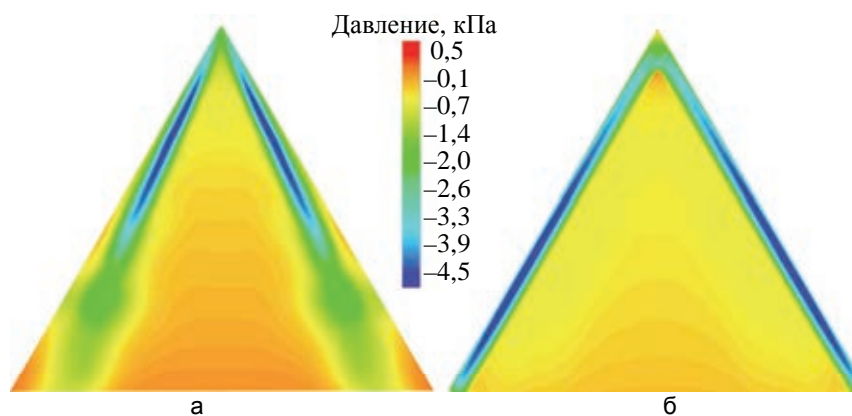


Рис. 18. Сравнение результатов расчета плоского тонкого треугольного крыла с углом стреловидности передней кромки  $60^\circ$  и радиусом присоединенного к передней кромке цилиндра  $r_{\perp}=10$  мм (а) и 50 мм (б), размах крыла 1 м, при угле атаки  $15^\circ$ . Идеальный газ.  $u_{\infty}=50$  м/с

Видно, что при радиусе 50 мм, когда обтекание передней кромки еще является полностью безотрывным (рис. 19), на поверхности цилиндра имеется область сильного разрежения вдоль всей передней кромки. Равнодействующая этой силы направлена вперед–вверх. Механизм ее возникновения – следующий. Поскольку в данном случае точка торможения расположена ниже носика профиля, то поток, обтекающая цилиндрическую кромку, сильно разгоняется. При меньшем радиусе поток отрывается с поверхности цилиндра, при этом образуется слабый вихрь, который разрушается над крылом (рис. 20). Вопросы разрушения вихря обсуждаются ниже.

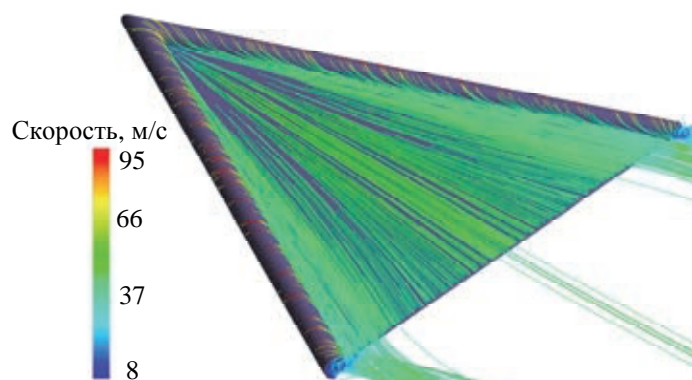


Рис. 19. Безотрывное обтекание крыла с диаметром присоединенного к передней кромке цилиндра  $r_{\perp} = 50$  мм, углом стреловидности передней кромки  $\chi=60^\circ$ , размах крыла  $l=1$  м, угол атаки  $\alpha=15^\circ$ . Идеальный газ.  $u_{\infty}=50$  м/с

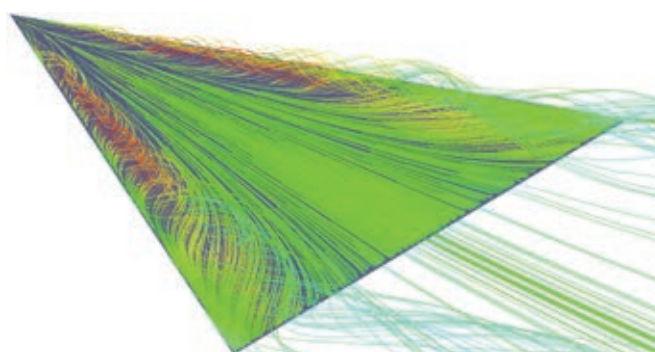


Рис. 20. Обтекание крыла с присоединенным к передней кромке цилиндром  $r_{\perp} = 10$  мм, углом стреловидности передней кромки  $\chi=60^\circ$ , размах крыла  $l=1$  м, угол атаки  $\alpha=15^\circ$ .  $u_{\infty}=50$  м/с

Если профиль изогнут таким образом, что точка торможения находится в носике профиля (при заданном угле атаки), то в этом случае скругленная передняя кромка подсосывающей силы не создает. Можно отогнуть переднюю кромку так, что появится аэродинамическая сила, направленная вперед (рис. 21, а). Влияет на  $S$  и коническая крутка крыла (рис. 21, б). Это объясняется тем, что у крыла с

большим углом стреловидности по передней кромке поперечное распределение давления по крылу таково, что  $C_y(z)$  увеличивается к концевым сечениям крыла, и профиль нужно разворачивать на меньший  $\alpha$ .

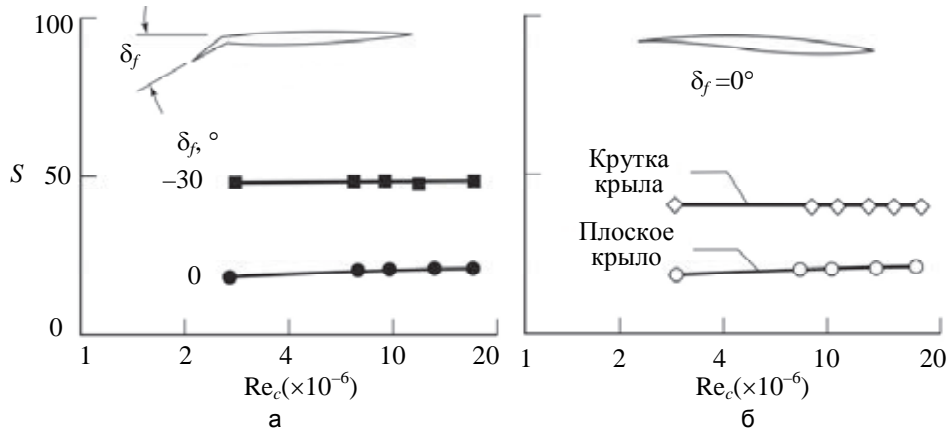


Рис. 21. Экспериментальные исследования [40] влияния отклонения носка крыла  $\delta_f$  (а) и геометрической крутки крыла (б) на степень реализации подсосывающей силы  $S$ . Угол стреловидности  $\chi=74^\circ$ ,  $\lambda=2,5$

Применяя коническую крутку крыла, а также отклонение носка у крыльев с тонким профилем, можно значительно увеличить аэродинамическое качество как на дозвуковых, так и на сверхзвуковых скоростях. На рис. 22 приведено сравнение аэродинамического качества моделей Ту-144 и сверхзвукового самолета второго поколения (СПС-2). Видно, что СПС-2 имеет вполне приемлемые характеристики при  $M=0,8-0,9$ , достаточные для экономичного преодоления разгонного участка, когда полет выполняется над районом, где переход на сверхзвуковые скорости запрещен. Понятно, что угол отклонения носка крыла  $\delta_f$  требует выполнения оптимизации по скорости полета и углу атаки.

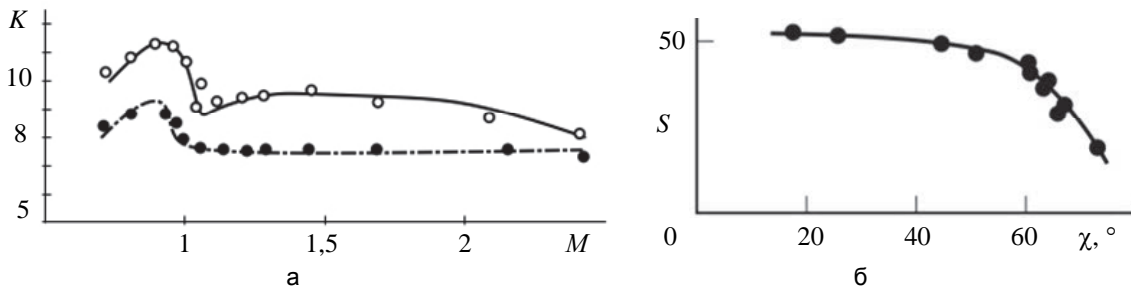


Рис. 22. Влияние отклонения носка крыла и геометрической крутки крыла на аэродинамическое качество сверхзвуковых самолетов (а) и угла стреловидности острой передней кромки крыла  $\chi$  на степень реализации подсосывающей силы  $S$  (б).  
 —  $\circ$  — СПС-2, — — —  $\bullet$  — Ту-144, данные ЦАГИ [39] (а),  
 $\bullet$  — данные Хендерсона [40], — — — данные ЦАГИ [39] (б)

При уменьшении  $r_\perp S$  не падает до нуля, т.е. даже тонкое крыло с острой кромкой создает некоторую подсосывающую силу, которая уменьшается с увеличением угла стреловидности (рис. 22, б). Напомним физический смысл этого явления. В [1] было показано, что у крыла малого удлинения с острой кромкой к передней кромке присоединен дискретный вихрь, который моделирует скачок давления  $\Delta p$  между верхней и нижней поверхностью крыла на передней кромке. Именно этот вихрь создает аэродинамическую силу, направленную вперед, вдоль хорды крыла. Когда мы моделируем крыло, как в работах С.М. Белоцерковского, совокупностью косых П-образных вихрей, где корневой вихрь ориентирован по передней кромке крыла, то при отрыве потока от передней кромки дискретный вихрь считается уже свободным. Таким образом, модель С.М. Белоцерковского позволяет моделировать два крайних случая, когда отрыв потока имеет место, а подсосывающая сила отсутствует, а также когда отрыва нет, а присоединенный к кромке дискретный вихрь создает подсосывающую силу.

В работе Н.Ф. Воробьева [43] для моделирования течения в окрестности острой передней кромки используется более аккуратная модель с Г-образным вихрем. Показано [1], что при возникновении отрыва на кромке происходит ветвление  $i$ -ой вихревой нити с интенсивностью  $\Gamma_i$ , перпендикулярной потоку, на присоединенный к кромке дискретный вихрь с интенсивностью  $\Gamma_{ci}$  и на свободный дискретный вихрь вихревой пелены  $\Gamma_{ni}$ , нормальной кромке крыла. Интенсивности этих вихрей связаны между собой и зависят от угла стреловидности крыла [43]. Тогда степень реализации подсосывающей силы и вихревой силы связаны соотношениями

$$K_v=1-\sin(90-\chi), S = \sin(90-\chi). \tag{19}$$

Соотношения (19) объясняют столь сложный характер зависимости силы сопротивления и подъемной силы крыльев малого удлинения с острыми кромками от  $\alpha$  и  $\chi$ .

### Разрушение вихрей

Модель Полхамуса позволяет рассчитывать крылья малого удлинения с острыми кромками при условии, что разрушение вихрей происходит за задней кромкой крыла, а не над ним. С помощью стандартного МДВ можно с успехом рассчитывать неустойчивость вихревой пелены, но их диссипацию и разрушение рассчитать в рамках модели идеального газа априори невозможно. Для этого необходимы методы, учитывающие как перенос вихрей, так и их диффузию. Возникает вопрос – влияет ли диффузия вихрей на их разрушение?

Рассмотрим процессы, которые происходят при «взрыве» вихря. На рис. 23 приведены результаты расчета обтекания треугольного крыла с острыми кромками в условиях, когда разрушение вихря происходит над поверхностью крыла. Место «взрыва» вихря хорошо заметно на поле давления по внезапно расширяющимся зеленым полосам низкого давления. Пропадают пики разрежения, заметные по темносиним полосам на поверхности крыла. Поперечные размеры вихрей резко увеличиваются, а скорость внутри них падает (рис. 24).

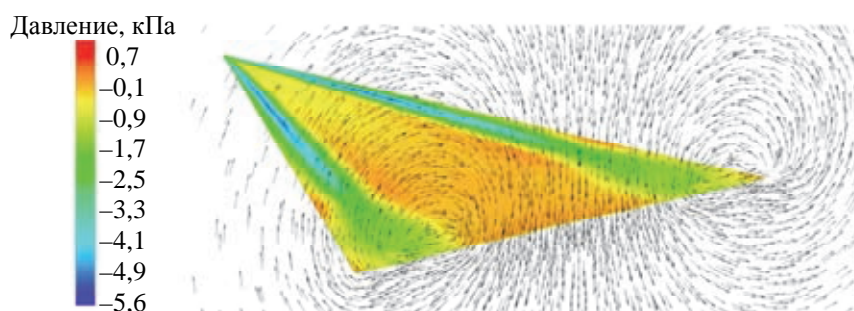


Рис. 23. Результаты расчета треугольного тонкого крыла с острой передней кромкой, с углом стреловидности передней кромки  $60^\circ$ , угол стреловидности  $15^\circ$ .  $u_\infty=50$  м/с

Рассмотрим механизм, приводящий к разрушению вихрей. Схема вихревого течения была приведена на рис. 15, б, к Части II публикации [1]. Поток, отрываясь от передней кромки, затем присоединяется повторно к поверхности крыла. При этом происходит вторичный отрыв потока и образование вторичного вихря, хорошо заметного в сечениях вихревого течения на фрагментах рис. 24, а, б. Ядра вихрей заметны по ярко-красным областям с высокими скоростями.

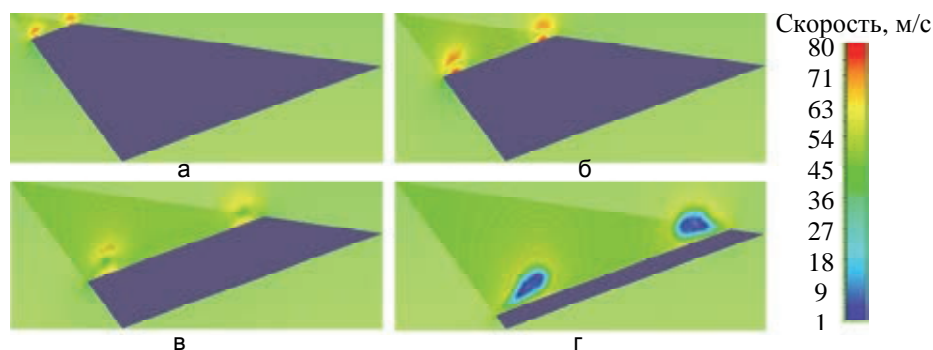


Рис. 24. Стадии «взрыва» вихрей на треугольном крыле с острой кромкой, угол атаки  $15^\circ$ , угол стреловидности по передней кромке  $60^\circ$ .  $u_\infty=50$  м/с: а–г – поперечные сечения вихря в разных плоскостях

Ниже по течению происходит объединение двух вихрей в вихревой ансамбль (рис. 24, в), что приводит к образованию между вихрями области с большим противодавлением и более низкой, чем в ядрах вихрей, скоростью (зеленые области на рис. 24, в). Вихревой ансамбль становится неустойчивым, скорость резко падает, и происходит распад крупных вихрей на множество мелких, которые визуальнo воспринимаются как «взрыв» вихря с переходом от упорядоченного движения к диффузному.

На рис. 25 все сечения вихрей приведены вместе. В последнем сечении, ближайшем к задней кромке, хорошо видно, насколько резко увеличиваются габариты вихревой системы и как сильно уменьшается скорость. В результате разрежение на поверхности крыла уменьшается, подъемная сила также уменьшается. Обратите внимание, что полученная в расчетах в рамках модели идеального газа (рис. 18, 19, 24, 25) картина течения полностью соответствует схемам в экспериментах [38–40].

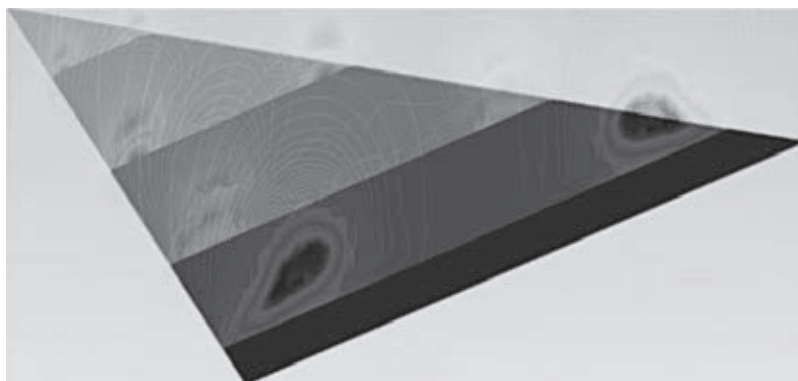


Рис. 25. «Взрыв» вихрей на треугольном крыле с острой кромкой, угол атаки  $15^\circ$ , угол стреловидности по передней кромке  $60^\circ$ .  $u_\infty=50$  м/с

Общепринятым считается, что у вихря имеется вязкое ядро, которое вращается как твердое тело, а вне этого ядра поток остается потенциальным. Такая модель вихря получила название «вихрь Рэнкина» (рис. 26). Можно было бы высказать предположение, что разрушение вихря происходит из-за диссипации вязкого ядра и слияния нескольких ядер в одно с распадом на более мелкие вихри, как это предполагалось в монографии [44]. Однако многочисленные и весьма тонкие эксперименты позволили однозначно установить, что положение точки «взрыва» вихря не зависит от числа  $Re$ , а определяется целиком интенсивностью вихря и продольным градиентом давления [45, 46]. Такие же результаты получены авторами при расчетах МДВ, CFD-методом в рамках модели идеального газа, а также LES-методом. Чем менее интенсивен вихрь и чем больше градиент увеличения давления по хорде крыла, тем раньше разрушается вихрь. Соответственно, увеличение угла атаки и уменьшение угла стреловидности крыла приводят к более раннему появлению точки разрушения вихря над крылом (рис. 27). Как показали исследования ЦАГИ [39], между углом стреловидности и углом атаки, при которых вихрь выходит на заднюю кромку, существует простая линейная зависимость (рис. 27, а).

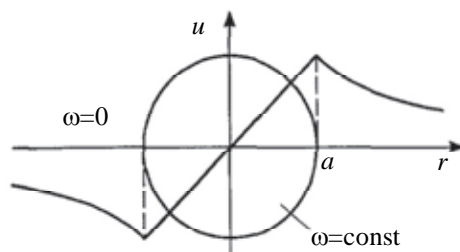


Рис. 26. Вихрь Рэнкина с ядром радиуса  $a$ , вращающимся с угловой скоростью  $\omega$  как твердое тело. Внутри ядра скорость  $u$  увеличивается от центра к границе ядра линейно, а затем спадает экспоненциально

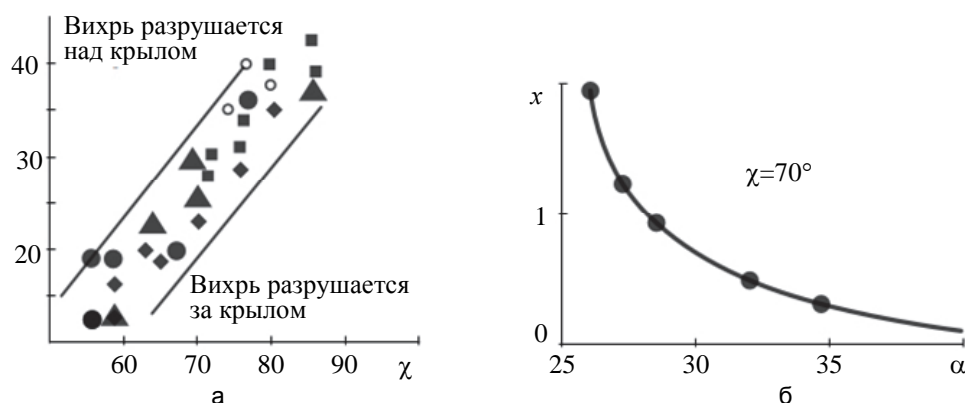


Рис. 27. Экспериментальные данные по зависимости координат точки «взрыва» вихрей: связь угла атаки и угла стреловидности крыла, при которых точка «взрыва» вихрей выходит на заднюю кромку (а); перемещение точки «взрыва» вихря от задней кромки ( $x=1$ ) к передней ( $x=0$ ) при увеличении угла атаки [39] (б), символы – экспериментальные точки, линии – аппроксимация

М.А. Головкин [28] в ЦАГИ также проводил детальные исследования треугольных крыльев с визуализацией вихрей (рис. 28). Наблюдения показали, что «взрыв» вихря иногда имеет пузырьковую при-



роду (рис. 28, а), а иногда спиральную. В некоторых случаях они наблюдались одновременно (рис. 28, б). Сравнение численных данных авторов статьи с ранними исследованиями ЦАГИ (рис. 27, б) и результатами других авторов (рис. 28, в) подтвердило характер зависимости координаты точки «взрыва» вихря от угла атаки.

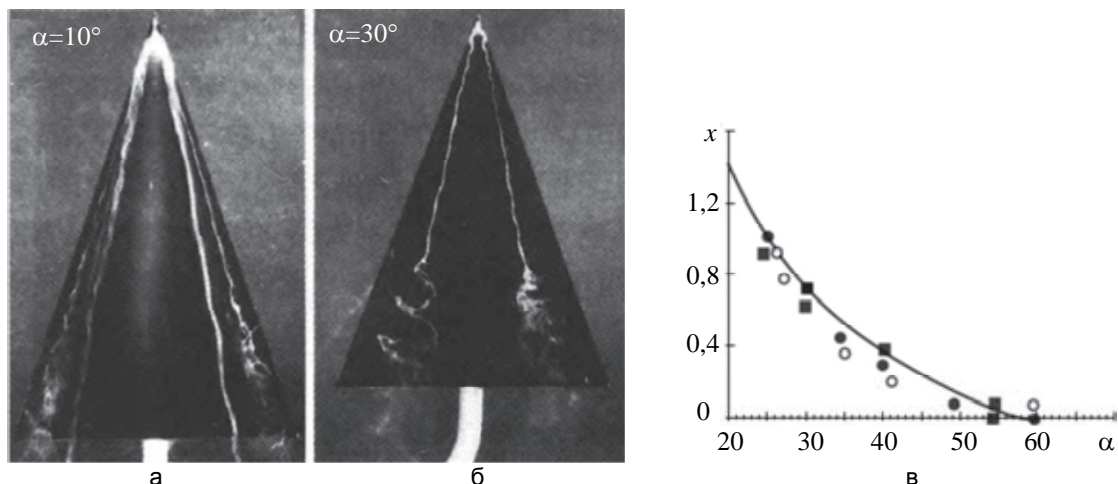


Рис. 28. Разрушение вихрей на треугольном крыле по пузырьковому механизму (а), одновременное разрушение по спиральному (слева) и пузырьковому (справа) механизмам (б), зависимость координат точек «взрыва» вихря от угла атаки на треугольном крыле с углом стреловидности по передней кромке  $\alpha$  (в): ■, ● – данные [28], ○ – данные [47].  $Re=0,85-4,25 \times 10^4$

Исследования механизма разрушения вихрей [48] показали, что всегда сначала возникает вихревой пузырь, внутри которого образуется спиралевидный жгут, который начинается развиваться и приводит к спиралевидной стадии разрушения. На рис. 18, а, и рис. 23 хорошо видно, что моделирование в рамках модели идеального газа позволяет воспроизвести этот эффект.

#### Расчет на нештатных режимах полета

Штатными режимами считаются безотрывное обтекание крыла с тупой передней кромкой и отрывное течение с отрывом от передней острой кромки. На нештатных режимах отрыв может происходить с верхней поверхности крыла. При этом вихревая пелена должна начинаться с этой линии отрыва. Если положение линии отрыва известно, то МДВ может быть с успехом применен. Если же нет, то необходимо выполнить анализ на предмет условий для отрыва пограничного слоя. Это невозможно сделать с помощью известных моделей турбулентности: необходимо либо выполнить полный расчет ламинарного течения и найти точку отрыва, либо рассчитать пограничный слой. Эти вопросы выходят за рамки темы настоящей статьи. Можно рекомендовать монографию [30], в которой описан общий подход по комбинированию методов расчета пограничного слоя с МДВ, а также 1-й том монографии Чжена [49], в котором подробно описаны критерии отрыва пограничного слоя и методы его расчета разной степени сложности.

#### Заключение

Изложенные в работе методы расчета крыльев, основанные на решении сингулярных уравнений, являются простыми и эффективными. На этапе выбора аэродинамической схемы и ее оптимизации толстое крыло малого удлинения может быть с успехом заменено бесконечно тонкой поверхностью, форму и радиус скругления передней кромки которой можно изучать отдельно. Деформация крыла, отклонение механизации крыла могут быть учтены при помощи теоремы обратимости и не требуют выполнения отдельных расчетов. Для расчета крыльев малого удлинения с острой кромкой с успехом можно использовать модель Полхамуса (уравнения (14)–(17)) до тех пор, пока точка взрыва вихря располагается за задней кромкой. В этом случае нет необходимости выполнять численный расчет. Разрушение вихря представляет собой сложное явление. Однако для координаты точки разрушения существуют надежные экспериментальные данные (рис. 27, 28), а само разрушение успешно рассчитывается в рамках модели идеального газа. Кроме того, расчеты и эксперименты демонстрируют, что координаты точки взрыва вихря практически не зависят от числа Рейнольдса.

Важным фактором является подсосывающая сила. Необходимо учитывать, что эта сила присутствует даже в случае острой передней кромки у крыла малого удлинения. При этом вихревая составляющая подъемной силы и подсосывающая сила зависят от угла стреловидности по передней кромке (см. формулу (19)). Стреловидные крылья с умеренным углом стреловидности должны иметь тщательно спроекти-

рованную тупую переднюю кромку. Передние наплывы крыла и крылья малого удлинения с большим углом стреловидности должны иметь острые передние кромки. Аэродинамическое качество и величина подсосывающей силы существенно зависят от числа Рейнольдса, что нужно учитывать при переносе данных с аэродинамических моделей на натурные условия.

Исследование поведения крыла на нештатных режимах со срывом потока с верхней поверхности требуют либо полного расчета в рамках ламинарной вязкой модели среды, либо определения линии отрыва в рамках модели пограничного слоя. Существуют известные простые методы, позволяющие сравнительно надежно определять точку отрыва на верхней поверхности крыла, после чего для анализа можно использовать методику, приведенную в настоящей статье.

Крылья малого удлинения, особенно в случае использования высоконесущих профилей или энергетических методов создания подъемной силы, требуют особого внимания к задаче их продольной балансировки. Данный вопрос выходит за рамки предмета настоящей статьи и будет освещен авторами в дальнейшем.

## Литература

## References

1. Булат П.В., Минин О.П. О современном подходе к проектированию беспилотных летательных аппаратов самолетного типа с коротким взлетом и посадкой // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 6. С. 961–996. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-961-996
2. Prandtl L. Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium // *Luftfahrtforschung*. 1936. V. 13. P. 313.
3. AeroNet. Распределенные системы беспилотных летательных аппаратов. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://nti.one/markets/aeronet>, свободный. Яз. рус. (Дата обращения 16.06.2017).
4. Национальная технологическая инициатива [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://nti.one/nti/>, свободный. Яз. рус. (Дата обращения 16.06.2017).
5. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
6. Isaev S.A., Baranov P.A., Kudryavtsev N.A., Lisenko D.A., Usachov A.E. Complex analysis of turbulence models, algorithms, and grid structures at the computation of recirculating flow in a cavity by means of VP2/3 and FLUENT packages. Part. 1. Scheme Factors Influence // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2005. P. 549–569.
7. Baranov P.A., Guvernyuk S.V., Isaev S.A., Soudakov A.G., Usachov A.E. Simulation of periodical structures in the airfoil wake. *TsAGI Science Journal*, 2014, vol. 45, pp. 273–292.
8. Isaev S.A., Baranov P.A., Zhukova Yu.V., Usachov A.E., Kharchenko V.B. Correction of the shear-stress-transfer model with account of the curvature of streamlines in calculating separated flows of an incompressible viscous fluid // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2014. V. 87. N 4. P. 1002–1015. doi: 10.1007/s10891-014-1098-x
9. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model / In: *Turbulence, Heat and Mass Transfer*. 4<sup>th</sup> ed. / Eds. K. Hajalic, Y. Nogano, M. Tummers. Antalya, Begell House, 2003. P. 73–86.
10. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. V. 21. N 3. P. 252–263. doi: 10.1016/S0142-727X(00)00007-2
11. Кюхеман Д. Аэродинамическое проектирование самолетов. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1983, 656 с.
12. Flax A.H., Lawrence H.R. The aerodynamics of low-aspect-ratio wings and wing-body combinations // *Proc. 3<sup>rd</sup> Anglo-American Aeron. Conf.*, 1951. V. 363.
13. Katz J., Plotkin A. *Low Speed Aerodynamics*. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge University Press, 2001, 613 p.
14. Belotserkovskii S.M. Ring-shaped vortex with unsteady movement. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1955, vol. 19, no. 2. (in Russian)
15. Golovkin M.A. Method for solving the problem of separated flow of an arbitrarily moving three-dimensional body by ideal incompressible fluid. *TsAGI Science Journal*, 1977, vol. 8, no. 2, pp. 1–15. (in Russian)
16. Lifanov I.K. *Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment (In Mathematical Physics*,

16. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: Янус, 1995. 520 с.
17. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
18. Воробьев Н.В., Шишкина Г.И. К вопросу о выборе дискретной вихревой схемы крыла / В кн: Задачи обтекания тел пространственной конфигурации. Новосибирск: ИТПМ, 1978.
19. Margason R.J., Kjelgaard S.O., Sellers W.L., Morris C.E.K., Walkey K.B., Shields E.W. Subsonic panel methods - a comparison of several production codes // Proc. AIAA 23<sup>rd</sup> Aerospace Sciences Meeting. Reno, USA, 1985.
20. Abbott I.H., von Doenhoff A.E. *Theory of Wing Sections*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1949.
21. Bangasser C.T. An Investigation of Ground Effect on Airfoils Using a Panel Method. Masters Thesis. University of Tennessee, 1993.
22. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976.
23. Drela M. *Flight Vehicle Aerodynamics*. Cambridge: MIT Press, 2014. 279 p.
24. Falkner V.M. The solution of lifting-plane problems by vortex-lattice theory // *ARC Report and Memoranda*, 1953. N 2591.
25. Головкин М.А. Метод расчета обтекания тел произвольным (вихревым нестационарным) потоком идеальной несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 6. С. 10–15.
26. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
27. Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. Нелинейная теория крыла и её приложения. Алматы: Галым, 1977. 448 с.
28. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. Вопросы вихревой гидромеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 264 с.
29. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988. 232 с.
30. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
31. Bartlett G.E., Vidal R.J. Experimental investigations of influence of edge shape on the aerodynamic characteristics of low aspect ratio wings at low speeds // *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1955. V. 22. N 8. P. 517–533. doi: 10.2514/8.3391
32. Schlichting H., Truckenbrodt E. *Aerodynamik des Flugzeuges*. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
33. Sivells J.C. Experimental and calculated characteristics of three wings of NACA 64-210 and 65-210 airfoil sections with and without washout // *NASA Technical Note 1422*, 1947.
34. Flax A.H. Reverse flow and variational theorems for lifting-surface in nonstationary compressible flow // *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1953. V. 20. N 2. P. 120–126. doi: 10.2514/8.2553
35. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 244 с.
36. Hansen M. *Messungen an Krietrflugelchen*. Luftfahrtforschung, 1939.
37. Polhamus E.C. Application of the leading-edge-suction analogy of vortex lift to the drag due to lift of sharp-edge delta wings // *NASA Technical Note D-4739 (N68-21990)*, 1968.
38. Polhamus E.C. A concept of the vortex lift of sharp-edge delta wings based on a leading-edge-suction analogy // *NASA Technical Note D-3767 (N67-13171)*, 1966.
39. Бюшгенс Г.С. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. М.: Физматлит, 1998. 793 с.
40. Henderson W.P. Studies of various factors affecting drag due to lift at subsonic speeds // *NASA Technical Note D-3584*.
41. Chu J., Luckring J.M. Experimental surface pressure data obtained on A65° delta wing across Reynolds number and Mach *Aerodynamics, Theory of Elasticity and Diffraction of Waves*. Moscow, Yanus Publ., 1995, 520 p. (in Russian)
17. Belotserkovskii S.M., Lifanov I.K. *Numerical Methods in Singular Integral Equations and their Application to Aerodynamics, Theory of Elasticity, Electrodynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1985, 256 p. (in Russian)
18. Vorob'ev N.V., Shishkina G.I. On the question of a discrete vortex scheme of the wing. In *Problems of Spatial Configuration Bodies Flow*. Novosibirsk, ITPM Publ., 1978. (in Russian)
19. Margason R.J., Kjelgaard S.O., Sellers W.L., Morris C.E.K., Walkey K.B., Shields E.W. Subsonic panel methods - a comparison of several production codes. *Proc. AIAA 23<sup>rd</sup> Aerospace Sciences Meeting*. Reno, USA, 1985.
20. Abbott I.H., von Doenhoff A.E. *Theory of Wing Sections*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1949.
21. Bangasser C.T. *An Investigation of Ground Effect on Airfoils Using a Panel Method*. Masters Thesis. University of Tennessee, 1993.
22. Abramovich G.N. *Applied Gas Dynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1976. (in Russian)
23. Drela M. *Flight Vehicle Aerodynamics*. Cambridge, MIT Press, 2014, 279 p.
24. Falkner V.M. The solution of lifting-plane problems by vortex-lattice theory. *ARC Report and Memoranda*, 1953, no. 2591.
25. Golovkin M.A. Method for calculating the flow around an object by an arbitrary (vortex nonstationary) flow of an ideal incompressible fluid. *TsAGI Science Journal*, 1986, vol. 17, no. 6, pp. 10–15. (in Russian)
26. Belotserkovskii S.N., Nisht M.I. *Continuous and Non-Continuous Flow of Thin Wings by an Ideal Liquid*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p. (in Russian)
27. Aubakirov T.O., Belotserkovskii S.M., Zhelannikov A.I., Nisht M.I. *Nonlinear Wing Theory and Its Applications*. Almaty, Galym Publ., 1977, 448 p. (in Russian)
28. Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. *Vortex Fluid Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 264 p. (in Russian)
29. Belotserkovskii S.M., Kotovskii V.N., Nisht M.I., Fedorov R.M. *Mathematical Modeling of Plane-Parallel Separated Flow around Bodies*. Moscow, Nauka Publ., 1988, 232 p. (in Russian)
30. Belotserkovskii S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G. *Wing in a Nonstationary Gas Flow*. Moscow, Nauka Publ., 1971, 768 p. (in Russian)
31. Bartlett G.E., Vidal R.J. Experimental investigations of influence of edge shape on the aerodynamic characteristics of low aspect ratio wings at low speeds. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1955, vol. 22, no. 8, pp. 517–533. doi: 10.2514/8.3391
32. Schlichting H., Truckenbrodt E. *Aerodynamik des Flugzeuges*. Berlin, Springer-Verlag, 1969.
33. Sivells J.C. Experimental and calculated characteristics of three wings of NACA 64-210 and 65-210 airfoil sections with and without washout. *NASA Technical Note 1422*, 1947.
34. Flax A.H. Reverse flow and variational theorems for lifting-surface in nonstationary compressible flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1953, vol. 20, no. 2, pp. 120–126. doi: 10.2514/8.2553
35. Belotserkovskii S.M. *Thin Supporting Surface in Subsonic Gas Flow*. Moscow, Nauka Publ., 1965, 244 p. (in Russian)
36. Hansen M. *Messungen an Krietrflugelchen*. Luftfahrtforschung, 1939.
37. Polhamus E.C. Application of the leading-edge-suction analogy of vortex lift to the drag due to lift of sharp-edge delta wings. *NASA Technical Note D-4739 (N68-21990)*, 1968.
38. Polhamus E.C. A concept for the vortex lift of sharp-edge delta wings based on a leading edge suction analogy. *NASA Technical Note D-3767 (N67-13171)*, 1966.
39. Byushgens G.S. *Aerodynamics, Stability and Controllability of Supersonic Aircraft*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1998, 793 p. (in Russian)
40. Henderson W.P. Studies of various factors affecting drag due to lift at subsonic speed. *NASA Technical Note X, ND-3584*, 1966.
41. Chu J., Luckring J.M. Experimental surface pressure data obtained on A65° delta wing across Reynolds number and Mach

- obtained on A65 $\delta$  wing across Reynolds number and Mach number ranges // *NASA Technical Memorandum 4645*, 1996, V. 3, 63 p.
42. Saltzman E.J., Wang K.C., Iliff K.W. Aerodynamic assessment of flight- determined subsonic lift and drag characteristics of seven lifting-body and wing-body reentry vehicle configurations // *NASA/TP-2002-209032*, 2002.
  43. Воробьев Н.Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. Новосибирск: Наука, 1985. 239 с.
  44. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физматлит, 1995. 368 с.
  45. Clapworthy G.J., Mangler K.W. The behavior of a conical vortex sheet on a slender wing near the leading edge // *ARC-RM-3790*, 1977.
  46. Erickson G.E. Water tunnel flow visualization insight into complex three dimensional flow fields // *Journal of Aircraft*, 1980, V. 17, N 9, P. 656–662. doi: 10.2514/3.57952
  47. Жук А.Н., Курьянов А.И., Столяров Г.И. Гистерезис нормальной силы крыла сложной формы в плане при неустановившемся движении // *Ученые записки ЦАГИ*, 1981, Т. 12, № 5, С. 113–118.
  48. Эгон К. Многоликие вихри [Электронный ресурс]. Наука из первых рук. 2006. Т. 12, № 6. Режим доступа: <https://scfh.ru/papers/mnogolikie-vikhri/>, свободный. Яз. рус. (Дата обращения 16.12.2017).
  49. Чжен П. Отрывные течения. Т. 1. М.: Мир, 1972. 300 с.
  - number ranges. *NASA Technical Memorandum 4645*, 1996, vol. 3, 63 p.
  42. Saltzman E.J., Wang K.C., Iliff K.W. Aerodynamic assessment of flight- determined subsonic lift and drag characteristics of seven lifting-body and wing-body reentry vehicle configurations. *NASA/TP-2002-209032*, 2002.
  43. Vorob'ev N.F. *Aerodynamics of Load-Bearing Surfaces in a Steady Flow*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1985, 239 p. (in Russian)
  44. Belotserkovskii S.N., Ginevskii A.S. *Simulation of Turbulent Jets and Traces based on Discrete Vortices Method*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1995, 368 p.
  45. Clapworthy G.J., Mangler K.W. The behavior of a conical vortex sheet on a slender wing near the leading edge. *ARC-RM-3790*, 1977.
  46. Erickson G.E. Water tunnel flow visualization insight into complex three dimensional flow fields. *Journal of Aircraft*, 1980, vol. 17, no. 9, pp. 656–662. doi: 10.2514/3.57952
  47. Zhuk A.N., Kur'yanov A.I., Stolyarov G.I. Hysteresis of the normal force of a complex shape wing in the plan with unsteady motion. *TsAGI Science Journal*, 1981, vol. 12, no. 5, pp. 113–118. (in Russian)
  48. Egon K. Many-faced Vortexes. *Nauka iz Pervykh Ruk*, 2006, vol. 12, no. 6. Available at: <https://scfh.ru/papers/mnogolikie-vikhri/> (accessed 16.12.2017).
  49. Chang P.K. *Separation of Flow*. Pergamon Press, 1970, vol. 1.

### Авторы

**Булат Павел Викторович** – доктор физико-математических наук, кандидат экономических наук, генеральный директор, ООО «Проблемная лаборатория «Турбомашин», Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация; заведующий научно-исследовательской лабораторией «Газотурбинных энергетических комплексов», Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация; заведующий международным научным подразделением «Лаборатория механики и энергетических систем», Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 55969578400, ORCID ID: 0000-0003-0099-9953, Pavelbulat@mail.ru

**Минин Олег Петрович** – директор дирекции программ, ПАО «Туполев», Москва, 105005, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0003-0135-7100, ole-m2@yandex.ru

### Authors

**Pavel V. Bulat** – D.Sc. in Physics and Mathematics, PhD in Economics, CEO, LLC "Problem Laboratory "Turbomachines", Saint Petersburg, 198035, Russian Federation; Head of Research Laboratory "Gas Turbine Energy Complexes", Baltic State Technical University "VOENMEH" n.a. D.F. Ustinov, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation; Head of International Research Unit "Laboratory of mechanics and energy systems", ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 55969578400, ORCID ID: 0000-0003-0099-9953, Pavelbulat@mail.ru

**Oleg P. Minin** – Head of Program Directorate, PSC "Tupolev", Moscow, 105005, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0003-0135-7100, ole-m2@yandex.ru