

УДК 532.529

## ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ С НАСТРАИВАЕМЫМИ ДИССИПАТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ В ЗАДАЧЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ГЕЛИЕВЫМ ПУЗЫРЕМ

Д.В. Садин<sup>а</sup>, В.А. Давидчук<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация  
Адрес для переписки: [sadin@yandex.ru](mailto:sadin@yandex.ru)

### Информация о статье

Поступила в редакцию 21.07.18, принята к печати 30.08.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1060-1065

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Садин Д.В., Давидчук В.А. Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами в задаче взаимодействия ударной волны с гелиевым пузырем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 6. С. 1060–1065. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1060-1065

### Аннотация

**Предмет исследования.** Исследованы особенности применения схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для описания течения сжимаемых многокомпонентных газов на примере задачи взаимодействия ударной волны с гелиевым пузырем. **Метод.** Схема реализует двухшаговый по времени TVD-метод Рунге–Кутты. На каждом временном шаге производится расщепление по физическим процессам пространственного разностного оператора с использованием адаптивной искусственной вязкости типа Христенсена. TVD-реконструкция потоков выполняется с использованием взвешенной линейной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций конвективных членов с ограничителем потоков. Для подавления осцилляций на контактном разрыве использовано неконсервативное уравнение переноса Абгралла. **Основные результаты.** На примере одномерной тестовой задачи Карни и Кёрка показана численная сходимость решения. Выполнено сравнение предлагаемой схемы и метода конечного объема WENO типа Коралика и Колониуса на сетках одинакового разрешения и с одинаковым числом Куранта. Представленная схема требует существенно меньших вычислительных затрат при разрешении деталей ударно-волновой картины и вихреобразования. **Практическая значимость.** Схема с настраиваемыми диссипативными свойствами может быть рекомендована для практических расчетов взаимодействия ударных волн с границами раздела газов и различными физическими постоянными, интерференции волн и вихреобразования.

### Ключевые слова

схема с настраиваемыми диссипативными свойствами, многокомпонентные газы, ударная волна, гелиевый пузырь

## SCHEME WITH CUSTOMIZABLE DISSIPATIVE PROPERTIES AS APPLIED TO INTERACTION PROBLEM BETWEEN SHOCKWAVE AND HELIUM BUBBLE

D.V. Sadin<sup>а</sup>, V.A. Davidchuk<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

Corresponding author: [sadin@yandex.ru](mailto:sadin@yandex.ru)

### Article info

Received 21.07.18, accepted 30.08.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1060-1065

Article in Russian

**For citation:** Sadin D.V., Davidchuk V.A. Scheme with customizable dissipative properties as applied to interaction problem between shockwave and helium bubble. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 6, pp. 1060–1065 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1060-1065

### Abstract

**Subject of Research.** The paper presents the study of the scheme with customizable dissipative properties for compressible multicomponent flows in case of an interaction between a shockwave and a helium bubble. **Method.** We chose a two-step TVD Runge-Kutta time-marching scheme. The spatial difference operator is splitting by the physical processes at each time step using an adaptive artificial viscosity of the Christensen type and TVD-reconstruction of flows by a weighted linear combination of upwind and central approximations of convective terms with flux limiter. To suppress the oscillations at the gases interface we used an Abgrall nonconservative advection equation. **Main Results.** Numerical convergence in the norm  $L_1$  is shown on the example of the one-dimensional Karni and Quirk test problem. We have performed a comparison of the proposed scheme and the finite-volume WENO type method of Coralic and Colonius on the same resolution grids and for the

same Courant number. The presented scheme requires significantly lower computational costs for the resolution of the shock-wave pattern and vortex formation details. **Practical Relevance.** The scheme with customizable dissipative properties can be recommended for practical calculations of the interaction between shockwaves and gas interfaces of different physical properties, wave interference and vortex formation.

**Keywords**

scheme with customizable dissipative properties, multicomponent gases, shockwave, helium bubble

**Введение**

Течения многокомпонентных газов широко применяются на практике, им свойственно наличие областей неоднородностей из-за разности термодинамических свойств газов, например, отличающихся по плотности и показателю адиабаты. Особый интерес и вычислительные трудности вызывают задачи, в которых одновременно сочетаются взаимодействия ударных волн с границами раздела сред с различными физическими постоянными или уравнениями состояний, интерференция волн и вихреобразование (развитие неустойчивости и турбулентности).

Достаточно полный обзор схем для численного моделирования многокомпонентных течений с контактными разрывами приведен в работах [1, 2]. Дискретные модели для этого класса течений описываются: схемами явного выделения или отслеживания разрывов (лагранжевы подходы, level set/ghost fluid) [3–7] и схемами сквозного счета, в которых допускается диффузия разрывов (interface-capturing) [8–11]. При использовании традиционных алгоритмов [8, 9] возникают осцилляции давления и скорости в области численного размазывания контактного разрыва двух разных по свойствам газов (такие колебания параметров по амплитуде превышают 10 % и не ограничиваются областью диффузии контакта). Это определяет необходимость исследования работоспособности схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для многокомпонентных течений газов в конечно-объемной консервативной реализации [12] CDP2 (Customizable Dissipative Properties) и ее модификации в квазиконсервативном виде.

**Основные уравнения и метод расчета**

Рассмотрим динамику смеси двух calorически совершенных термодинамически равновесных газов в рамках уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \nabla_d \mathbf{F} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \rho \mathbf{v}, \rho E]^T, \quad \mathbf{G} = [\rho \mathbf{v}, \rho \mathbf{v} \mathbf{v}, \rho E \mathbf{v}]^T, \quad \mathbf{F} = [0, 0, p, p \mathbf{v}]^T, \quad \nabla_d = \text{diag}(\nabla, \nabla, \nabla, \nabla \cdot),$$

где  $\rho_1, \rho_2$  – плотность первого и второго газа;  $\mathbf{v} = [u, v, w]^T$ ,  $E, p$  – вектор скорости, полная энергия смеси газов и давление газа соответственно;  $\nabla$  – оператор Гамильтона;  $t$  – время.

Для «замыкания» системы (1) используем уравнения состояния смеси газов [6]:

$$p = (\gamma(\phi) - 1) \rho e, \quad \gamma(\phi) = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_{p1}\phi + c_{p2}(1-\phi)}{c_{v1}\phi + c_{v2}(1-\phi)}, \quad e = E - \mathbf{v}^2 / 2, \tag{2}$$

где  $c_{v1}, c_{p1}, c_{v2}, c_{p2}$  – удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении для соответствующих газов;  $\gamma$  – показатель адиабаты смеси газов;  $\phi = \rho_1 / \rho$  – массовая доля первого компонента.

Для расчета применим схему с настраиваемыми диссипативными свойствами [13, 14] в конечно-объемной реализации [12] с аппроксимацией второго порядка по времени и пространству на гладких решениях – CDP2. Данная схема реализует двухшаговый по времени метод TVD (Total Variation Diminishing) Рунге–Кутты [15]:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q}^k + \tau L(\mathbf{q}^k),$$

$$\mathbf{q}^{k+1} = 0,5(\mathbf{q}^k + \mathbf{q}^{(1)}) + 0,5\tau L(\mathbf{q}^{(1)}).$$

На каждом временном шаге производится расщепление по физическим процессам пространственного разностного оператора  $L(\mathbf{q})$  [12–14]:

1.  $\mathbf{q}_n^{(0)} = \mathbf{q}_n^k - \tau(\tilde{\mathbf{F}}_{n\pm 1/2}^k - \tilde{\mathbf{F}}_{n-1/2}^k) / h, \quad \tilde{\mathbf{F}}_{n\pm 1/2}^k = [0, 0, \tilde{p}_{n\pm 1/2}^k, \tilde{p}_{n\pm 1/2}^k \mathbf{v}_{n\pm 1/2}^k]^T, \quad \tilde{p}_{n\pm 1/2}^k = p_{n\pm 1/2}^k + Q_{n\pm 1/2}^k,$
2.  $\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(0)} - \tau[\nabla_d \mathbf{G}]_{TVD}^{(0)}.$

Здесь  $\tau, h$  – шаги по времени и пространству;  $k$  – временной слой;  $n$  относится к центру ячейки, а  $n\pm 1/2$  – к ее граням;  $Q_{n\pm 1/2}^k$  – адаптивная искусственная вязкость типа Христенсена [16] с ограничителем вязкости  $\psi_v$ ;  $[\nabla_d \mathbf{G}]_{TVD}^{(0)}$  – обозначение TVD-реконструкции потоков путем взвешенной линейной комбинации

противопоточной и центральной аппроксимаций конвективных членов [12] с ограничителем потоков  $\psi_f$ .

Настройка диссипативных свойств схемы осуществляется выбором коэффициента искусственной вязкости и ограничителей потоков и вязкости [12–14].

### Одномерные тесты

Рассмотрим одномерную задачу Карни и Кёрка [9] распространения ударной волны по воздуху с показателем  $\gamma_1 = 1,4$  и ее взаимодействие с ограниченной областью гелия ( $\gamma_2 = 1,67$ ). В начальный момент времени ударная волна расположена в точке  $x_1/l = 0,25$ , а гелиевый пузырь между  $x_2/l = 0,4$  и  $x_3/l = 0,6$ , где  $l = 1$  м – область определения задачи. Исходные данные сведены в табл. 1.

Характерная область	$\phi$	$\rho$	$u$	$p$
$x/l \leq 0,25$	$10^{-6}$	1,6571	114,51	159060
$0,25 < x/l \leq 0,4$ и $x/l > 0,6$	$10^{-6}$	1,2040	0	101325
$0,4 < x/l \leq 0,6$	0,999	0,1664	0	101325

Таблица 1. Начальные условия задачи Карни и Кёрка в системе СИ

Приведем тестовую задачу Абгралла [9] распада разрыва в двухкомпонентном газе со значительным начальным перепадом давления и плотности (табл. 2).

Характерные области	$\phi$	$\rho$	$u$	$p$
$x/l \leq 0,5$	0,999999	14,54903	0	$194,3 \cdot 10^5$
$x/l > 0,5$	$10^{-6}$	1,16355	0	$10^5$

Таблица 2. Начальные условия задачи Абгралла в системе СИ

Расчеты выполнены при числе Куранта  $CFL = 0,4$  с ограничителями искусственной вязкости и потоков Van Leer как функции отношения разности параметров в прилежащих узлах сетки  $r$   $\psi(r) = (r + |r|)/(1 + r)$ .

На рис. 1 приведены результаты расчетов в момент времени  $t_f = 1,02 \cdot 10^{-3}$  с, давления (рис. 1, а) и плотности (рис. 1, б), отнесенные к соответствующим начальным параметрам за ударной волной: точки  $h/l = 1/400$  и сплошная кривая  $h/l = 1/1600$ .

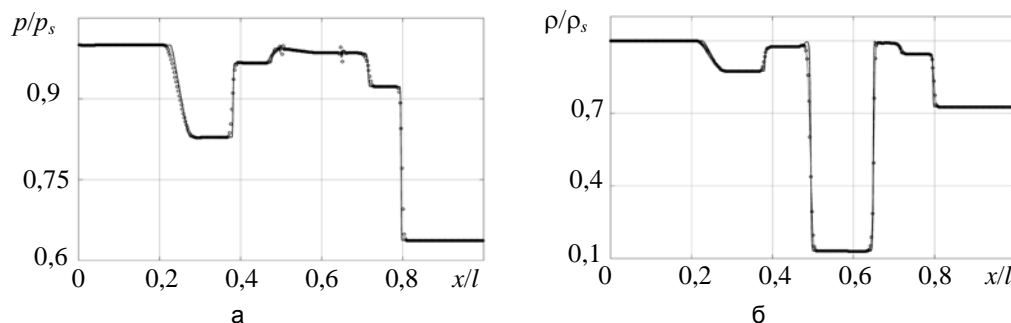


Рис. 1. Результаты численного решения задачи Карни и Кёрка: а – относительное давление; б – относительная плотность

При решении по конечно-объемной консервативной схеме CDP2 в распределении давления возникают осцилляции порядка 1 %, ограниченные зоной размазывания контактного разрыва. Колебания давления в этой области несколько уменьшаются с измельчением сетки вследствие [8, 9] особенностей консервативных схем «конечного объема». Для определения показателя адиабаты смеси двух газов в [9] предложено использовать неконсервативное уравнение переноса вида:

$$\frac{\partial(1/\kappa)}{\partial t} + u \frac{\partial(1/\kappa)}{\partial x} = 0 \quad (\kappa = \gamma - 1). \quad (3)$$

В численном решении на сетке  $h/l = 1/1600$  с использованием квазиконсервативной схемы CDP2 (1)–(3) и ограничителем потоков MINMOD  $\psi_f(r) = \min(\max(0, r), 1)$  осцилляции давления в области контактных разрывов практически исчезают.

Сходимость квазиконсервативной схемы CDP2 демонстрирует табл. 3, где для различных разрешений сетки и ограничителей потоков приведены ошибки решения в норме  $L_1$  относительно

решения задачи на сетке 1/6400.

Разрешение сетки	Ограничитель Van Leer		Ограничитель MINMOD	
	$\delta p / p_s$	$\delta \rho / \rho_s$	$\delta p / p_s$	$\delta \rho / \rho_s$
1/400	$3,93167 \cdot 10^{-3}$	$9,30904 \cdot 10^{-3}$	$4,18163 \cdot 10^{-3}$	$1,12561 \cdot 10^{-2}$
1/800	$1,99673 \cdot 10^{-3}$	$4,61539 \cdot 10^{-3}$	$2,14986 \cdot 10^{-3}$	$6,04053 \cdot 10^{-3}$
1/1600	$8,66474 \cdot 10^{-4}$	$1,89560 \cdot 10^{-3}$	$9,21571 \cdot 10^{-4}$	$2,83840 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3. Относительные ошибки решения в норме  $L_1$

Результаты решения тестовой задачи Абгралла на сетке  $h/l=1/100$  до момента времени  $t_f = 2,4 \cdot 10^{-4}$  с показаны на рис. 2. Конечно-объемные консервативные варианты схем дают нефизический провал в распределении плотности (+), меньший для схемы CDP2. Использование уравнения (3) в [9] уменьшает колебание плотности в зоне контактного разрыва менее чем до 1% (рис. 2, б –  $\diamond$ ). Решение по квазиконсервативной схеме CDP2 является монотонным с несколько увеличенной шириной размазывания контакта (рис. 2, а – O).

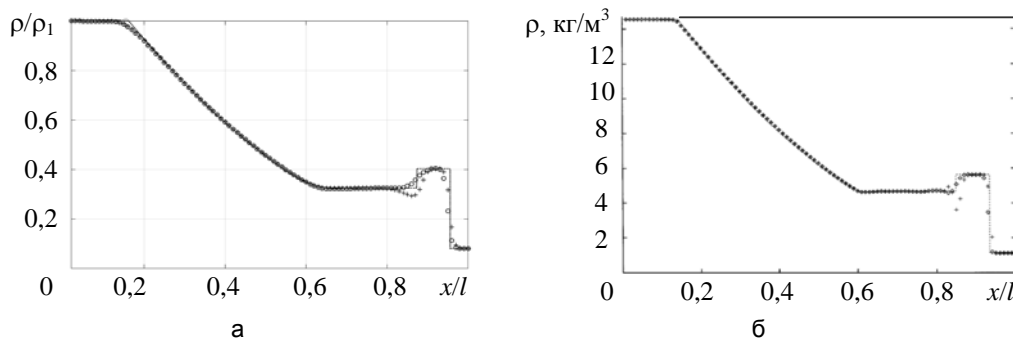


Рис. 2. Результаты численного решения задачи Абгралла: а – схемы CDP2; б – схемы из [9] (O и  $\diamond$  – квазиконсервативные версии схем; + расчеты по консервативным схемам; пунктир – точное решение)

### Взаимодействие ударной волны с гелиевым пузырем

Экспериментально изученная Хаасом и Стёртвантом [17] задача взаимодействия ударной волны с гелиевым пузырем широко использовалась при валидации схем для многокомпонентных течений. В ударной трубе с поперечным размером 8,9 см имеется пузырек диаметром 5 см смеси гелия и воздуха 28 масс.%. Ударная волна в начальный момент времени расположена в 5 см от центра пузырька и распространяется справа налево по воздуху с числом Маха 1,22. Соответствующие начальные условия сведены в табл. 4.

Характерные области	$\phi$	$\rho$	$u$	$p$
Перед ударной волной	$10^{-6}$	1,6571	-114,51	159060
За ударной волной	$10^{-6}$	1,2040	0	101325
Пузырь	0,72	0,2191	0	101325

Таблица 4. Начальные условия взаимодействия ударной волны с гелиевым пузырем в системе СИ

Расчет выполнялся на равномерной сетке  $6500 \times 890$  ячеек до оси симметрии с шагом сетки  $h = 50$  мкм. Граничные условия заданы на стенке ударной трубы и оси симметрии – отражения, входные и выходные границы – экстраполяция параметров. Для моделирования использовалась описанная выше схема с настраиваемыми диссипативными свойствами CDP2 и ограничителями искусственной вязкости и потоков Van Leer, число Куранта  $CFL = 0,4$ .

На рис. 3 представлены результаты качественного сравнения расчетов по схеме CDP2 (верхний ряд) и конечно-объемной схеме WENO (Weighted Essentially Nonoscillatory) четвертого порядка аппроксимации по пространству и третьего порядка по времени [1] (нижний ряд) при одинаковом разрешении сеток и числе Куранта. Визуализация плотности в виде численных шпирен-изображений осуществлялась методом Кёрка и Карни [8]. Результаты расчета эволюции гелиевого пузырька и ударно-волновая картина в приведенные моменты времени по схемам CDP2 и WENO из [1] хорошо согласуются между собой.

Оценка вычислительных затрат по количеству элементарных математических операций, условных переходов и операций сравнения показывает, что схема с настраиваемыми диссипативными свойствами существенно экономичнее схемы WENO. Например, вычисление индикаторов гладкости в схеме [1]

требует 36 операций сложения/вычитания, 83 операций умножения/деления. При расчете полиномов в точке  $x = x_{i+1/2}$  – соответственно 6 и 23 операции. В схеме CDP2 в ограничителе (индикаторе гладкости) Van Leer используется 8 операций сложения и 3 деления. Вычисление потока в точке  $x = x_{i+1/2}$  требует 6 арифметических операций, 8 умножения/деления и условный переход. Кроме того, схема [1] реализует трехстадийный по времени метод Рунге–Кутты, в отличие от двух временных шагов в алгоритме CDP2. Для более точной оценки вычислительных затрат необходимо реализовать сравниваемые схемы на одном компьютере.

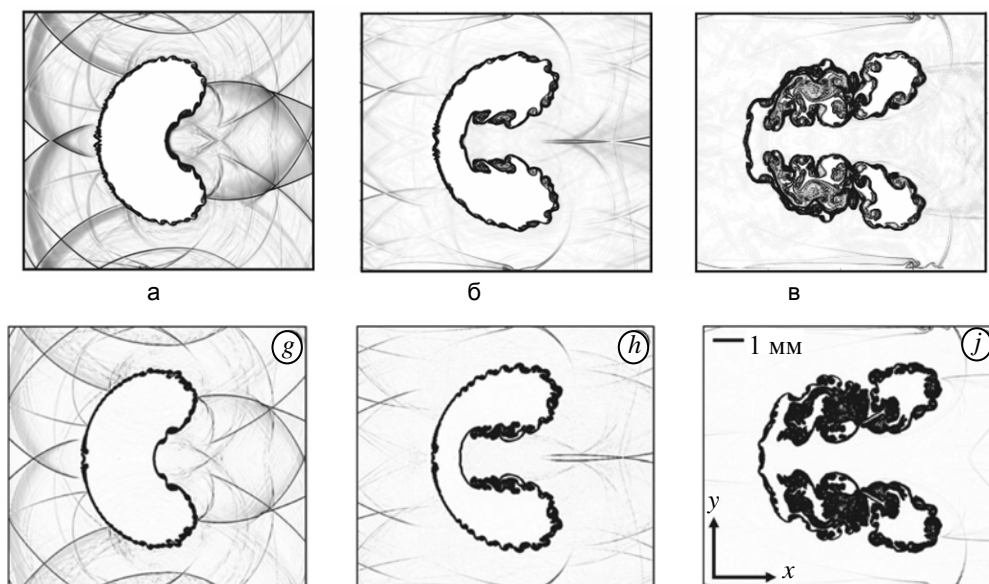


Рис. 3. Результаты решения задачи взаимодействия ударной волны с гелиевым пузырем (шпирен-изображения) в моменты времени: а – 245; б – 427; в – 983 мкс. Верхний ряд – схема CDP2, нижний ряд – WENO из [1]

### Заключение

Показаны возможности схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами применительно к течениям сжимаемых многокомпонентных газов. Для подавления осцилляций на контактном разрыве двух разных газов предлагаемая схема дополнена неконсервативным уравнением переноса Абгралла. На примере одномерной тестовой задачи Карни и Кёрка показана численная сходимость. Выполнено сравнение схем типа CDP2 и WENO на примере взаимодействия ударной волны с гелиевым пузырем. Схема CDP2 является в 5–6 раз более экономичной и обладает удовлетворительными диссипативными свойствами для разрешения сложных деталей ударно-волновой картины и вихреобразования. Дальнейшие исследования направлены на реализацию схемы CDP2 для структурно сложных течений многофазных сред.

### Литература

1. Coralic V., Colonius T. Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multicomponent flows // *Journal of Computational Physics*. 2014. V. 274. P. 95–121. doi: 10.1016/j.jcp.2014.06.003
2. Wong M.L., Lele S.K. High-order localized dissipation weighted compact nonlinear scheme for shock- and interface-capturing in compressible flows // *Journal of Computational Physics*. 2017. V. 339. N 15. P. 179–209. doi: 10.1016/j.jcp.2017.03.008
3. Luo H., Baum J.D., Lohner R. On the computation of multi-material flows using ALE formulation // *Journal of Computational Physics*. 2004. V. 194. N 1. P. 304–328. doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.026
4. Glimm J., Li X.L., Liu Y.J., Xu Z.L., Zhao N. Conservative front tracking with improved accuracy // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2003. V. 41. N 5. P. 1926–1947. doi: 10.1137/s0036142901388627
5. Fedkiw R.P., Aslam T., Merriman B., Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method) // *Journal of Computational Physics*.

### References

1. Coralic V., Colonius T. Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multicomponent flows. *Journal of Computational Physics*, 2014, vol. 274, pp. 95–121. doi: 10.1016/j.jcp.2014.06.003
2. Wong M.L., Lele S.K. High-order localized dissipation weighted compact nonlinear scheme for shock- and interface-capturing in compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 2017, vol. 339, no. 15, pp. 179–209. doi: 10.1016/j.jcp.2017.03.008
3. Luo H., Baum J.D., Lohner R. On the computation of multi-material flows using ALE formulation. *Journal of Computational Physics*, 2004, vol. 194, no. 1, pp. 304–328. doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.026
4. Glimm J., Li X.L., Liu Y.J., Xu Z.L., Zhao N. Conservative front tracking with improved accuracy. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2003, vol. 41, no. 5, pp. 1926–1947. doi: 10.1137/s0036142901388627
5. Fedkiw R.P., Aslam T., Merriman B., Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 152, no. 2, pp. 457–492. doi: 10.1006/jcph.1999.6236

1999. V. 152. N 2. P. 457–492. doi: 10.1006/jcph.1999.6236
6. Abgrall R., Karni S. Computations of compressible multifluids // *Journal of Computational Physics*. 2001. V. 169. N 2. P. 594–623. doi: 10.1006/jcph.2000.6685
  7. Nourgaliev R.R., Theofanous T.G. High-fidelity interface tracking in compressible flows: unlimited anchored adaptive level set // *Journal of Computational Physics*. 2007. V. 224. N 2. P. 836–866. doi: 10.1016/j.jcp.2006.10.031
  8. Quirk J.J., Karni S. On the dynamics of a shock-bubble interaction // *Journal of Fluid Mechanics*. 1996. V. 318. N 1. P. 129–163. doi: 10.1017/s002211209600706
  9. Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach // *Journal of Computational Physics*. 1996. V. 125. N 1. P. 150–160. doi: 10.1006/jcph.1996.0085
  10. Shyue K.M. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems // *Journal of Computational Physics*. 1998. V. 142. N 1. P. 208–242. doi: 10.1006/jcph.1998.5930
  11. Marquina A., Mulet P. A flux-split algorithm applied to conservative models for multicomponent compressible flows // *Journal of Computational Physics*. 2003. V. 185. N 1. P. 120–138. doi: 10.1016/s0021-9991(02)00050-5
  12. Садин Д.В. Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами к расчету течений газа с развитием неустойчивости на контактной границе // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2018. Т. 18. № 1. С. 153–157. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-153-157
  13. Садин Д.В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // *ЖВМ и МФ*. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098–2109. doi: 10.7868/S0044466916120152
  14. Садин Д.В. Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газовзвесей // *Математическое моделирование*. 2017. Т. 29. № 12. С. 89–104.
  15. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes // *Mathematics of Computation*. 1998. V. 67. N 221. P. 73–85. doi: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2
  16. Christensen R.B. Godunov Methods on a Staggered Mesh - An Improved Artificial Viscosity. Technical Report UCRL-JC-105269. 1990. 11 p.
  17. Haas J.F., Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. V. 181. N 1. P. 41–76. doi: 10.1017/s0022112087002003
  6. Abgrall R., Karni S. Computations of compressible multifluids. *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 169, no. 2, pp. 594–623. doi: 10.1006/jcph.2000.6685
  7. Nourgaliev R.R., Theofanous T.G. High-fidelity interface tracking in compressible flows: unlimited anchored adaptive level set. *Journal of Computational Physics*, 2007, vol. 224, no. 2, pp. 836–866. doi: 10.1016/j.jcp.2006.10.031
  8. Quirk J.J., Karni S. On the dynamics of a shock-bubble interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, vol. 318, no. 1, pp. 129–163. doi: 10.1017/s002211209600706
  9. Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 125, no. 1, pp. 150–160. doi: 10.1006/jcph.1996.0085
  10. Shyue K.M. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems. *Journal of Computational Physics*, 1998, vol. 142, no. 1, pp. 208–242. doi: 10.1006/jcph.1998.5930
  11. Marquina A., Mulet P. A flux-split algorithm applied to conservative models for multicomponent compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 185, no. 1, pp. 120–138. doi: 10.1016/s0021-9991(02)00050-5
  12. Sadin D.V. Application of scheme with customizable dissipative properties for gas flow calculation with interface instability evolution. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 153–157 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-153-157
  13. Sadin D.V. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 12, pp. 2068–2078. doi: 10.1134/S0965542516120137
  14. Sadin D.V. Schemes with customizable dissipative properties as applied to gas-suspensions flow simulation. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 29, no. 12, pp. 89–104 (in Russian).
  15. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*, 1998, vol. 67, no. 221, pp. 73–85. doi: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2
  16. Christensen R.B. Godunov Methods on a Staggered Mesh - An Improved Artificial Viscosity. *Technical Report UCRL-JC-105269*, 1990, 11 p.
  17. Haas J.F., Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, vol. 181, no. 1, pp. 41–76. doi: 10.1017/s0022112087002003

### Авторы

**Садин Дмитрий Викторович** – доктор технических наук, профессор, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, Scopus ID: 6602924618, ORCID ID: 0000-0001-5335-4847, sadin@yandex.ru

**Давидчук Виктор Александрович** – адъюнкт, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0001-5427-1744, david\_lxii@mail.ru

### Authors

**Dmitry V. Sadin** – D.Sc., Full Professor, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, Scopus ID: 6602924618, ORCID ID: 0000-0001-5335-4847, sadin@yandex.ru

**Victor A. Davidchuk** – postgraduate, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0001-5427-1744, david\_lxii@mail.ru