УДК 004.7

УСКОРЕННЫЕ АНАЛИТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИМИТАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

О.И. Кутузов[a], Т.М. Татарникова[b]

[a] Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация

[b] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 190000, Российская Федерация

Адрес для переписки: Tm-tatarn@yandex.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 12.03.18, принята к печати 15.04.18
doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-521-528
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Кутузов О.И., Татарникова Т.М. Ускоренные аналитико-статистические методы имитации технических систем с распределенной структурой // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 3. С. 521–528. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-521-528

Аннотация

Предмет исследования. Предложено комбинированное применение аналитико-статистических методов моделирования, позволяющее ускорить численный расчет и анализ характеристик сложных технических систем методом машинной имитации. Выполнена оценка эффективности совместного применения аналитико-статистических методов моделирования в сравнении с непосредственным моделированием по числу испытаний. **Используемые подходы.** Метод расслоенного моделирования позволяет понизить дисперсию оценки средней характеристики в сравнении с методом прямого моделирования. Метод равновзвешенного моделирования позволяет существенно сократить число испытаний без потери точности вычисления. Совместное применение аналитико-статистических методов обеспечивает ускорение анализа характеристик систем с распределенной структурой методом имитации. **Основные результаты.** Предложена интерпретация и развитие методов расслоения и равновзвешенного моделирования применительно к задачам системного проектирования. Приведен тестовый пример, демонстрирующий возможный выигрыш применения аналитико-статистических методов при моделировании маловероятных событий на примере расчета надежности системы. **Практическая значимость.** Совместное применение методов расслоения и равновзвешенного моделирования позволяет существенно ускорить алгоритмический анализ моделей стохастических систем методом имитации.

Ключевые слова
метод Монте-Карло, сходимость метода, аналитико-статистическое моделирование, число экспериментов, эффективность статистического эксперимента, ускорение статистического эксперимента, равновзвешенное моделирование, метод расслоенного моделирования

SHORTCUT ANALYTICAL-STATISTICAL MODELING METHODS FOR TECHNICAL SYSTEMS WITH DISTRIBUTED STRUCTURE

O.I. Kutuzov[a], T.M. Tatarnikova[b]

[a] Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", Saint Petersburg, 197376, Russian Federation
[b] Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, 190000, Russian Federation
Corresponding author: Tm-tatarn@yandex.ru

Article info
Received 12.03.18, accepted 15.04.18
doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-521-528
Article in Russian
For citation: Kutuzov O.I., Tatarnikova T.M. Shortcut analytical-statistical modeling methods for technical systems with distributed structure. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 3, pp. 521–528 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-521-528

Abstract

Subject of Research. The paper proposes a combined application of analytical-statistical modeling methods that makes it possible to accelerate the numerical calculation and analysis of the complex technical system characteristics by the method of machine simulation. The efficiency of joint application of analytical-statistical modeling methods was compared with direct modeling according to the number of tests. **Methods.** The layered modeling method gives the possibility to reduce the variance of the average characteristic estimation in comparison with the direct modeling method. The balanced modeling method enables a substantial reduction in the tests number without calculation accuracy loss. The joint application of analytical and statistical methods provides characteristics analysis acceleration for the systems with a distributed structure by simulation method. **Main Results.** Interpretation and development of the stratification methods and balanced modeling are proposed with reference to system design problems. A test example is given demonstrating a possible gain in the application of analytical-statistical methods for simulation of unlikely events on the example of system reliability calculation. **Practical Relevance.** Joint application of the stratification methods and balanced modeling makes it possible to accelerate the algorithmic analysis of stochastic system models by the imitation method.

Keywords
Monte Carlo method, method convergence, analytical statistical modeling, experiments number, statistical experiment efficiency, statistical experiment acceleration, balanced modeling, layered modeling method

Введение

Технология моделирования сложных технических систем с распределенной структурой опирается на имитационное машинное моделирование, в основе которого лежит метод статистических испытаний Монте-Карло [1, 2]. Известный недостаток этого универсального метода заключается в его медленной сходимости. Требуемое число экспериментов может быть столь велико, что ЭВМ не в состоянии их выполнить в приемлемые сроки [3, 4]. Этот недостаток метода Монте-Карло особенно проявляется при анализе сложных систем и оценивании редких событий [5–7]. Покажем, что это так.

Пусть случайные величины (СВ) ξ и ζ таковы, что $m=M\xi=M\zeta$, $D\xi\neq D\zeta$, и для оценивания m реализуется N независимых значений $\xi^1,\ldots,\xi^N$, по которым и вычисляется оценка в виде $\hat{m}=\sum_{i=1}^{N}\xi_i\Big/N$.

Поскольку СВ $\hat{m}$ имеет $M\hat{m}=m$ и $D\hat{m}=D\xi/N$, то с учетом центральной предельной теоремы теории вероятностей $\hat{m}$ распределена асимптотически нормально с параметрами m, $D\xi/N$. Отсюда вероятность того, что интервал $\hat{m}\pm\Delta$ накроет значение m, определяется выражением

$$p\left\{\left|\hat{m}-m\right|\leq\Delta\right\}=p\left\{\left|\frac{(\hat{m}-m)}{\sqrt{(D\xi/N)}}\right|\leq\frac{\Delta}{\sqrt{(D\xi/N)}}\right\}=\Phi\left(\frac{\Delta}{\sqrt{(D\xi/N)}}\right),$$

где $\Phi(x)=P\{z\leq x\}$, $Z\sim N(0,1)$ – стандартное распределение вероятностей.

Если заранее задаться требуемыми значениями доверительной вероятности $(1–\varepsilon)$ и отклонения Δ, где $(1–\varepsilon)=p\{\hat{m}+\Delta\geq m,\ \hat{m}-\Delta\leq m\}$ достаточно близко к единице, то получим уравнение

$$1-\varepsilon=\Phi\left(\frac{\Delta}{\sqrt{(D\xi/N)}}\right),$$

из которого находим число N реализаций СВ ξ:

$$N_\xi=D\xi\left(\frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\Delta}\right)^2, \tag{1}$$

где Φ^{-1} – обратная к Φ функция. Аналогичные рассуждения относительно СВ ζ дают N_ζ:

$$N_\zeta=D\zeta\left(\frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\Delta}\right)^2.$$

Следовательно, при одинаковых требованиях $(1–\varepsilon, \Delta)$ к точности оценивания показателя m

$$\frac{N_\xi}{N_\zeta}=\frac{D_\xi}{D_\zeta}.$$

С другой стороны, для инженерных задач естественны требования, ограничивающие относительную погрешность оценки того или иного показателя. Пусть к оценке $\hat{m}$ показателя $m=M\xi$ предъявляется требование

$$p\left\{\frac{\hat{m}-m}{m}\leq\sigma\right\}=\left\{\left|\hat{m}-m\right|\leq\sigma m\right\}=1-\varepsilon,$$

где σ, $\varepsilon>0$ – малые величины. Тогда, согласно (1),

$$N=\frac{D\xi}{(\sigma m)^2}\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2. \tag{2}$$

При оценивании, например, вероятности Q отказа системы путем прямого моделирования имеем $m=M\xi=Q$, $D\xi=Q(1-Q)$ и из (2)

$$N \cong \frac{1}{Q}\left(\frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sigma}\right)^2.$$

Значение $Q \to 0$, что исключает применение прямого статистического моделирования к анализу редких событий и обусловливает поиски специальных методов, ускоряющих моделирование. Ускорить моделирование – значит добиться большей точности при том же числе экспериментов или получить требуемую точность при меньшем числе экспериментов.

В настоящее время сложился ряд подходов, позволяющих ускорить статистическое моделирование, не снижая точности получаемых результатов. К ним относятся: регенеративный метод моделирования [8, 9]; методы понижения дисперсии [10, 11]; комбинированные и аналитико-статистические методы [12, 13]. Излагаемые ниже модели и алгоритмы имитационного моделирования построены с использованием методов понижения дисперсии. Среди наиболее применяемых на практике методов понижения дисперсии известны методы взвешенного моделирования, расслоенной выборки, их сочетания [14].

Метод взвешивания

Для изложения метода рассмотрим статистический эксперимент с одномерной входной СВ x (рис. 1).

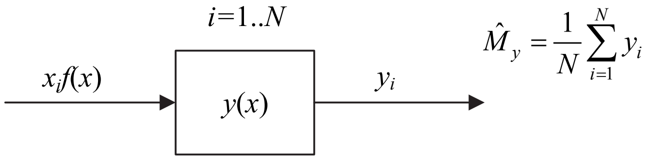

Рис. 1. Исходная схема эксперимента

Формально искомое $M(y)$ определяется выражением

$$M(y) = \int y(x) f(x)\,dx. \tag{3}$$

Метод взвешивания основан на аналитическом преобразовании выражения (3) и соответствующем изменении схемы эксперимента.

Разделим и умножим подынтегральное выражение в (3) на произвольную плотность распределения вероятностей $p(x)$, не равную нулю в пределах интегрирования. В результате мы увидим, что

$$M(y) = \int y(x)\frac{f(x)}{p(x)}p(x)\,dx = M\left[y(x)\frac{f(x)}{p(x)}\right] = M(y'), \tag{4}$$

где $y' = y(x)f(x)/p(x)$, а $x \sim p(x)$. Следовательно, вместо расчета оценки $\hat{M}_y$ можно выполнять расчет оценки $\hat{M}_{y'}$. Схема расчета $\hat{M}_{y'}$ представлена на рис. 2. Такой переход от исходной схемы рис. 1 к схеме рис. 2 называется методом взвешивания. Обе схемы эквивалентны с точки зрения математического ожидания выходной СВ, но различны с точки зрения ее дисперсии.

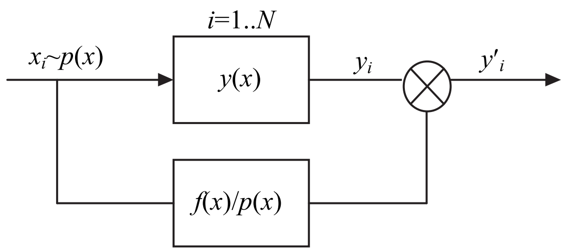

Рис. 2. Преобразованная схема

Описанный одномерный вариант метода легко распространяется и на случай многомерной СВ. Для этого достаточно в (4) вместо скаляра X записать $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$. Обобщение на случай дискретной СВ X осуществляется путем замены интеграла на сумму, а плотностей – на вероятности.

Искусство применения метода взвешивания сводится к подбору такой функции p, чтобы $D(y') << D(y)$. Тогда получится $N' << N$. Можно, например, подбирать p так, чтобы СВ $y' = yf/p$ была по возможности ближе к константе, хотя бы в каком-нибудь интуитивном смысле, так как при $y' = \text{const}$ должно быть $D(y') = 0$.

Основное достоинство метода взвешивания – в простоте преобразования схемы эксперимента. Программа вычисления функции $y(x)$, т.е. модель исследуемой системы, не меняется. Добавляется только расчет множителя f/p (веса), да генератор входной СВ с распределением f заменяется на генератор с распределением p.

Метод расслоения

Другим, более распространенным, методом ускоренного моделирования является метод расслоенной (стратифицированной) выборки (рис. 3).

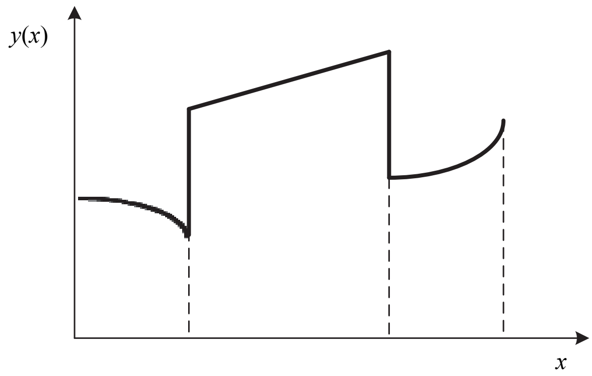

Рис. 3. Кусочно-непрерывная функция $y(x)$ случайного аргумента x

Видно, что область значений случайного аргумента x может быть разбита на участки так, что изменение функции в пределах отдельного участка значительно меньше, чем в пределах всей области. В таком случае целесообразно сначала усреднить функцию на каждом участке отдельно, а затем из частных средних получить общее среднее с учетом вероятностей участков. Предполагается, что вероятности слоев $p_r,\ r=\overline{1,R}$ легко вычисляются через заданное распределение $p(x)$:

$$p_r = p\{x \in B_r\} = \int_{B_r} p(x)\,dx,\ r=\overline{1,R}, \tag{5}$$

где $B_r,\ r=\overline{1,R}$ – подмножества множества $\{x\}$ значений аргумента x, называемые слоями (стратами).

Искомый результат Q находится по формуле полной вероятности через условные математические ожидания:

$$Q=\sum_{r=1}^{R} Q_r = \sum_{r=1}^{R} p_r \int_{B_r} y(x)\frac{p(x)}{p_r}dx,\ r=\overline{1,R}.$$

Эксперименты проводятся, как в обычной схеме при прямом моделировании, но по слоям. Для каждого слоя вычисляются оценки условных математических ожиданий (частные оценки).

$$\hat{Q}_r = \frac{1}{N_r}\sum_{i=1}^{N_r} y(x_i),\ x_i \sim \begin{cases} \dfrac{p(x)}{p_r}, x \in B_r \\ 0, \quad x \notin B_r \end{cases},$$

где N_r – количество опытов в r-м слое.

В итоге вычисляется искомая оценка $\hat{Q}=\sum_{r=1}^{R} p_r \hat{Q}$.

Для контроля за точностью эксперимента можно в каждом слое вычислять условную дисперсию выходной СВ,

$$\hat{D}_r = \frac{1}{N_r}\sum_{j=1}^{N_r} y_j^2 - \left(\hat{Q}_r\right)^2,\ x \in B_r\ , \tag{6}$$

и дисперсию внутрислойной оценки

$$\hat{D}\left(\hat{Q}_r\right)=\frac{\hat{D}_r}{N_r}.$$

Дисперсия итоговой оценки может быть вычислена по формуле

$$\hat{D}\left(\hat{Q}\right)=\sum_{r=1}^{R} p_r^2 \hat{D}\left(\hat{Q}_r\right).$$

Если нужно знать ошибку итоговой оценки в форме коэффициента вариации, то она вычисляется как обычно:

$$v'^2 = \frac{\hat{D}\left(\hat{Q}\right)}{\hat{Q}^2}.$$

Теоретически показано [10]: чтобы оценка $\hat{Q}$ имела меньшую дисперсию, чем обычная оценка (без расслоения), достаточно, чтобы объем выборки распределялся по слоям пропорционально их вероятностям и чтобы условные средние по слоям не были одинаковы. При разбиении по слоям следует стремиться к тому, чтобы средние по слоям как можно больше отличались друг от друга.

Общее число опытов N по слоям, $N=N_1+\ldots+N_R$, можно распределять рационально в соответствии с формулой

$$N_r = p_r N\ ,\ \overline{1,R} \qquad (7)$$

или оптимально – по формуле

$$N_r = \frac{\sigma_r p_r}{\sum_r \sigma_r p_r} N, \qquad (8)$$

где $\sigma = \sqrt{D_r}$ – условное среднеквадратическое отклонение СВ y в слое B_r.

Обычно σ_r априорно неизвестны, и их заменяют на оценки:

$$\hat{\sigma}_r = \sqrt{\hat{D}_r},\ r = \overline{1,R},$$

где $\hat{D}_r$ находят по (6) путем выполнения пробного прогона программы с не очень большими значениями N_r.

При использовании распределения опытов (8) ошибка v' расслоенного эксперимента будет минимальной для данного значения N. Распределение (7) приводит к худшей (во всяком случае, не лучшей) точности, чем (8). Тем не менее, распределение экспериментов (8) используется чаще, так как оно проще и все же гарантирует (при любом расслоении эксперимента), что ошибка получится меньше (в крайнем случае, не больше), чем в исходной схеме [10].

Таким образом, рациональное, а тем более, и оптимальное распределения экспериментов гарантируют, что даже при самом неудачном расслоении мы не ухудшим точности расчетов.

Эффективность равновзвешенного расслоенного моделирования

Эффективность равновзвешенного моделирования оценим по соотношению числа испытаний, необходимых для получения оценки с одинаковой точностью как при равновзвешенном расслоенном моделировании, так и при прямом моделировании методом Монте-Карло.

В общем случае при прямом моделировании полное количество испытаний $N_н$, необходимых для получения оценки с заданной точностью, условно представим в виде двух подмножеств $N'_н$ и $N''_н$ таких, что

$$N_н = N'_н + N''_н,$$

где $N'_н$ – число испытаний, реализации которых могут содержать положительный исход, т.е. в каждой из этих реализаций возникает состояние, для которого с вероятностью $0<p^+<1$ возможно значение $\xi = f\left(x_i\right) = 1,\ i \in N'_н$ (назовем такие реализации содержательными); $N''_н$ – число испытаний, реализации которых не могут содержать положительного исхода, т.е. в каждой из этих реализаций возникает состояние, для которого с вероятностью 1 значение $\xi = f\left(x_i\right) = 1,\ i \in N''_н$ (назовем такие реализации пустыми).

Тогда, чтобы при непосредственном моделировании получить $N'_н$ содержательных реализаций, необходимо провести в среднем $N_н = N'_н / p^+$ испытаний. При этом получаем оценку, точность которой характеризуется дисперсией $D\hat{\xi}$.

При совместном применении расслоения и равновзвешенного моделирования (РВМ) проводим только содержательные испытания, число которых пусть будет равно $N_{РВМ} = N'_н\left(1+\rho^2\right),$ и получаем оценку с дисперсией $D\hat{\zeta} = D\hat{\xi}$. Соответственно, соотношение числа испытаний при условии $D\hat{\zeta} = D\hat{\xi}$ равно

$$t = \frac{N_н}{N_{РВМ}} = \frac{1}{p^+\left(1+\rho^2\right)},$$

где ρ – коэффициент вариации множества вероятностей для единичных значений функции $y(x)$.

Таким образом, выигрыш в числе испытаний при переходе от непосредственного моделирования к совместному применению расслоения и равновзвешенного моделирования имеет место при условии, что $p^{+}\left(1+\rho^{2}\right)<1$.

Покажем, что применение расслоения уменьшает значение t.

Тестовый пример

Оценим этот возможный выигрыш при моделировании маловероятных событий на примере расчета надежности системы [15, 16], структурная схема которой изображена в виде случайного графа на рис. 4. Вершины (элементы системы) 1,...,15 имеются в графе с вероятностями $q_1,\dots,q_{15}$ соответственно, дуги абсолютно надежны. Система работоспособна, если из полюса Г есть пути во все полюса П1, П2, П3 (движение против ориентированных дуг запрещено). Требуется найти вероятность отказа системы при следующих вариантах:

I) $q_1=q_2=q_3=10^{-5}$,

II) $q_4=q_6=q_9=2\cdot 10^{-5}$,

III) $q_{10}=\ldots=q_{15}=5\cdot 10^{-5}$.

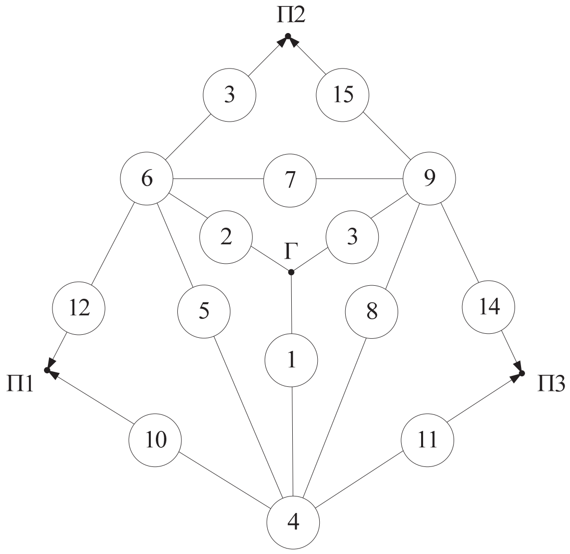

Рис. 4. Структурная схема рассматриваемой системы

Для вариантов I и II известны точные решения [17], которые приводятся в таблице, графа A. В [12] даны результаты расчетов, проведенных методом равновзвешенного моделирования без расслоения, содержащие значения оценок $\hat{Q}_\xi$ для $M\xi$ и $\hat{\vartheta}$ для коэффициентов вариации СВ $\hat{Q}_\xi$, (таблица, графа B). Видно, что при хорошей точности оценок $\hat{Q}_\xi$ в целом значение $\hat{\vartheta}$ при появлении некоторого разброса в исходных данных (вариант III) заметно возрастает.

Вариант исходных данных	A	B		C	
		N=1000		N=1020	
	$M\xi\cdot 10^8$	$\hat{Q}_\xi\cdot 10^8$	$\hat{\vartheta}$	$\hat{m}_0\cdot 10^8$	$\hat{\vartheta}$
I	12,00	12,40	0,086	11,82	0,069
II	0,120	0,127	0,085	0,1183	0,069
III	–	1,549	0,354	1,505	0,068

Таблица. Оценки вероятностей отказа системы, полученные аналитически, методом равновзвешенного моделирования и методом равновзвешенного моделирования с расслоением

Эта же задача решена методом равновзвешенного моделирования с расслоением. Система, изображенная на рис. 4, имеет связность γ=2. Анализ показывает, что при расслоенном моделировании для данных значений отказов элементов достаточно рассмотреть слои с кратностью отказов i при $2\le i\le 3$.

Разделение элементов системы на группы состояло в выделении для $i=2$ и $i=3$ одних и тех же $C(i)$=4 групп элементов с номерами 1,2,3; 4,6,9; 5,7,8 и 10,...,15 соответственно. При этом получены результаты, приведенные в таблице в графе C. Можно видеть, что для варианта III показатель $\hat{\vartheta}$ оказался примерно таким же, как и для первых двух вариантов.

Для рассматриваемого примера p^{+}=2,7·10^{-4} и ρ_{γ}^{2} =0,303. Согласно (5), выигрыш в числе испытаний при расслоении и равновзвешенном моделировании по сравнению с прямым моделированием по методу Монте-Карло составит t_1=2,84·10^{3} раз.

Заключение

При наличии в модели случайных факторов имитационные эксперименты выполняются с привлечением метода статистических испытаний Монте-Карло. Медленная сходимость метода Монте-Карло требует находить ускоренные методы имитации при анализе сложных систем и оценивании редких событий. При многократных повторах численного эксперимента с имитационной моделью существенная доля машинного времени тратится на формирование реализаций случайного вектора, задающего состояния элементов системы, компоненты которого характеризуются различными и подчас трудно реализуемыми на электронно-вычислительной машине законами распределения. Комбинированное применение расслоенной выборки с равновзвешенным моделированием позволяет ускорить численный расчет и анализ характеристик исследуемой системы методом машинной имитации.

Выполнена оценка эффективности совместного применения аналитико-статистических методов моделирования в сравнении с непосредственным моделированием по числу испытаний.

Приведенный тестовый пример показывает, насколько само по себе эффективно применение расслоения при моделировании редких событий, и демонстрирует, каким образом его применение упрощает процесс моделирования.

Литература

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. М.: Высшая школа, 2007. 343 с.
2. Кутузов О.И., Татарникова Т.М. Из практики применения метода Монте-Карло // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83. № 3. С. 65–70.
3. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 212 с.
4. Полляк Ю.Г., Филимонов В.А. Статистическое машинное моделирование средств связи. М.: Радио и связь, 1988. 176 с.
5. Кутузов О.И., Татарникова Т.М. Математические схемы и алгоритмы моделирования инфокоммуникационных систем. СПб.: СПбГУАП, 2013. 148 с.
6. Задорожный В.Н., Кутузов О.И. Проблемы и техника моделирования фрактальных очередей // Имитационное моделирование. Теория и практика: матер. конференции. Казань, 2013. С. 143–148.
7. Banks J., Carson J.S., Nelson B.L., Nicol D.M. Discrete-Event System Simulation. 5th ed. Prentice Hall, 2009. 638 p.
8. Крейн М., Лемуан О. Введение в регенеративный метод анализа моделей. М.: Наука, 1983. 104 с.
9. Bogatyrev V.A., Vinokurova M.S. Control and safety of operation of duplicated computer systems // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 700. P. 331–342. doi: 10.1007/978-3-319-66836-9_28
10. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. М.: Статистика, 1978. 221 с.
11. Колчин В.Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2004. 256 с.
12. Плакс Б.И. Расчет надежности систем со сложной структурой ускоренным методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 6. С. 158–162.
13. Пугачев В.Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. М.: Советское радио, 1973. 256 с.
14. Задорожный В.Н., Кутузов О.И. Методы моделирования очередей в условиях фрактального трафика в сетях с коммутацией пакетов. Омск: ОмГТУ, 2013. 104 с.
15. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984. 303 с.
16. Богатырев В.А., Паршутина С.А. Модели многопутевой отказоустойчивой маршрутизации при распределении запросов через сеть // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2015. № 12. С. 23–28.
17. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.

References

1. Sovetov B.Ya., Yakovlev S.A. *Modeling of Systems*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2007, 343 p. (In Russian)
2. Kutuzov O.I., Tatarnikova T.M. Practical Experience of Using Monte Carlo Method. *Industrial Laboratory*, 2017, vol. 83, no. 3, pp. 65–70. (In Russian)
3. Sobol' I.M. *Numerical Monte Carlo Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1973, 212 p. (in Russian)
4. Pollyak Yu.G., Filimonov V.A. *Statistical Machine Modeling of Communication Tools*. Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1988, 176 p. (in Russian)
5. Kutuzov O.I., Tatarnikova T.M. *Mathematical Schemes and Algorithms of Infocommunication Systems Modeling*. St. Petersburg, SUAI Publ., 2013, 148 p. (in Russian)
6. Zadorozhnyi V.N., Kutuzov O.I. Problems and techniques for fractal queues modeling. *Proc. Simulation Modeling: Theory and Practice*. Kazan', Russia, 2013, pp. 143–148. (in Russian)
7. Banks J., Carson J.S., Nelson B.L., Nicol D.M. *Discrete-Event System Simulation*. 5th ed. Prentice Hall, 2009, 638 p.
8. Crane M.A., Lemoine A.J. *An Introduction to the Regenerative Method for Simulation Analysis*. Berlin, 1977.
9. Bogatyrev V.A., Vinokurova M.S. Control and safety of operation of duplicated computer systems. *Communications in Computer and Information Science*, 2017, vol. 700, pp. 331–342. doi: 10.1007/978-3-319-66836-9_28
10. Kleijnen J.P.C. *Statistical Techniques in Simulation*. Prentice-Hall, 1974.
11. Kolchin V.F. *Random Graphs*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 256 p. (in Russian)
12. Plaks B.I. Calculation of the reliability of systems with a complex structure by the accelerated Monte Carlo method. *Izv. AN SSSR. Tekhn. Kibernetika*, 1983, no. 6, pp. 158–162. (in Russian)
13. Pugachev V.N. *Combined Methods for Determining Probabilistic Characteristics*. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1973, 256 p. (in Russian)
14. Zadorozhnyi V.N., Kutuzov O.I. *Methods for Queues Simulating under Fractal Traffic in Packet Switched Networks*. Omsk, OmSTU Publ., 2013, 104 p. (in Russian)
15. Galambos Y. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. NY, Wiley, 1975.
16. Bogatyrev V.A., Parshutina S.A. Multipath fault-tolerant routing models for distributing queries through the network. *Herald of Computer and Information Technologies*, 2015, no. 12, pp. 23–28. (in Russian)
17. Christofides N. *Graph Theory: An Algorithmic Approach*. NY, Acadimic, 1975.

Авторы

Кутузов Олег Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0001-9318-6454, kutuzov-oleg@mail.ru

Татарникова Татьяна Михайловна – доктор технических наук, доцент, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 190000, Российская Федерация, Scopus ID: 36715607400, ORCID ID: 0000-0002-6419-0072, Tm-tatarn@yandex.ru

Authors

Oleg I. Kutuzov – D.Sc., Professor, Professor, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", Saint Petersburg, 197376, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0001-9318-6454, kutuzov-oleg@mail.ru

Tatiana M. Tatarnikova – D.S., Associate Professor, Professor, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, 190000, Russian Federation, Scopus ID: 36715607400, ORCID ID: 0000-0002-6419-0072, Tm-tatarn@yandex.ru