

УДК 517.538

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1115-1121

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЭФФЕКТОВ В ПОЗВОНОЧНИКЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ФИКСИРУЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Е.В. Кабанова<sup>а</sup>, Ю.А. Балашин<sup>а</sup>, И.Ю. Попов<sup>а</sup>, М.Г. Дудин<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>б</sup> Восстановительный центр детской ортопедии и травматологии «Огонек», Санкт-Петербург, 198903, Российская Федерация

Адрес для переписки: [catherine.kabanova@yandex.ru](mailto:catherine.kabanova@yandex.ru)

### Информация о статье

Поступила в редакцию 19.08.19, принята к печати 02.10.19

Язык статьи — русский

**Ссылка для цитирования:** Кабанова Е.В., Балашин Ю.А., Попов И.Ю., Дудин М.Г. Моделирование резонансных эффектов в позвоночнике с дополнительными фиксирующими элементами // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 6. С. 1115–1121. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1115-1121

### Аннотация

**Предмет исследования.** Исследована методика расчета собственных частот системы, состоящей из позвоночника человека с фиксирующими элементами. В окрестностях подобной системы возможны резонансные эффекты, приводящие к нарушению устойчивости или разрушению конструкции. **Метод.** Предложена математическая модель условного позвоночного столба, состоящая из двух анатомо-физиологически обособленных колонн — спинного мозга (дорзальная продольная колонна) и его костно-связочно-мышечного «футляра» (вентральная продольная колонна), в которую введено дополнительное граничное условие — дополнительный фиксирующий элемент. Для решения поставленной задачи позвоночный комплекс моделируется с помощью геометрического графа. Рассматривается дифференциальный оператор четвертого порядка на ребрах геометрического графа, являющегося моделью биомеханической системы — позвоночника и металлической конструкции. В вершинах графа предполагается наличие точечных потенциалов, моделирующих характер связи элементов графа. Решается система дифференциальных уравнений с граничными условиями (условиями согласования решений на соседних ребрах) для нахождения спектра оператора, представляющего собой опасные для целостности механической системы частоты. **Основные результаты.** Предложена методика нахождения собственных частот биомеханической системы, которые приводят к резонансным эффектам. Построена корректная модель метрического графа с оператором четвертого порядка на ребрах и с условиями точечного взаимодействия в вершинах. Получены значения частот для конкретных значений параметров системы. **Практическая значимость.** Описанная методика получения значений опасных частот может быть использована при лечении пациентов больных сколиозом для предотвращения поломки устанавливаемой металлической конструкции и сохранения жизни пациента.

### Ключевые слова

метрический граф, оператор четвертого порядка, точечный потенциал, спектр оператора, сколиоз, биомеханическая система

### Благодарности

Работа частично поддержана Правительством Российской Федерации (грант 08-08) и грантом 16-11-10330 Российского научного фонда.

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1115-1121

## MODELING OF RESONANCE EFFECTS IN SPINE WITH ADDITIONAL FIXING ELEMENTS

E.V. Kabanova<sup>а</sup>, Yu.A. Baloshin<sup>а</sup>, I.Yu. Popov<sup>а</sup>, M.G. Dudin<sup>б</sup>

<sup>а</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>б</sup> Children's Rehabilitation Center of Orthopedics and Traumatology "Ogonyok", Saint Petersburg, 198903, Russian Federation

Corresponding author: [catherine.kabanova@yandex.ru](mailto:catherine.kabanova@yandex.ru)

### Article info

Received 19.08.19, accepted 02.10.19

Article in Russian

**For citation:** Kabanova E.V., Baloshin Yu.A., Popov I.Yu., Dudin M.G. Modeling of resonance effects in spine with additional fixing elements. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 6, pp. 1115–1121 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1115-1121

**Abstract**

**Subject of Research.** We study the procedure of natural frequencies calculation for a system consisting of a human spine with fixing elements. Resonant effects can occur in the vicinity of such system leading to stability violation or structure destruction. **Method.** A mathematical model of the conditional vertebral column is proposed, consisting of two anatomically-physiologically isolated columns: the spinal cord (dorsal longitudinal column) and its musculoskeletal “case” (ventral longitudinal column). The model includes complementary boundary condition — an additional fixing element. To solve this problem, the vertebral complex is modeled using a geometric graph. A fourth-order differential operator on the edges of a geometric graph is considered. The graph is a model of a biomechanical system — the spine and metal structure. It is assumed that there are point potentials at the vertices of the graph that model the bond character between the graph elements. A system of differential equations with boundary conditions (conditions for matching solutions on adjacent edges) is solved to find the spectrum of the operator dangerous for the integrity of the mechanical frequency system. **Main Results.** A technique is proposed for detection of biomechanical system eigenfrequencies that lead to resonant effects. A correct model of a metric graph is created with a fourth-order operator on the edges and the conditions of point interaction at the vertices. Frequency values are obtained for specific values of the system parameters. **Practical Relevance.** The described method for detection of hazardous frequencies can be used in the treatment of patients with scoliosis to prevent breakage of the installed metal structure and save the patient’s life.

**Keywords**

metric graph, fourth-order operator, point potential, operator spectrum, scoliosis, biomechanical system

**Acknowledgements**

This work was partially supported by the Government of the Russian Federation (grant 08-08) and grant 16-11-10330 of the Russian Science Foundation.

**Введение**

Позвоночный столб — это многоэлементный биомеханический комплекс, в котором присутствуют два совершенно разнородных анатомо-функциональных компонента, растущих в жестких граничных условиях. Изучение сколиоза как самого частого поражения этого сегмента опорно-двигательного аппарата у детей (остающегося у взрослого человека на всю жизнь) продолжается на протяжении не менее трех тысяч лет. В результате выявлено несколько фундаментальных фактов (см., например, [1, 2]). Первый — патологическое деформирование позвоночного столба является процессом во времени. Второй — самым бесспорным фактом в теории и практике сколиоза является связь его возникновения и развития с процессом роста ребенка. Третий — единственным обстоятельством, вызывающим инициацию и дальнейшее развитие клинического симптомокомплекса сколиоза, является несопряженность (несинхронность) процессов продольного роста спинного мозга и его «футляра», что дает объяснение важнейшему парадоксу — это всегда 3D-деформация при достаточно широком спектре патологических состояний в организме ребенка (более 50 клинически детерминированных заболеваний у человека сопровождаются появлением сколиоза). Четвертый — в 20 % случаев процесс деформирования позвоночного столба имеет агрессивный (прогрессирующий) характер, что приводит к глубокой инвалидизации человека за счет вторичного изменения анатомии грудной клетки и связанного с этим неминуемого нарушения в функционировании кардио-респираторного комплекса.

На современном этапе борьбы с прогрессирующим сколиозом в мировой практике пока безальтернативным признается хирургическая коррекция с фиксацией полученного результата с помощью металлической конструкции, устанавливаемой на протяжении всего деформированного участка упомянутого «футляра». В результате возникает полная неподвижность достаточно большой зоны позвоночного столба, что становится причиной для послеоперационных осложнений, наиболее значимыми из которых считаются: развитие феномена «коленчатого вала» (англ. crankshaft phenomenon) и нарушение стабильности имплантируемой конструкции. После искусственной фиксации (металлический имплант) появляется еще одно граничное условие — обездвиживание в нескольких позвоночно-двигательных сегментах (в норме — подвижных соединениях между двумя соседними позвонками). Мы допускаем, в полном соответствии с законами для напряженных конструкций, что в новых обстоятельствах в инструментированной зоне могут возникать с последующим нарастанием определенные резонансные эффекты. В связи с этим необходимо знать спектр собственных частот упругих колебаний конструкции, ибо именно в окрестностях собственных частот наблюдается резонансное усиление слабых внешних периодических возмущений соответствующих частот. Методика расчета таких частот и предлагается в данной статье.

Модель строится на базе метрического графа. А именно, для этого сопоставим позвоночнику с установленной металлической конструкцией решетку из стержней и рассмотрим ее колебания. Для описания деформации решетки используют скалярное дифференциальное уравнение четвертого порядка (уравнение упругости), которое имеет вид:

$$Q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( P(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( R(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Здесь  $u(t, x)$  — деформация в точке в момент времени  $t$ , а  $Q, P, R$  — коэффициенты, связанные с упругими характеристиками стержней (ребер графа) [3]. В данной работе мы будем считать их постоянными. В узлах сетки необходимо учесть тип скрепления стержней (шарнирное соединение или жесткое

закрепление), а на границах — условия закрепления. После отделения временной переменной получаем стационарную задачу, которую мы и будем анализировать с помощью геометрического графа, на ребрах которого задаются исследуемые дифференциальные уравнения, а в вершинах — условия, определяющие тип закрепления, и условия взаимодействия ребер в данных вершинах.

В данной работе предполагается построить модель метрического графа с оператором четвертого порядка и точечным взаимодействием в вершинах, а затем исследовать его спектр. Будем считать, что ребра, соответствующие стержням металлической конструкции, закреплены жестко, а в точках примыкания к позвоночнику наблюдается шарнирное соединение. По предположению во всех вершинах соединения ребер есть точечный потенциал, описывающий характер их взаимодействия.

### Описание модели

Метрический граф является геометрической реализацией конечного графа путем отождествления каждого ребра с отрезком вещественной прямой. Обозначим граф через  $\Gamma$ , тогда  $V(\Gamma)$  — это множество вершин графа  $\Gamma$ , а  $E(\Gamma)$  — множество его ребер. Граф предполагается связным, а множества вершин и ребер — конечными. Степень вершины  $d(a)$  для вершины  $a$  — это количество исходящих из нее ребер. Обозначим через  $\partial\Gamma$  — множество граничных вершин, т. е. тех, для которых  $d(a) = 1$ . Вершины, для которых  $d(a) > 1$ , называются внутренними и обозначаются через  $J(\Gamma)$ . Присвоим каждому ребру и каждой вершине номер. Обозначим через  $\gamma_i$  ( $i = 1, k$ ) ребро графа. Если вершина  $a$  является концевой для ребра  $\gamma_i$ , то говорят, что ребро  $\gamma_i$  примыкает к вершине  $a$ . Множество номеров ребер, примыкающих к вершине  $a$ , обозначим через  $I(a)$ . Обозначим через  $y_i(x)$  сужение заданной на графе функции на ребро  $\gamma_i$  [3]. Производная  $y'$  вдоль любого ребра для функции  $y(x)$  на графе определяется естественным образом при условии, что направление дифференцирования указано.

Дифференциальным уравнением на графе будем называть совокупность дифференциальных уравнений, заданных на ребрах графа вместе с условиями согласования в его вершинах [3]. На каждом ребре  $\gamma_i$  уравнение имеет вид:

$$(p_i(x)y_i''')' - (q_i(x)y_i')' = 0, (x \in \gamma_i),$$

где  $p_i(x)$  — коэффициент, характеризующий реакцию на изгиб, а  $q_i(x)$  — коэффициент, связанный с натяжением стержня. Будем считать, что  $p_i(x) \geq 0$ ,  $q_i(x) \geq 0$  на [4].

Совокупность дифференциальных уравнений на графе описывается общей формулой:

$$Ay \equiv (p_i(x)y_i''')' - (q_i(x)y_i')' = 0, x \in [\Gamma].$$

Также рассматриваются условия согласования следующих типов [5, 6].

Условие непрерывности в вершине  $a$ :

$$y_i(a) = y_j(a). \tag{1}$$

Упругое защемление в вершине  $a$ :

$$\beta_i(a)y_i''(a) - \vartheta_i(a)y_i'(a) = 0.$$

Упругая опора в вершине  $a$  (при выполнении (1)):

$$\sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a) [(p_i y_i''')' - q_i y_i'](a) + \rho(a)y(a) = 0.$$

При обращении некоторых коэффициентов в ноль возникают частные случаи [3].

Жесткое закрепление:

$$y_i'(a) = 0, (i \in I(a)).$$

Шарнирное соединение:

$$y_i''(a) = 0, (i \in I(a)).$$

Условие баланса сил при наличии точечного взаимодействия в вершине:

$$\sum_{i \in I(a)} \varepsilon_i(a) [(p_i y_i''')' - q_i y_i'](a) + b(a)y(a) = 0. \tag{2}$$

Здесь  $\varepsilon_i(a) = 1$  для исходящих из вершины ребер и  $-1$  для входящих ребер.

### Постановка задачи

Будем рассматривать не весь позвоночник как, например, в [7], а участок позвоночника с установленной металлической конструкцией (имплантом) на нем.

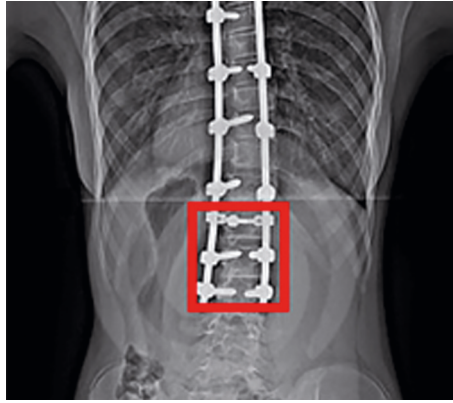


Рис. 1. Рентгеновский снимок человека, больного сколиозом, с выделенным участком [8]

Сопоставим ему следующую модель геометрического графа.

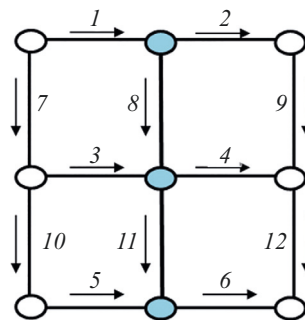


Рис. 2. Модель геометрического графа для выбранного участка позвоночника (рис. 1) с металлической конструкцией

Предложенный к рассмотрению граф содержит 12 ребер и 9 вершин. Ориентация ребер показана на рис. 2. Длины ребер имеют значения:  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}$ .

На каждом ребре задано дифференциальное уравнение:

$$py_i'''' - qy_i'' - k^2y_i = 0.$$

В вершинах графа заданы условия непрерывности функции во внутренних вершинах; условия обнуления первой производной и условия наличия точечного взаимодействия (2). Дифференциальные уравнения на ребрах в случае постоянных коэффициентов решаются явно. Решения имеют вид линейных комбинаций фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами. Удовлетворение системе граничных условий дает линейную однородную алгебраическую систему уравнений для определения данных коэффициентов. Условие существования нетривиального решения есть равенство нулю определителя системы. Находим корни  $k$  определителя. Спектр оператора составляют квадраты корней  $k$ , т. е. волновых чисел (при выборе системы единиц, в которой скорость волн равна единице, они совпадают с частотами, как их в дальнейшем часто и будем называть). Вычисления будут производиться в предположении, что коэффициенты уравнения постоянные. В расчетах будем использовать следующие значения параметров (соотношения длин ребер взяты из конкретной конструкции, показанной на рис. 1, за единицу принята длина первого ребра):

$$p = 1, q = 0, L_1 = L_4 = 1, L_2 = L_3 = L_7 = L_8 = L_9 = L_{10} = L_{12} = 1,5, L_5 = 1,3, L_6 = 1,2, L_{11} = 1,7.$$

**Решение задачи**

Пусть  $A^*$  — оператор, сопряженный с  $A$ . Если  $A = A^*$ , то он называется самосопряженным. Нужно проверить, что у операторов совпадают области определения и выполняется условие  $(Ay, g) = (y, A^*g)$ .

$$(Ay, g) = \sum_{i=1}^{12} \int_0^{L_i} Ay_i \bar{g}_i dx = \sum_{i=1}^{12} \int_0^{L_i} (py_i'''' - qy_i'') \bar{g}_i dx = p \sum_{i=1}^{12} \int_0^{L_i} y_i'''' \bar{g}_i dx - q \sum_{i=1}^{12} \int_0^{L_i} y_i'' \bar{g}_i dx.$$

С помощью интегрирования по частям убеждаемся, что:

$$(Ay, g) - (y, A^*g) = p \sum_{i=1}^{12} (y_i''' \bar{g}_i - y_i'' \bar{g}_i' + y_i' \bar{g}_i'' - y_i \bar{g}_i''') - q \sum_{i=1}^{12} (y_i' \bar{g}_i - y_i \bar{g}_i').$$

Было проверено, что условия на  $g$  совпадают с условиями на  $y$ , что подтверждает самосопряженность оператора.

Запишем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} py_i'''' - qy_i'' - k^2y_i = 0, i = 1..12, \\ y_1(0) = y_7(0), \\ y_1(L_1) = y_2(0) = y_8(0), \\ y_2(L_2) = y_9(0), \\ y_7(L_7) = y_3(0) = y_{10}(0), \\ y_3(L_3) = y_8(L_8) = y_4(0) = y_{11}(0), \\ y_4(L_4) = y_{12}(0) = y_9(L_9), \\ y_{10}(L_{10}) = y_5(0), \\ y_5(L_5) = y_{11}(L_{11}) = y_6(0), \\ y_6(L_6) = y_{12}(L_{12}), \\ y_1'(0) = y_2'(L_2) = y_3'(0) = y_4'(L_4) = y_5'(0) = y_6'(L_6) = \\ = y_7'(0) = y_7'(L_7) = y_9'(0) = y_9'(L_9) = \\ = y_{10}'(0) = y_{10}'(L_{10}) = y_{12}'(0) = y_{12}'(L_{12}) = 0, \\ y_1''(L_1) = y_2''(0) = y_3''(L_3) = y_4''(0) = y_5''(L_5) = y_6''(0) = y_8''(0) = \\ = y_8''(L_8) = y_{11}''(0) = y_{11}''(L_{11}) = 0, \\ y_1'''(0) + y_7'''(0) = \alpha_1y_1(0), \\ y_1'''(L_1) - y_2'''(0) - y_8'''(0) = \alpha_2y_1(L_1), \\ y_2'''(L_2) - y_9'''(0) = \alpha_3y_2(L_2), \\ y_7'''(L_7) - y_3'''(0) - y_{10}'''(0) = \alpha_4y_{10}(0), \\ y_3'''(L_3) + y_8'''(L_8) - y_4'''(0) - y_{11}'''(0) = \alpha_5y_{11}(0), \\ y_4'''(L_4) - y_{12}'''(0) + y_9'''(L_9) = \alpha_6y_{12}(0), \\ y_{10}'''(L_{10}) - y_5'''(0) = \alpha_7y_5(0), \\ y_5'''(L_5) + y_{11}'''(L_{11}) - y_6'''(0) = \alpha_8y_6(0), \\ y_6'''(L_6) + y_{12}'''(L_{12}) = \alpha_9y_6(L_6). \end{array} \right. \quad (3)$$

Сначала решим дифференциальное уравнение. Запишем характеристическое уравнение:

$$p\lambda^4 - q\lambda^2 - k^2 = 0. \quad (4)$$

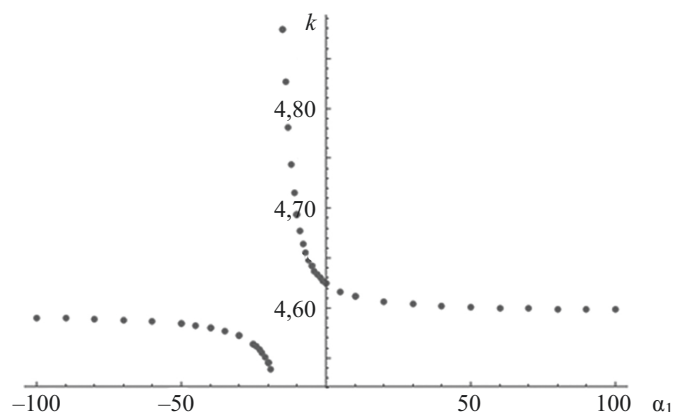
Осуществим замену  $\lambda^2 = t$ , тогда  $t = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4pk^2}}{2p}$ . Уравнение (4) имеет 4 корня:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4pk^2}}{2p}}, \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4pk^2}}{2p}}.$$

Общее решение уравнения:  $y(x) = A_1e^{\mu x} + A_2e^{-\mu x} + A_3\cos(\mu x) + A_4\sin(\mu x)$ , где  $\mu = \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4pk^2}}{2p}}$ .

Удовлетворим условиям нашей системы (3). Найдем корни определителя численно с помощью программы Wolfram Mathematica. На рис. 3 показана зависимость корня определителя, т. е. волнового числа, соответствующего собственному значению оператора, от параметра  $\alpha_1$ , характеризующего точечный потенциал в вершине графа.



Рис. 3. График зависимости волнового числа  $k$  от параметра  $\alpha_1$ 

В рассматриваемом диапазоне  $\alpha_1 \in [-100, 100]$  (в выбранной системе единиц за единицу длины выбрана длина первого ребра графа, волновое число имеет размерность обратной длины, а параметр  $\alpha_1$  — размерность величины, обратной кубу длины) наблюдается присутствие корней, что означает наличие опасных частот для установленной металлической конструкции (с точки зрения возможного возникновения резонанса).

### Заключение

Следует отметить большое количество моделей позвоночника, позволяющих описывать какие-то конкретные его свойства (см., например, [9–12]). Однако общей модели данной биомеханической системы пока не разработано. Что касается имплантов, то они существуют во многих вариантах [13–15].

В результате данной работы была построена корректная модель метрического графа с оператором четвертого порядка на ребрах и с условиями точечного взаимодействия в вершинах. Найдены решения системы и получены некоторые значения частот, которые приводят к нежелательному поведению данной металлической конструкции. Установлены некоторые зависимости частот от параметров системы.

Предложенный алгоритм решения задачи можно успешно применять на практике, однако на данный момент нет точных данных о реальных значениях параметров, которые описывают характеристики соединения ребер графа (т.е. элементов конструкции). Определение значений этих параметров для реальных имплантов, находящихся в теле пациента, по косвенным измерениям будет предметом дальнейшего исследования. Поэтому в данной работе мы ограничились исследованием поведения корня определителя (резонансного волнового числа) в зависимости от свободного выбора параметра  $\alpha_1$ .

В дальнейшем полученная методика определения частот, которые могут привести к поломке металлической конструкции, позволит осуществить прогноз поведения конструкции для каждого конкретного случая с учетом соответствующих характеристик точечных потенциалов.

### Литература

1. Сендрей М., Сим Ф.Х. Атлас клинической ортопедии: Пер. с англ. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. 470 с.
2. Сампиев М.Т., Лака А.А., Загородний Н.В. Сколиоз. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2008. 156 с.
3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.
4. Боровских А.В., Мустафакулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Доклады Академии наук. 1995. Т. 345. № 6. С. 730–732.
5. Kiik J.C., Kurasov P., Usman M. On vertex conditions for elastic systems // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. 2015. V. 379. N 34-35. P. 1871–1876. doi: 10.1016/j.physleta.2015.05.017
6. Дудин М.Г., Михайловский М.В., Садовой М.А., Пинчук Д.Ю., Фомичев Н.Г. Идиопатический сколиоз: кто виноват и что делать? // *Хирургия позвоночника*, 2014. № 2. P. 8–20.
7. Popov I., Lisitsa N., Baloshin Y., Dudin M., Bober S. Variational model of scoliosis // *Theoretical and Applied Mechanics*. 2018. V. 45. N 2. P. 167–175. doi: 10.2298/TAM170818012P
8. Scoliosis X-ray stock photo. Image of cauda, health, chiropractic — 21752394 [Электронный ресурс]. URL: <https://www.dreamstime.com/21752394>

### References

1. Szendroi M., Sim F.H. *Color atlas of clinical orthopedics*. Springer Science & Business Media, 2009, 480 p.
2. Sampiev M.T., Laka A.A. *Scoliosis*. Moscow, GEOTAR-Media Publ., 2008, 156 p. (in Russian)
3. Pokornyi Yu.V., Penkin O.M., Priadiyev V.L., Borovskikh A.V., Lazarev K.P., Shabrov S.A. *Differential equations on geometric graphs*. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005, 272 p. (in Russian)
4. Borovskikh A.V., Mustafokulov R., Lazarev K.P. Pokornyi Yu.V. A class of fourth-order differential equations on spatial networks. *Doklady Akademii nauk*, 1995, vol. 345, no. 6, pp. 730–732. (in Russian)
5. Kiik J.C., Kurasov P., Usman M. On vertex conditions for elastic systems. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2015, vol. 379, no. 34-35, pp. 1871–1876. doi: 10.1016/j.physleta.2015.05.017
6. Dudin M., Mikhailovsky M., Sadovoy M., Pinchuk D., Fomichev N. Idiopathic scoliosis: who is to blame and what to do?. *Journal of Spine Surgery*, 2014, no. 2, pp. 8–20. (in Russian)
7. Popov I., Lisitsa N., Baloshin Y., Dudin M., Bober S. Variational model of scoliosis. *Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, vol. 45, no. 2, pp. 167–175. doi: 10.2298/TAM170818012P
8. *Scoliosis X-ray stock photo. Image of cauda, health, chiropractic* — 21752394. Available at: <https://www.dreamstime.com/21752394>

- dreamstime.com/stock-images-scoliosis-ray-image21752394, свободный. Яз. англ. (дата обращения: 28.06.2019).
9. Popov A.I., Popov I.Y., Baloshin Y.A., Kobylenko D.M., Dudin M.G. Modeling of vertebral system by the nudged elastic band method // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1978. P. 140010. doi: 10.1063/1.5043790
  10. Maurel N., Lavaste F., Skalli W. A three-dimensional parameterized finite element model of the lower cervical spine: study of the influence of the posterior articular facets // *Journal of Biomechanics*. 1997. V. 30. N 9. P. 921–931. doi: 10.1016/S0021-9290(97)00056-0
  11. Greaves C.Y., Gadala M.S., Oxland T.R. A three-dimensional finite element model of the cervical spine with spinal cord: an investigation of three injury mechanisms // *Annals of Biomedical Engineering*. 2008. V. 36. N 3. P. 396–405. doi: 10.1007/s10439-008-9440-0
  12. Lafage V., Dubousset J., Lavaste F., Skalli W. 3D finite element simulation of cotrel - dubousset correction // *Computer Aided Surgery*. 2004. V. 9. N 42006. P. 17–25. doi: 10.3109/10929080400006390
  13. Dudgeon E., Stratton E., Bowden A., Howell L. Spinal implant development, modeling, and testing to achieve customizable and nonlinear stiffness // *Journal of Medical Devices, Transactions of the ASME*. 2012. V. 6. N 2. P. 021010. doi: 10.1115/1.4006543
  14. Ledoux Y., Ramos A., Mesnard M. Optimizing the architecture of a dynamic spinal implant for customized mechanical behavior // *Procedia CIRP*. 2017. V. 65. P. 273–278. doi: 10.1016/j.procir.2017.04.056
  15. Monède-Hocquard L., Mesnard M., Ramos A., Gille O. Selection of polymer material in the design optimization of a new dynamic spinal implant // *Advances in Biomechanics and Applications*. 2015. V. 2. N 1. P. 41–52.

#### Авторы

**Кабанова Екатерина Владимировна** — студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-0142-8426, catherine.kabanova@yandex.ru

**Балашин Юрий Александрович** — доктор технических наук, профессор, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 6603546178, ORCID ID: 0000-0003-0076-9402, yabaloshin@itmo.ru

**Попов Игорь Юрьевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 56277722500, ORCID ID: 0000-0002-5251-5327, iypopov@itmo.ru

**Дудин Михаил Георгиевич** — доктор медицинских наук, профессор, профессор, Восстановительный центр детской ортопедии и травматологии «Огонек», Санкт-Петербург, 198903, Российская Федерация, Scopus ID: 6602315478, ORCID ID: 0000-0002-6735-6947, ogonek@zdrav.spb.ru

#### Authors

**Ekaterina V. Kabanova** — Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-0142-8426, catherine.kabanova@yandex.ru

**Yuri A. Baloshin** — D.Sc., Professor, Scientific Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 6603546178, ORCID ID: 0000-0003-0076-9402, yabaloshin@itmo.ru

**Igor Yu. Popov** — D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 56277722500, ORCID ID: 0000-0002-5251-5327, iypopov@itmo.ru

**Mikhail G. Dudin** — D.Sc., Full Professor, Children’s Rehabilitation Center of Orthopedics and Traumatology “Ogonyok”, Saint Petersburg, 198903, Russian Federation, Scopus ID: 6602315478, ORCID ID: 0000-0002-6735-6947, ogonek@zdrav.spb.ru