

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-193-205

УДК 532.529

Использование векторизованных структур данных при реализации вычислительных алгоритмов решения задач механики сплошной среды

Никита Александрович Брыков¹, Константин Николаевич Волков²✉,
 Владислав Николаевич Емельянов³

^{1,2,3} Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация

¹ brykovna@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>

² k.volkov@kingston.ac.uk✉, <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>

³ vlademelyanov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>

Аннотация

Предмет исследования. В работе выполнено исследование возможностей, предоставляемых новыми информационными технологиями, средствами объектно-ориентированного программирования и современными операционными системами, для решения краевых задач механики сплошной среды, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Для дискретизации основных уравнений применены методы конечных разностей и конечных объемов. Рассмотрена реализация данных методов с векторизованными сеточными структурами, включая обращение к внутренним и граничным ячейкам сетки, а также особенности реализации алгоритмов в особых точках расчетной области. **Метод.** Для решения краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, разработан подход к построению векторизованных алгоритмов и рассмотрены особенности их программной реализации в пакете MATLAB с использованием средств пользовательского программирования. Векторизация в таких задачах, для исключения вложенных циклов, обеспечена за счет организации данных и использования векторизованных операций обращения к сеточным узлам. Разработанные алгоритмы, с одной стороны, широко используют функции MATLAB, предназначенные для обработки векторов и разреженных матриц, а с другой, отличаются высокой эффективностью и скоростью счета. **Основные результаты.** Проведено численное решение ряда задач механики сплошной среды, связанных с расчетами напряжений в твердом теле, а также поля скорости и температуры в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Показаны особенности дискретизации основных уравнений и реализации конечно-разностных и конечно-объемных алгоритмов. **Практическая значимость.** Применение системы MATLAB открыло широкие возможности по формализации и реализации конечно-разностных и конечно-объемных методов численного решения краевых задач механики сплошной среды. Несмотря на то, что возможности разработанных алгоритмов иллюстрируются на примере решения достаточно простых задач, они допускают сравнительно простое обобщение на более сложные задачи, например решение уравнений Эйлера и Навье–Стокса. В рамках работы подготовлены расчетные модули, реализованные при помощи средств пользовательского программирования, которые расширяют возможности пакета MATLAB и ориентированы на решение задач механики сплошной среды.

Ключевые слова

математическое моделирование, векторизация, численный алгоритм, механика сплошной среды

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00657, <https://rscf.ru/project/21-19-00657/>.

Ссылка для цитирования: Брыков Н.А., Волков К.Н., Емельянов В.Н. Использование векторизованных структур данных при реализации вычислительных алгоритмов решения задач механики сплошной среды // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 1. С. 193–205. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-193-205

Vectorized numerical algorithms for the solution of continuum mechanics problems

Nikita A. Brykov¹, Konstantin N. Volkov²✉, Vladislav N. Emelyanov³

^{1,2,3} Baltic State Technical University “VOENMEH” named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation

¹ brykovna@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>

² k.volkov@kingston.ac.uk✉, <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>

³ vlademelyanov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>

Abstract

The aim of the work is to study the possibilities provided by new information technologies, object-oriented programming tools and modern operating systems for solving boundary value problems of continuum mechanics described by partial differential equations. To discretize the basic equations, we applied the method of finite differences and finite volumes, which are widely used to solve problems in the mechanics of liquids and gases. The paper considers the implementation of the finite difference methods and the finite volume method with vectorized grid structures, including access to the inner and boundary cells of the grid, as well as the features of the implementation of algorithms at singular points of the computational domain. To solve boundary value problems described by partial differential equations, we developed an approach to the construction of vectorized algorithms and considered the features of their software implementation in the MATLAB package. Vectorization in such tasks, excluding nested loops, is ensured by appropriate data organization and the use of vectorized operations. On the one hand, the developed algorithms widely use MATLAB functions designed for processing vectors and sparse matrices, and on the other hand, they are distinguished by high efficiency and computation speed, comparable to those of programs written in C/C++. The main results imply the numerical solution of a number of problems in continuum mechanics associated with the calculation of stresses in a separate body and the calculation of the field of velocity and temperature in the flow of a viscous incompressible fluid. The features of discretization of the basic equations and the implementation of the corresponding finite-difference and finite-volume algorithms are shown. The use of the MATLAB system opens up new possibilities for the formalization and implementation of finite-difference and finite-volume methods for the numerical solution of boundary value problems in continuum mechanics. Despite the fact that the capabilities of the developed algorithms are illustrated by the example of solving fairly simple problems, they admit a relatively simple generalization to more complex problems, for example, solving the Euler equations and Navier–Stokes equations. As part of the work, computational modules were prepared with user programming tools that expand the capabilities of the package and are focused on solving problems in continuum mechanics.

Keywords

mathematical modeling, vectorization, numerical algorithm, mechanics of continuum medium

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-19-00657), <https://rscf.ru/en/project/21-19-00657/>.

For citation: Brykov N.A., Volkov K.N., Emelyanov V.N. Vectorized numerical algorithms for the solution of continuum mechanics problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 193–205 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-193-205

Введение

Современные системы вычислительного моделирования представлены достаточно сложными программными комплексами, оформленными в виде пакетов прикладных программ. Исследование и моделирование мультифизических процессов в технологических системах неразрывно связано с использованием подобных технологий. Важными оказываются вопросы создания моделей и алгоритмов для выполнения многовариантного анализа различных конструкций на этапах поисковых исследований, в которых важную роль играет оперативность получения результата. При этом значительная часть вычислительных ресурсов при решении задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, используется на решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В частности, в отечественном пакете вычислительной газовой динамики ЛОГОС на решение СЛАУ расходуется от 40 % времени расчета задачи [1, 2]. Создание алгоритмов, повышающих эффективность решения СЛАУ — одно из основных направлений повышения производительности пакетов прикладных программ [3–5].

Векторизация вычислений — наиболее перспективный метод оптимизации, наряду с реализацией параллельных вычислительных алгоритмов. Векторизация представляет собой один из способов выполнения параллельных вычислений, при котором программа определенным образом модифицируется для выполнения нескольких однотипных операций одновременно. Такой подход потенциально приводит к значительному ускорению однотипных вычислений над большими массивами данных [6].

Значительные возможности в рамках данного направления реализованы в среде MATLAB и родственных программах, в которых поддерживаются операции векторизации. Векторизация — стандартная часть эффективного использования MATLAB. При этом в MATLAB реализован интерпретируемый язык, в связи с чем циклические конструкции, типичные для реализации многих сеточных методов, характеризуются весьма медленным исполнением. Для ускорения векторно-матричных вычислений в MATLAB реализованы функции для работы с векторами и матрицами, оптимизированные для конкретной архитектуры процессора. Современные языки программирования (например,

C++) также позволяют создавать векторизованные алгоритмы, эффективность которых проявляется при соответствующем аппаратном обеспечении.

Несмотря на многочисленные примеры решения задач механики сплошной среды при помощи средств MATLAB [7–18], включая генерацию сеток, реализацию конечно-элементных подходов, возможности векторизации вычислительных алгоритмов, связанные с решением дифференциальных уравнений в частных производных конечно-разностными и конечно-объемными методами, не получили достаточного внимания в научных работах. Применение неявных разностных схем в существенной степени усложняет реализацию алгоритмов. Для реализации численных подходов применяются в основном циклические конструкции, не позволяющие в полной мере воспользоваться векторизованными функциями низкого уровня, имеющимися в MATLAB. Векторизованные алгоритмы, предназначенные для решения задач сверхзвуковой газовой динамики конечно-объемными методами, основанными на решении задачи распада произвольного разрыва, обсуждаются в работах [6, 7].

В состав MATLAB входит пакет PDE Toolbox (Partial Differential Equation), который содержит средства для решения нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка при помощи метода конечных элементов. Команды и графический интерфейс пакета PDE Toolbox могут быть использованы для математического моделирования широкого класса инженерных и научных приложений (сопротивление материалов, электротехника, тепло-массоперенос, механика жидкости и газа). Однако при решении задач механики жидкости и газа конечно-элементный подход получил менее широкое распространение, чем метод конечных разностей или метод конечного объема. Во многих случаях требуются подходы, учитывающие структуру исходной системы уравнений, особенности формулировки граничных условий, сложную пространственно-временную зависимость правой части уравнения и вид расчетной области.

Применение Simulink, представляющей собой среду динамического междисциплинарного моделирования сложных технических систем и инструмент для модельно-ориентированного проектирования, также не решает проблемы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Соответствующие численные методы по-прежнему нуждаются в реализации при помощи имеющихся в распоряжении пользователя функций.

В данной работе рассмотрен один из возможных подходов к построению векторизованных алгоритмов для решения задач механики сплошной среды, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных различного вида. Реализация предложенного подхода позволяет заменить циклические конструкции операциями подстановок групп соответствующих сеточных узлов. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения ряда задач механики сплошной среды.

Векторизованные сеточные структуры

Тип дискретизации и используемый сеточный шаблон в значительной степени определяют свойства и особенности разностной схемы и вычислительной процедуры в целом (устойчивость, точность, время счета и другие показатели).

Сетка. Разностная сетка, покрывающая расчетную область, имеет структуру, схожую со структурой двумерного массива. Кроме избираемых данных в текущем узле, необходимо обеспечить адресацию к данным в соседних узлах, входящих в разностный шаблон. Традиционный способ адресации к ячейкам или узлам сетки состоит в указании двух индексов i и j , определяющих строку и столбец. Узел сетки с индексами (i, j) имеет соседей, к которым легко адресоваться, давая соответствующие приращения индексов. Указанный принцип адресации работает как для обозначения узлов сетки в методе конечных разностей, так и для обозначения ячеек в методе конечных объемов, причем такая адресация возможна и в физическом, и в вычислительном пространствах при использовании криволинейных сеток.

При программировании вычислительных задач работа с сеточными структурами обычно осуществляется при помощи перебора узлов сетки и реализации алгоритма на основе вложенных циклов. Данный подход подразумевает вычисление индексного выражения и занесение результатов вычислений в двумерный массив.

Векторизация позволяет работать со множеством данных как с единой вычислительной структурой, что не только делает компактным запись вычислительного алгоритма, избегая вложенных циклов, но и повышает эффективность вычислений.

Адресация к внутренним ячейкам. В задачах механики сплошной среды двумерным структурам данных соответствуют поля величин и координаты сеточных узлов при решении задачи в области прямоугольной формы или в криволинейной области, которую можно отобразить на вычислительный прямоугольник при помощи преобразования координат [19, 20].

Рассмотрим адресацию к внутренним ячейкам на примере L-образной расчетной сетки (рис. 1), где для наглядности принято малое число узлов. Адресация к данным в узлах состоит из указания двух индексов, определяющих строку и столбец.

При помощи одномерного массива можно указать определенный набор узлов расчетной области. Обозначим через \mathbf{C} вектор индексов всех внутренних узлов. При организации вычислительного алгоритма возникает необходимость конечно-разностного представления дифференциальных операторов, фигурирующих в уравнениях и граничных условиях. В этом случае необходимо обеспечить адресацию к данным в соседних узлах, входящих в вычислительный шаблон. С помощью вектора центральных ячеек найдем подмножество узлов, которые лежат: левее центральных ячеек — \mathbf{L} , правее — \mathbf{R} , ниже — \mathbf{D} , выше — \mathbf{U} , выше левее — \mathbf{UL} , выше правее — \mathbf{UR} , ниже левее — \mathbf{DL} и ниже правее — \mathbf{DR} (рис. 1). Номера соответствующих ячеек определим по следующим формулам:

$$L = C - N, R = C + N, D = C - 1, U = C + 1,$$

$$UL = C + 1 - N, UR = C + 1 + N, DL = C - 1 - N,$$

$$DR = C + 1 + N,$$

где N — количество узлов в столбце расчетной области.

Адресация к граничным ячейкам. В вычислительных алгоритмах, реализованных при помощи метода конечных разностей на разнесенной сетке или метода конечных объемов, обычно выделяются фиктивные граничные ячейки, образующие вместе с внутренними ячейками расширенную расчетную область. Способ адресации к фиктивным граничным ячейкам, вводимым для постановки граничных условий, показан на рис. 2, где p_1-p_6 — значения переменной в угловых точках. Построены индексные вектора **BL**, **BU**, **BR**, **BD** и для рассматриваемого случая **BRU** и **BUR**, соответствующие левой, нижней, верхним и правым границам области. Способ формирования этих векторов такой же, как и индексных векторов внутренних ячеек (угловые ячейки не используются).

Построение разностной схемы. Рассмотрим вопрос о векторизованном вычислении потоков на границах расчетных ячеек для двумерных задач, реализованных на структурированных сетках. В качестве объекта, которому соотносится поток, выбрана грань, разделяющая две соседние ячейки. Для вычисления потоков формируются два множества индексных векторов, адресуемых к ячейкам. Один вектор **pCFL** определяет множество всех ячеек, расположенных слева от боковых граней. Другой — **pCFR** обеспечивает операцию подстановочной адресации для множества всех правых ячеек. Индексный вектор множества правых ячеек определяется как $pCFR = pCFL + m$. Векторная операция вычисления потоков задается соотношением

$$F(pC) = F[U(pCFR), U(pCFL)].$$

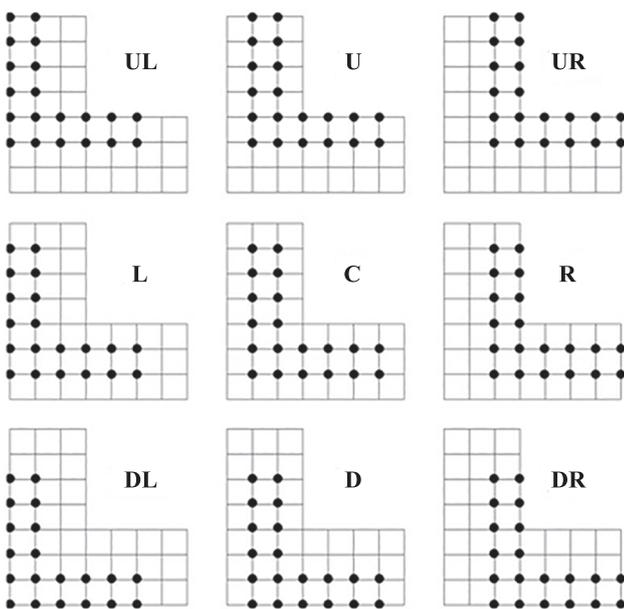


Рис. 1. Адресация к внутренним ячейкам
Fig. 1. Internal cells addressing

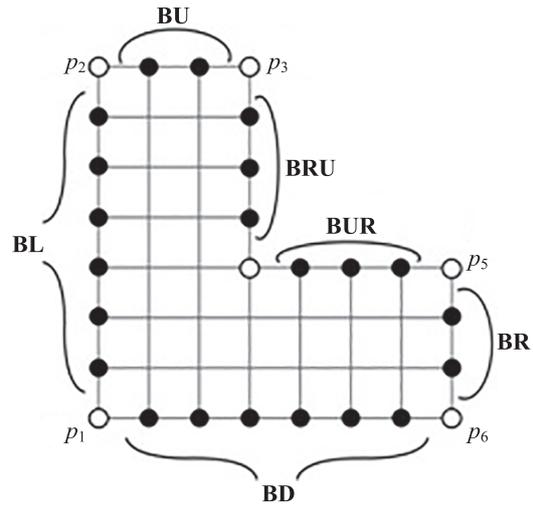


Рис. 2. Адресация к граничным ячейкам
Fig. 2. Boundary cells addressing

При такой организации данных можно записать векторизованные соотношения для каждой ячейки расчетной области. Для всех расчетных ячеек, определяемых индексным вектором pC , потоки через их левые грани определяются индексным вектором $pC - m$, а через правые грани — pC . Величина m представляет собой количество ячеек в столбце расширенной области ячеек и определяет сдвиг при переходе от двумерной матричной структуры к линейному размещению элементов.

Используя индексные представления сеточных структур, запишем одним векторизованным оператором разностную схему рассматриваемых уравнений. При этом нет необходимости использовать циклы, присущие традиционным разностным схемам, которые заменяются заполнением матрицы коэффициентов разностных уравнений, в которой каждая строка представляет сеточное уравнение и имеет высокую размерность, но при этом является существенно разреженной. Обращение этой матрицы дает решение задачи на следующем временном слое.

Решение системы разностных уравнений. Совокупность конечно-разностных уравнений и граничных условий, записанных в дискретной форме, представляет собой связанную СЛАУ для определения сеточных значений искомой функции в узлах расчетной области:

$$AU = B, \tag{1}$$

где A — матрица коэффициентов линейной системы уравнений; U — вектор-столбец неизвестных; B — вектор-столбец правых частей. Разреженная структура матрицы A в (1) позволяет реализовать компактные методы хранения ее компонент и использовать эффективные в вычислительном плане методы обращения.

Последовательно пронумеруем все точки расчетной области и занесем их номера в вектор-столбец pG . Точки, не входящие в расчетную область, тоже нумеруются, но их номера не заносятся в вектор pG . Для формирования вектора подстановок используем функцию $k = \text{find}(X)$, которая возвращает индексы ненулевых элементов матрицы X (если таких элементов нет,

то возвращается пустой вектор). При этом матрицу X рассмотрим, как вектор-столбец, образованный объединением столбцов исходной матрицы. Используя вектор подстановок pG , в матрицу G заносятся порядковые номера всех точек расчетной области. Элементы матрицы G , которые соответствуют точкам, не входящим в пределы области заданной формы, имеют нулевые значения.

Применяя аналогичный прием, сформируем вектора, содержащие номера граничных узлов. При этом функция $k = \text{find}(\text{«условие»})$ возвращает индексы элементов, удовлетворяющие заданному условию. Используем сквозную нумерацию граничных узлов, включая точки, находящиеся за пределами расчетной области. В результате при помощи простого слияния получим вектор подстановок pB , содержащий номера всех граничных точек.

На следующем шаге построим матрицу Gp , содержащую номера только внутренних узлов. Матрица Gp строится в два приема. Сначала, используя матрицу G и вектор подстановок pB , создадим промежуточную матрицу, содержащую номера только граничных узлов, остальные ее элементы считаем равными нулю. Окончательную структуру матрицы Gp получим путем простого вычитания и выполнения оператора присваивания.

Сформируем вектор подстановок pP , содержащий номера внутренних узлов расчетной области. Для его построения используем функцию $k = \text{find}(X)$. Для построения разностного шаблона, следуя векторному принципу построения вычислительного алгоритма, создаются массивы, содержащие номера узлов, используемые для построения разностного шаблона.

Перед тем как сформировать матрицу коэффициентов системы разностных уравнений, определим ее структуру. Для этого введем два целочисленных вектора $indI$ и $indJ$, задающие позиции элементов матрицы коэффициентов, а также вещественный вектор $valS$, определяющий числовые значения элементов этой матрицы.

Построим массивы $indI$, $indJ$ и $valS$ для граничных узлов, индексы которых хранятся в векторе подстановок pB . Используя операцию слияния векторов и алгоритм векторных подстановок, сформируем массивы $indI$, $indJ$ и $valS$ для внутренних узлов при соблюдении последовательности обхода узлов разностного шаблона. Элементы вектора $valS$ находятся в соответствии с используемой разностной схемой.

Вектор правых частей B построим отдельно для внутренних и граничных узлов. Элементы $B(pP)$, связанные с внутренними узлами, приравняем к правой части решаемого уравнения, которую для простоты примем равной единице. Для задания значений элементам $B(pB)$, относящихся к граничным узлам, используем соответствующие граничные условия.

Сформированные данные применим для построения матрицы СЛАУ и ее решения прямым методом. Функция $\text{sparse}(i, j, s)$ сформирует матрицу в соответствии с правилами записи разреженных матриц, принятыми в системе MATLAB. При вызове этой функции строки массива $[i \ j \ s]$ используются для фор-

мирования разреженной матрицы размерности $m \times n$, где $m = \text{max}(i)$ и $n = \text{max}(j)$. Вектора i и j задают позиции элементов и являются целочисленными, а вектор s определяет числовое значение элемента матрицы. При формировании разреженной матрицы все строки вида $[i \ j \ 0]$ из описания удаляются. Длина вектора s совпадает с количеством ненулевых элементов разреженной матрицы.

Примеры применения векторизованных алгоритмов

Возможности разработанных средств численного моделирования показаны на примере решения ряда задач механики сплошной среды.

Задача о концентрации напряжений в трещинах конструкции. При эксплуатации различных конструкций появляются дефекты в виде трещин, которые образуются в результате изменения прочностных характеристик, вызванных со старением материала. Появление трещин вследствие действия на их внутреннюю поверхность различных факторов (например, высокого давления) приводит к возникновению концентрации напряжений в материале в области вершины трещины и ее разрастанию. Образование трещин в приповерхностном слое может привести к разрушению конструкции. Моделирование напряженно-деформированного состояния, возникающего в результате действия неравномерно распределенного давления внутри дефекта конструкции, представляет практический интерес для прогнозирования нештатных ситуаций.

Рассмотрим двумерную статическую задачу теории упругости, связанную с определением напряжений в плоской пластине с продольным разрезом. На пластину действуют внешние нагрузки, приложенные к двум противоположным сторонам так, что нормальная компонента напряжения поперек пластины равна нулю. В этом случае пластина находится в плоском напряженном состоянии. Решение задачи о плоском напряженном состоянии в координатах x и y сводится к определению напряжений σ_x , σ_y , (нормальные компоненты) и τ_{xy} (тангенциальные компоненты), которые удовлетворяют условиям равновесия, граничным условиям и условиям совместности для напряжений.

Задача о плоском напряженном состоянии в координатах x и y может быть сведена к решению бигармонического уравнения для функции напряжения Эри [21]

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (2)$$

Функция φ вводится таким образом, чтобы $\tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y$.

Уравнение (2) позволяет определить распределение напряжений в сплошном теле. Известно решение классической задачи для трещины в безграничной среде при ее равномерном растяжении. Для плоской задачи теории упругости выражения для полей напряжений рассмотрены в работе [21]. В том случае, когда среда находится в произвольном плоском напряженном состоянии, а берега трещины нагружены напряжениями

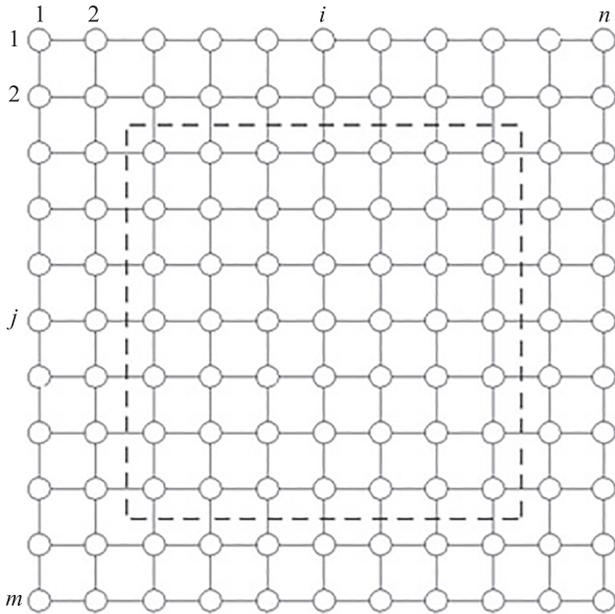


Рис. 3. Расчетная область и сетка для пластины без разреза
Fig. 3. Computational domain and grid for a plate without cut

неравномерного распределения, задача решается численно. Для численного решения уравнения (2) воспользуемся методом конечных разностей.

Рассмотрим пластину без центрального разреза (рис. 3).

Внутренние узлы. Составим разностный шаблон для внутренних узлов сетки, лежащих в области, ограниченной штриховой линией. Выберем любую точку внутри выделенной области и примем ее за центральную. Соответствующим образом обозначим соседние точки (рис. 4, а). Тогда запишем в виде конечных разностей производные, входящие в уравнение (2), используя обозначения для узлов $RR, R, C, L, LL, DD, D, U, UU, UL, UR, DL, DR$. В результате получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4}(\varphi_{RR} - 4\varphi_R + 6\varphi_C - 4\varphi_L + \varphi_{LL});$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4}(\varphi_{DD} - 4\varphi_D + 6\varphi_C - 4\varphi_U + \varphi_{UU});$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^4}(\varphi_{UL} - 2\varphi_U + \varphi_{UR} - 2\varphi_R + 4\varphi_C - 2\varphi_L + \varphi_{DL} - 2\varphi_D + \varphi_{DR}),$$

где h — шаг сетки.

В разностном виде уравнение (2) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \\ & = \frac{1}{h^4}(\varphi_{RR} - 8\varphi_R + 20\varphi_C - 8\varphi_L + \varphi_{LL} + \varphi_{DD} - \\ & - 8\varphi_D - 8\varphi_U + \varphi_{UU} + 2\varphi_{UL} + 2\varphi_{UR} + 2\varphi_{DL} + 2\varphi_{DR}). \end{aligned}$$

Разностный шаблон для внутренних узлов сетки показан на рис. 4, б.

Граничные узлы. В узлах сетки, лежащих вне обозначенной области на рис. 3, зададим граничные условия. Первое граничное условие на левой и правой границах — равенство нулю нормальных напряжений, которое запишем в виде:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}(\varphi_D - 2\varphi_C + \varphi_U) = 0.$$

На верхней и нижней границах зададим напряжение, растягивающее пластину. Запишем для узлов на этих границах разностное представление производной:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(\varphi_R - 2\varphi_C + \varphi_L).$$

Второе граничное условие — равенство нулю касательных напряжений имеет вид

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Составим разностный шаблон с учетом данного граничного условия (рис. 5, а). Выберем на нижней границе точку и примем ее за центральную. Для пред-

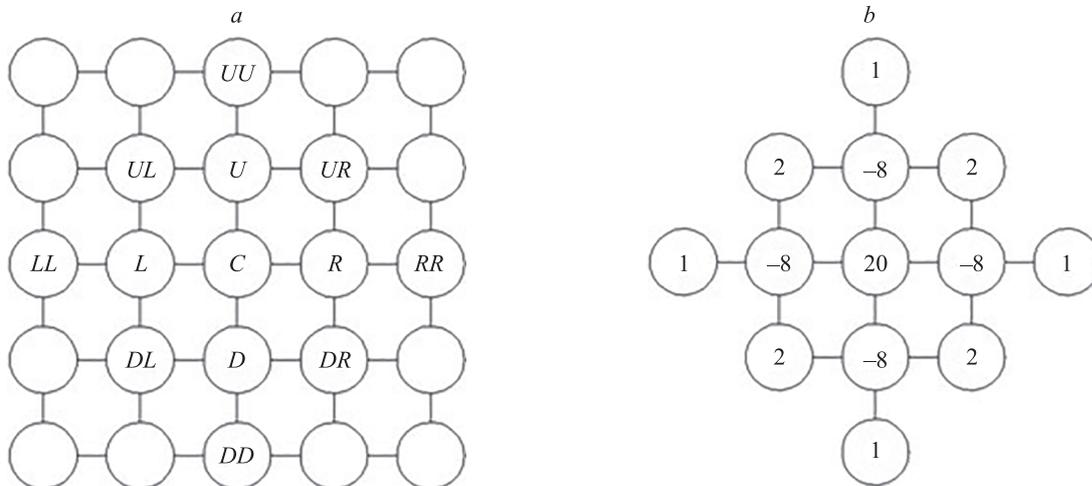


Рис. 4. Внутренние узлы (а) и коэффициенты разностного шаблона (б) сетки
Fig. 4. Internal grid nodes (а) and coefficients of the finite-difference template (б)

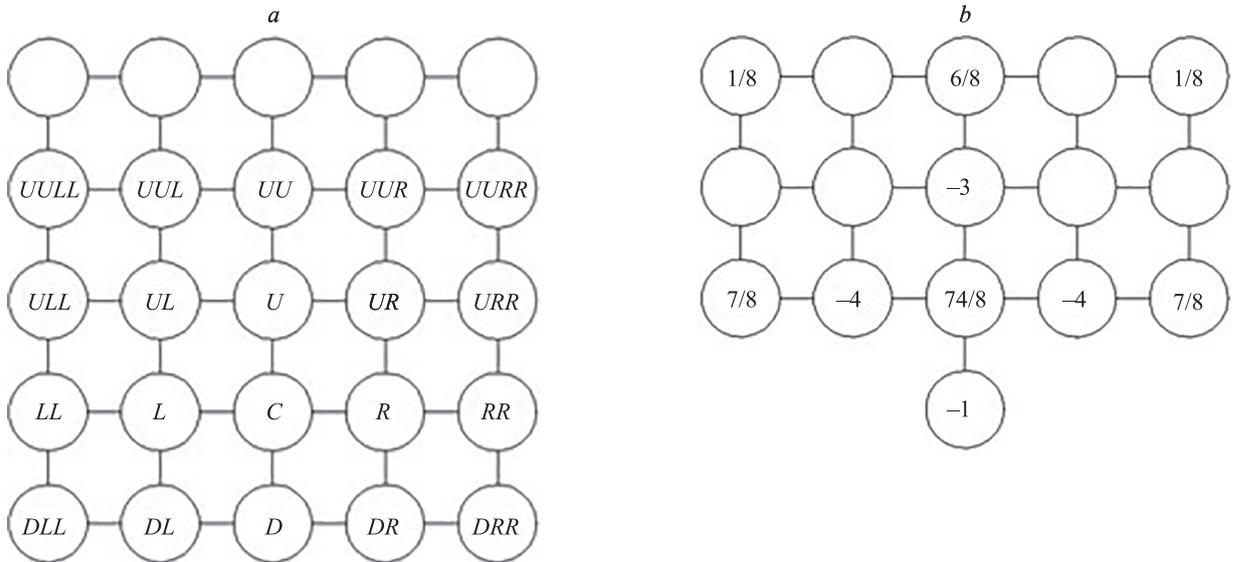


Рис. 5. Граничные узлы (а) и коэффициенты разностного шаблона (b) сетки
 Fig. 5. Boundary grid nodes (a) and coefficients of the finite-difference template (b)

ставления производных, входящих в уравнение (2), в граничных узлах использованы односторонние конечно-разностные соотношения. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} \left(-\varphi_D + \frac{74}{8} \varphi_C - 3\varphi_U + \frac{6}{8} \varphi_{UU} + \frac{7}{8} \varphi_{LL} + \frac{1}{8} \varphi_{UULL} + \frac{7}{8} \varphi_{RR} + \frac{1}{8} \varphi_{UURR} - 4\varphi_L - 4\varphi_R \right).$$

Разностный шаблон на граничных узлах сетки показан на рис. 5, b.

Угловые точки. Разностный шаблон для приугловых точек рассмотрим на примере правой нижней приугловой точки (рис. 6, a). Используя односторонние конеч-

но-разностные формулы и граничные условия, запишем уравнение (2) в виде:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} \left(-\frac{63}{8} \varphi_C + \varphi_D + 6\varphi_U - \frac{33}{8} \varphi_{UU} + \varphi_{UUU} + \varphi_L + 6\varphi_R - \frac{33}{8} \varphi_{RR} + \frac{1}{8} \varphi_{UURR} + \varphi_{RRR} \right).$$

Разностный шаблон для угловых точек приведен на рис. 6, b. В крайних угловых точках задано определенное значение функции Эри (в данном случае нулевое). Это значение произвольно, и решение задачи о нахождении распределения напряжений в пластине не зависит от него.

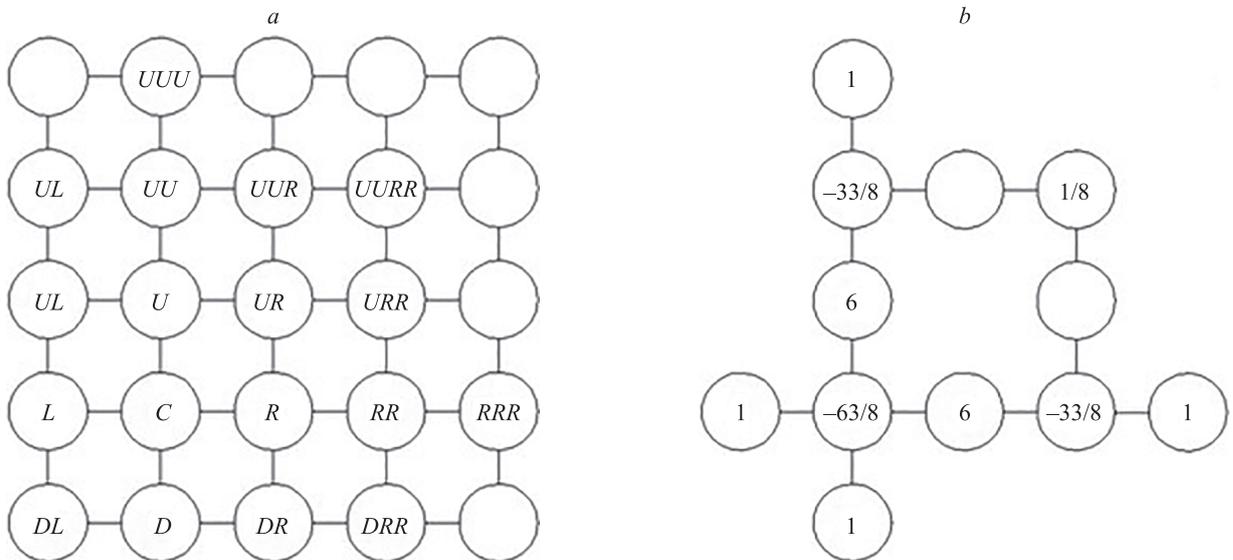


Рис. 6. Угловые узлы (а) и коэффициенты разностного шаблона (b) сетки
 Fig. 6. Corner grid nodes (a) and coefficients of the finite-difference template (b)

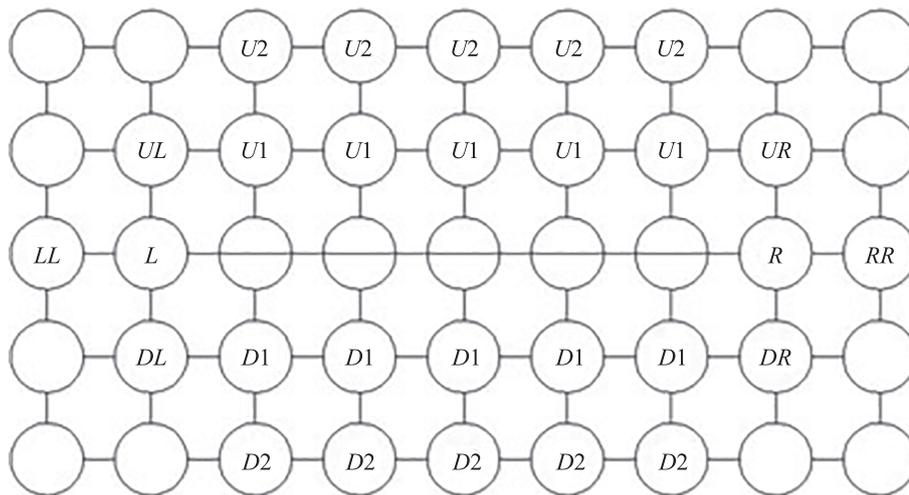


Рис. 7. Расчетная область и сетка для пластины с разрезом
 Fig. 7. Computational domain and grid for a plate with cut

Поперечный разрез. Введем в рассмотрение поперечный разрез в пластине, расположенный параллельно нагруженным сторонам (рис. 7). Верхний берег разреза разместим в массиве основных узлов сетки, а для нижнего берега выделим дополнительный массив. Наличие разреза приводит к возникновению точек в его окрестности, для которых необходимо построить особые разностные шаблоны. Выделим следующие точки в окрестности массива: $U1$ и $D1$ — точки, непосредственно прилегающие к верхнему и нижнему берегам разреза; $U2$ и $D2$ — внешние точки разреза; L и R — левые и правые точки разреза; LL и RR — крайние левые и правые точки разреза; UL , UR , DL , DR — угловые точки разреза.

Разностный шаблон для точек $U2$, $D2$, UL , UR , DL , DR аналогичен для внутренних точек при условии, что

для точек, относящихся к нижнему берегу разреза, значения для функции Эри выбраны из дополнительного массива. Учтем данное условие при формировании индексных массивов.

Составим разностный шаблон для левых и правых узлов (рис. 8, а). Уравнение (2) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} (\varphi_{DD} + \varphi_{UU} - 8\varphi_D + \frac{25}{12}\varphi_C - 8\varphi_U + 2\varphi_{UL} + 2\varphi_{UR} + \frac{92}{12}\varphi_R - \frac{42}{12}\varphi_{RR} + 2\varphi_{DL} + 2\varphi_{DR} - \frac{4}{12}\varphi_{RRR} + \frac{1}{12}\varphi_{RRRR}).$$

Приведем разностный шаблон для узлов сетки в зависимости от разреза (рис. 8, b).

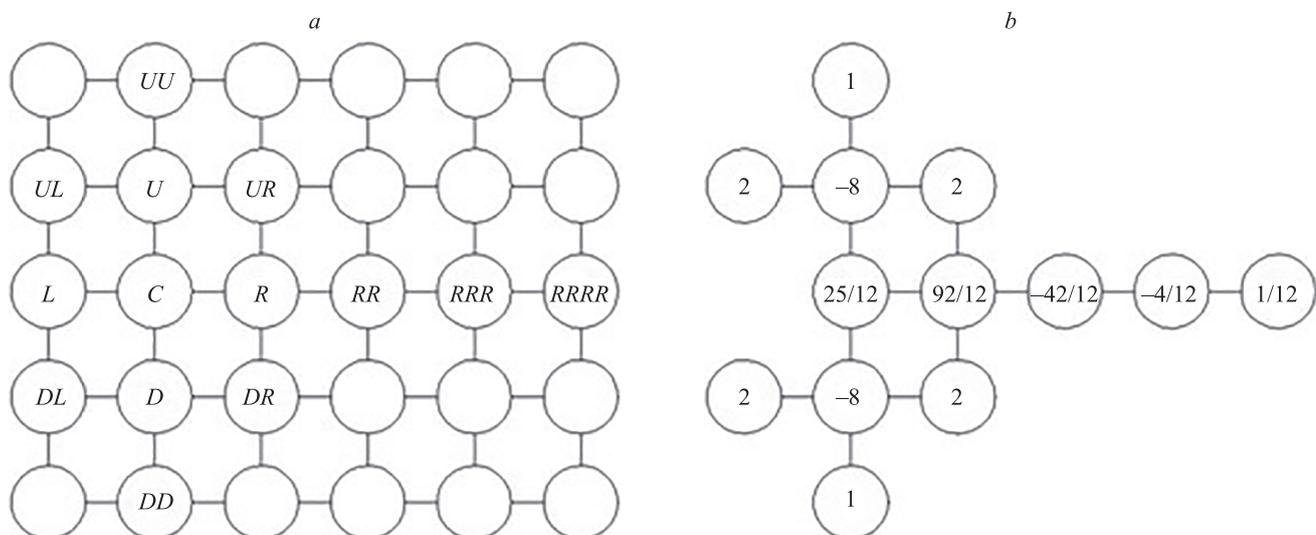


Рис. 8. Правые узлы от разреза (а) и коэффициенты разностного шаблона сетки (b)
 Fig. 8. Right grid nodes from cut (a) and coefficients of the finite-difference template (b)

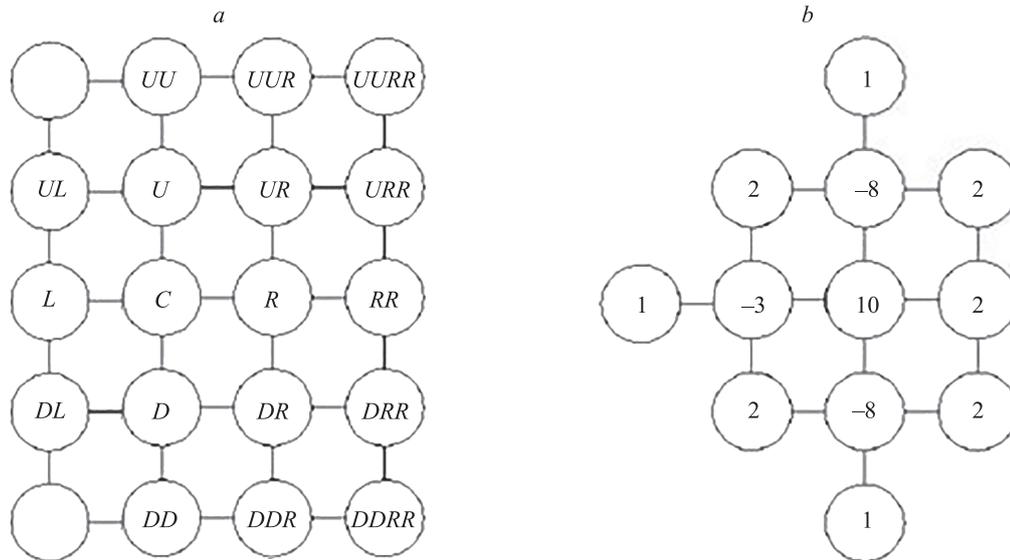


Рис. 9. Крайние правые узлы сетки от поперечного разреза (a) и коэффициенты разностного шаблона (b)
 Fig. 9. Last in a row right grid nodes from transverse cut (a) and coefficients of the finite-difference template (b)

Рассмотрим разностный шаблон для крайних левых и крайних правых узлов. В частности, в узле 4R (рис. 9, a), уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} (-4\varphi_{RR} + 2\varphi_R + 10\varphi_C - 3\varphi_L + \varphi_{DD} - 8\varphi_D - 8\varphi_U + \varphi_{UU} + 2\varphi_{UL} + 2\varphi_{UR} + 2\varphi_{DL} + 2\varphi_{DR}).$$

Разностный шаблон для крайних правых узлов сетки показан на рис. 9, b.

Зададим условия равенства нулю: на верхнем и нижнем берегах разреза для нормального напряжения и для разностного шаблона (точки U1 и D1) для касательных напряжений.

Система разностных уравнений. Запишем разностную аппроксимацию для каждой точки, тогда диф-

ференциальное уравнение можно заменить системой алгебраических уравнений (1). Для нахождения вектора неизвестных умножим (1) справа на матрицу, обратную \mathbf{A} , и получим $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

В качестве входных данных используем следующие значения: размер пластины $1 \times 1 \text{ м}^2$; длина центрального разреза — 0,2 м. Нагрузим пластину постоянным напряжением по длине краев, а также зададим квадратичный закон распределения напряжения. Применим квадратичное распределение при решении задачи без центрального разреза для проверки работоспособности алгоритма.

На рис. 10, a приведено распределение напряжения на краях пластины, которое задано при решении задачи с пластиной без центрального разреза (изображение симметрично относительно оси ординат), поэтому показана половина графика). В результате расчета получим распределение нормальных напряжений в пластине (рис. 10, b).

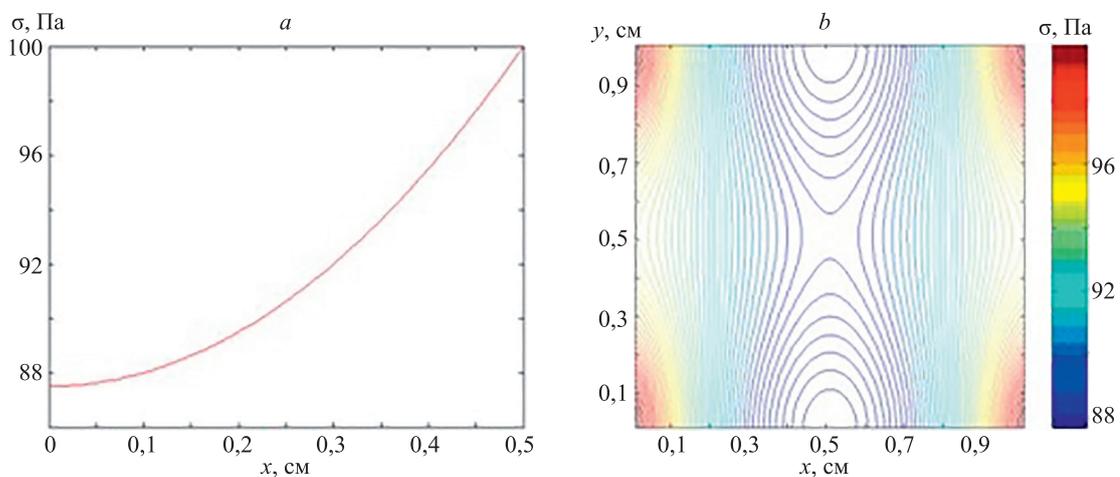


Рис. 10. Распределение напряжения на краях пластины (a) и изолинии нормальных напряжений (b)
 Fig. 10. Stress distributions on plate edges (a) and contours of normal stresses (b)

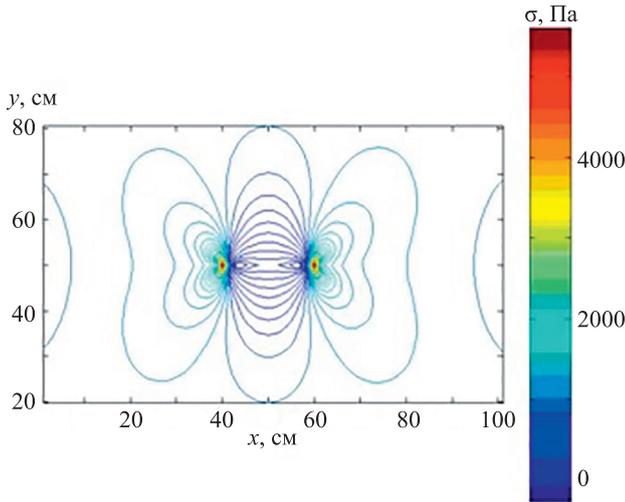


Рис. 11. Изолинии нормальных напряжений
Fig. 11. Contours of normal stresses

Данный метод можно применить к известной задаче о нагружении пластины с разрезом. Учет разреза и определение напряжений в угловых точках удобно реализовать с помощью векторизованного алгоритма. На рис. 11 показан результат решения, где максимум нормальных напряжений приходится на угловые точки разреза. В данном случае к пластине применена постоянная нагрузка.

Задача о свободной конвекции с внутренним источником тепла. Процесс конвекции определяется основными законами сохранения массы, количества движения и энергии. Особенности задачи конвекции проявляются в конкретизации сил и потоков, входящих в основные уравнения системы, а также в особенностях постановки граничных условий. В общем случае для однокомпонентной среды свободная конвекция описывается системой уравнений вязкой несжимаемой жидкости. Используя допущения модели Буссинеска о свободной конвекции, решение задачи свободноконвективного течения в переменных «функция тока ψ — вихрь скорости ω » имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \beta g \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q}{\rho c}, \quad (5)$$

где t — время; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; β — коэффициент объемного расширения; g — ускорение свободного падения; T — температура; a — температуропроводность; q — внутренний источник тепла; c — теплоемкость.

Уравнения (3)–(5) записаны для случая несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), что является следствием предположения Буссинеска о том, что изменение плотности учитывается только в выражении для гравитационной силы. Особенность системы — наличие внутрен-

него источника тепла q , влияние которого определяет не только параметры конвективного течения, но и изменение физических характеристик среды (зависимость вязкости от температуры).

Задача решается методом конечных разностей, используя возможности построения векторизованных алгоритмов и работой с разреженными матрицами в среде MATLAB. В качестве примера построим разностную схему для уравнения функции тока (2). Используя центрированные конечные разности 2-го порядка, получим

$$\psi_L + \psi_R + \frac{h_x^2}{h_y^2} (\psi_U + \psi_D) - 2 \left(1 + \frac{h_x^2}{h_y^2} \right) \psi_C - \omega_C = 0,$$

где h_x и h_y — шаги сетки в координатных направлениях x и y .

На рис. 12 представлены результаты моделирования свободной конвекции с внутренним источником тепла. На рис. 12, *a* показана структура матрицы коэффициентов размером 20×20 , которая имеет 325 нулевых элементов, на рис. 12, *b* — поле температуры.

Задача о тепловом состоянии пластины. Рассмотрим задачу оценки нестационарного теплового состояния L-образной пластины при ее локальном нагреве. Часть энергии, которая поступает в определенную область пластины, за счет теплопередачи передается в соседние ячейки, а часть может излучаться от задней стенки области. Математическая модель сводится к уравнению двумерной нестационарной теплопроводности с добавлением в правую часть двух источников членов, один из которых учитывает энергоподвод, а другой — потери системой тепла за счет излучения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q}{\rho c \delta} - \frac{\sigma \varepsilon}{\rho c \delta} T^4, \quad (6)$$

где δ — толщина пластины; σ — постоянная Стефана–Больцмана; ε — степень черноты пластины.

В векторизованном алгоритме установим множества: всех центральных узлов сетки; левых, правых, нижних и верхних узлов; граничных узлов. Для дискретизации уравнения (6) по времени применим неявную схему:

$$\frac{T_C^{n+1} - T_C^n}{\tau} = a \left(\frac{T_L^{n+1} - 2T_C^{n+1} + T_R^{n+1}}{h_x^2} \right) + a \left(\frac{T_U^{n+1} - 2T_C^{n+1} + T_D^{n+1}}{h_y^2} \right) + \frac{q}{\rho c \delta} - \frac{\sigma \varepsilon}{\rho c \delta} (T^{(n+1)})^4,$$

где n — индекс по времени.

Во многих случаях в нестационарных системах в условиях интенсивного нагрева зависимость теплопроводности от температуры пренебречь нельзя. В этом случае добавим фактор нелинейности. Разностная схема для уравнения (6) имеет вид

$$(\rho c)_C \frac{T_C^{n+1} - T_C^n}{\tau} = \left[\frac{\lambda_R + \lambda_C}{2} \frac{T_R^{n+1} - T_C^{n+1}}{h_x^2} - \frac{\lambda_C + \lambda_L}{2} \frac{T_C^{n+1} - T_L^{n+1}}{h_x^2} \right] +$$

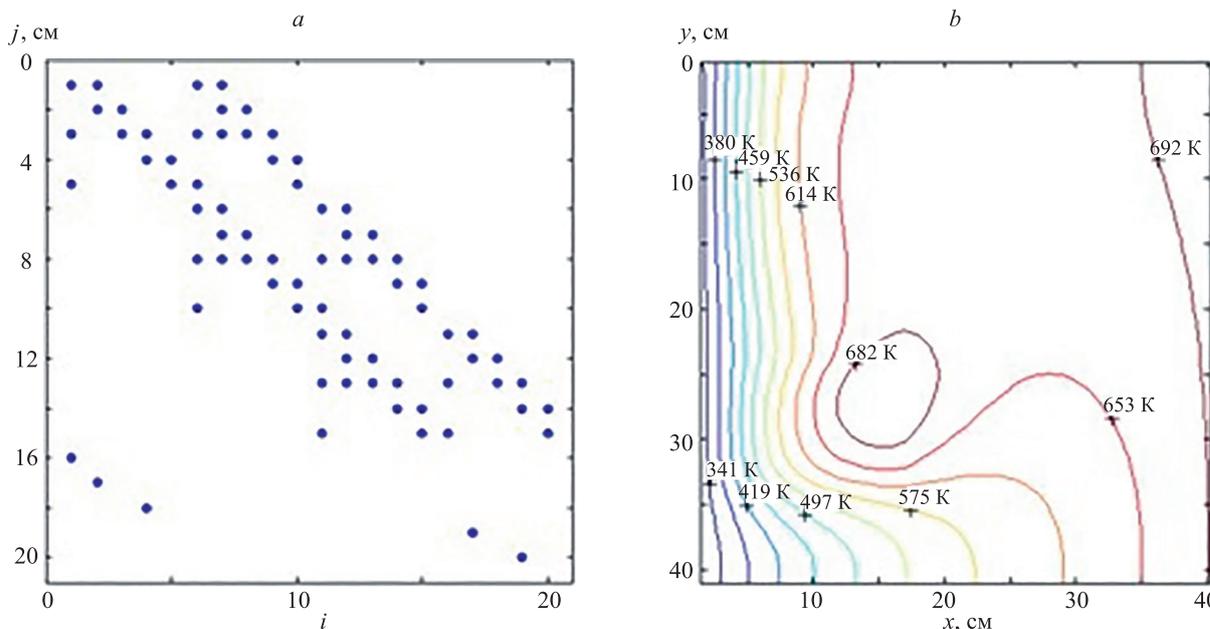


Рис. 12. Матрица коэффициентов (a) и поле температуры (b)
 Fig. 12. Matrix of coefficients (a) and contours of temperature (b)

$$+ \left[\frac{\lambda_U + \lambda_C T_U^{n+1} - T_C^{n+1}}{2 h_y^2} - \frac{\lambda_C + \lambda_D T_C^{n+1} - T_D^{n+1}}{2 h_y^2} \right] + \frac{q}{\delta} - \frac{\sigma \epsilon}{\delta} (T^{(n+1)})^4,$$

где λ — коэффициент теплопроводности.
 В неявную разностную схему добавим излучение членом правой части, имеющим сомножителем температуру в четвертой степени. Неявное включение

данного члена вводит еще один фактор существенной нелинейности. Проведем линеаризацию этого члена по Ньютону, получим следующее представление этого соотношения

$$(T^{(n+1)})^4 = (T^n)^4 + \frac{\partial T^4}{\partial t} \tau = (T^n)^4 + \frac{\partial T^4}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \tau = (T^n)^4 + 4(T^n)^3(T^{n+1} - T^n) = 4(T^n)^3 T^{n+1} - 3(T^n)^4.$$

На рис. 13 представлен результат решения уравнения в фиксированный безразмерный момент времени.

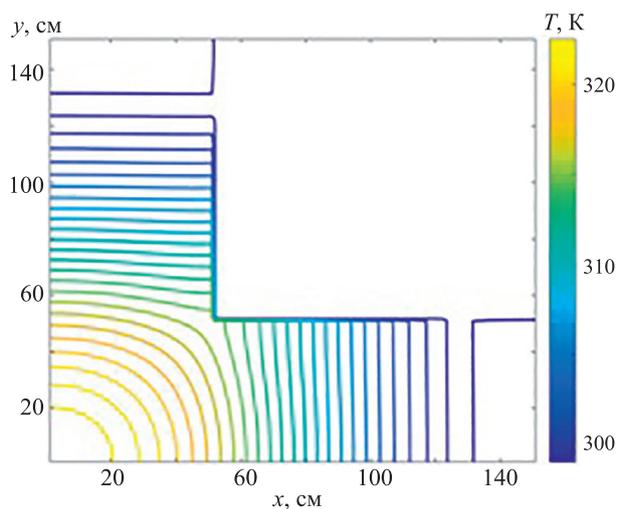


Рис. 13. Температурное поле системы в безразмерный момент времени 180
 Fig. 13. Contours of temperature at dimensionless time 180

Заключение

Разработан подход к построению и реализации векторизованных алгоритмов решения задач механики сплошной среды. В качестве конкретных примеров рассмотрены задачи о: свободной конвекции с внутренним источником тепла; концентрации напряжений в трещинах конструкции; тепловом состоянии пластины.

Разработанные алгоритмы применимы для решения более сложных задач механики сплошной среды, к числу которых относятся задачи построения криволинейных сеток для областей сложной геометрической конфигурации, а также механики жидкости и газа, описываемые уравнениями Эйлера и Навье–Стокса.

Созданные программные средства могут быть привлечены для поддержки научных исследований в различных областях, где применяются методы математического моделирования.

Литература

References

1. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Глазунов В.А., Голубев А.А., Денисова О.В., Лашкин С.В., Жучков Р.Н., Тарасова Н.В., Сизова М.А. Многофункциональный пакет программ LOGOS для расчета задач гидродинамики и теплопереноса на суперЭВМ. Базовые технологии и алгоритмы // Труды XII Международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование», 11–15 октября 2010 г., Саров. Саров, 2010. С. 215–230.
2. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Смирнов П.Г., Тетерина И.В. Реализация параллельных вычислений на графических процессорах в пакете вычислительной газовой динамики LOGOS // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. № 1. С. 334–342.
3. Emelyanov V.N., Brykov N.A., Efremov A.V. Application of vectorized algorithms for solving problems of continuum mechanics // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 2094. P. 022047. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2094/2/022047>
4. Емельянов В.Н. Механика сплошной среды: теория напряжений и основные модели. М.: Юрайт, 2018. 162 с.
5. Емельянов В.Н. Численные методы: введение в теорию разностных схем. М.: Изд-во Юрайт, 2018. 188 с.
6. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. М.: БИНОМ, 2010. 423 с.
7. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Применение пакета MATLAB для решения краевых задач механики жидкости и газа // Труды всероссийской научной конференции «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB» (25–26 мая 2004, Москва, Россия). М.: Изд-во ИПУ РАН, 2004. С. 92–115.
8. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Реализация векторизованных конечно-разностных алгоритмов решения краевых задач механики жидкости и газа в пакете MATLAB // Вычислительные методы и программирование. 2004. Т. 5. № 3. С. 13–29.
9. Alberty J., Carstensen C., Funken S.A. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation // *Numerical Algorithms*. 1999. V. 20. N 1-2. P. 117–137. <https://doi.org/10.1023/A:1019155918070>
10. Persson P.-O., Strang G. A simple mesh generation in MATLAB // *SIAM Review*. 2004. V. 46. N 2. P. 329–345. <https://doi.org/10.1137/S0036144503429121>
11. Koko J. Vectorized MATLAB codes for linear two-dimensional elasticity // *Scientific Programming*. 2007. V. 15. N 3. P. 157–172. <https://doi.org/10.1155/2007/838942>
12. Funken S., Praetorius D., Wissgott P. Efficient implementation of adaptive P1-FEM in MATLAB // *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2011. V. 11. N 4. P. 460–490. <https://doi.org/10.2478/cmam-2011-0026>
13. Rahman T., Valdman J. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: nodal elements // *Applied Mathematics and Computation*. 2013. V. 219. N 13. P. 7151–7158. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.08.043>
14. Anjam I., Valdman J. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: edge elements // *Applied Mathematics and Computation*. 2015. V. 267. P. 252–263. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.03.105>
15. Koko J. Fast MATLAB assembly of fem matrices in 2D and 3D using cell-array approach // *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. 2016. V. 7. N 2. P. 1650010. <https://doi.org/10.1142/S1793962316500100>
16. Walker S.W. FELICITY: a MATLAB/C++ toolbox for developing finite element methods and simulation modeling // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2018. V. 40. N 2. P. 234–257. <https://doi.org/10.1137/17M1128745>
17. Čermák M., Sysala S., Valdman J. Efficient and flexible MATLAB implementation of 2D and 3D elastoplastic problems // *Applied Mathematics and Computation*. 2019. V. 355. P. 595–614. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.02.054>
18. Tsega E.G. A finite volume solution of unsteady incompressible Navier–Stokes equations using MATLAB // *Numerical and Computational Methods in Sciences and Engineering*. 2019. V. 1. N 3. P. 117–131. <http://dx.doi.org/10.18576/ncmsel/010302>
19. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
1. Kozelkov A.S., Deriugin Iu.N., Zelenskii D.K., Glazunov V.A., Golubev A.A., Denisova O.V., Lashkin S.V., Zhuchkov R.N., Tarasova N.V., Sizova M.A. Multifunctional software package LOGOS for the problems of hydrodynamics and heat and mass transfer on a supercomputer. *Basic technologies and algorithms. Proc. of the 12th International seminar “Supercomputing and mathematic modeling”*. Sarov, 2010, pp. 215–230. (in Russian)
2. Volkov K.N., Derugin Yu.N., Emelyanov V.N., Karpenko A.G., Kozelkov A.S., Smirnov P.G., Teterina I.V. Implementation of parallel calculations on graphics processor units in the LOGOS computational fluid dynamics package. *Numerical Methods and Programming*, 2013, vol. 14, no. 1, pp. 334–342. (in Russian)
3. Emelyanov V.N., Brykov N.A., Efremov A.V. Application of vectorized algorithms for solving problems of continuum mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 2094, pp. 022047. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2094/2/022047>
4. Emelianov V.N. *Mechanics of Continuous Media: Strain Theory and Main Models*. Moscow, Jurait Publ., 2018, 162 p. (in Russian)
5. Emelianov V.N. *Numerical Methods: An Introduction to the Theory of Difference Schemes*. Moscow, Jurajt Publ., 2018, 188 p. (in Russian)
6. Gergel V.P. *Theory and Practice of Parallel Computations*. Moscow, BINOM Publ., 2010, 432 p. (in Russian)
7. Volkov K.N., Emelianov V.N. Application of MATLAB for the solution of boundary-value problems of liquid and gas mechanics. *Proc. of All-Russian scientific conference “Of Research and Engineering Applications in MATLAB”*. Moscow, ICS RAS Publ., 2004, pp. 92–115. (in Russian)
8. Volkov K.N., Emelyanov V.N. Implementation of vectorized finite-difference algorithms for solving boundary value problems of fluid and gas mechanics with MATLAB package. *Numerical Methods and Programming*, 2004, vol. 5, no. 3, pp. 13–29. (in Russian)
9. Alberty J., Carstensen C., Funken S.A. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. *Numerical Algorithms*, 1999, vol. 20, no. 1-2, pp. 117–137. <https://doi.org/10.1023/A:1019155918070>
10. Persson P.-O., Strang G. A simple mesh generation in MATLAB. *SIAM Review*, 2004, vol. 46, no. 2, pp. 329–345. <https://doi.org/10.1137/S0036144503429121>
11. Koko J. Vectorized MATLAB codes for linear two-dimensional elasticity. *Scientific Programming*, 2007, vol. 15, no. 3, pp. 157–172. <https://doi.org/10.1155/2007/838942>
12. Funken S., Praetorius D., Wissgott P. Efficient implementation of adaptive P1-FEM in MATLAB. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 460–490. <https://doi.org/10.2478/cmam-2011-0026>
13. Rahman T., Valdman J. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: nodal elements. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, vol. 219, no. 13, pp. 7151–7158. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.08.043>
14. Anjam I., Valdman J. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: edge elements. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 267, pp. 252–263. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.03.105>
15. Koko J. Fast MATLAB assembly of fem matrices in 2D and 3D using cell-array approach. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 2016, vol. 7, no. 2, pp. 1650010. <https://doi.org/10.1142/S1793962316500100>
16. Walker S.W. FELICITY: a MATLAB/C++ toolbox for developing finite element methods and simulation modeling. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2018, vol. 40, no. 2, pp. 234–257. <https://doi.org/10.1137/17M1128745>
17. Čermák M., Sysala S., Valdman J. Efficient and flexible MATLAB implementation of 2D and 3D elastoplastic problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 355, pp. 595–614. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.02.054>
18. Tsega E.G. A finite volume solution of unsteady incompressible Navier–Stokes equations using MATLAB. *Numerical and Computational Methods in Sciences and Engineering*, 2019, vol. 1, no. 3, pp. 117–131. <http://dx.doi.org/10.18576/ncmsel/010302>

20. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012. 468 с.
21. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

19. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ia., Kraiko A.N., Prokopov G.P. *Numerical Solutions of Multidimensional Problems of Gas Dynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 400 p. (in Russian)
20. Volkov K.N., Emelianov V.N. *Computational Technologies in the Problems of Fluid and Gas Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 468 p. (in Russian)
21. Lure A.I. *Theory of Elasticity*. Moscow, Nauka Publ., 1970, 940 p. (in Russian)

Авторы

Брыков Никита Александрович — кандидат технических наук, доцент, доцент, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация, [sc 57209849110](https://orcid.org/0000-0002-3568-7522), <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>, brykovna@yandex.ru

Волков Константин Николаевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация, [sc 8663950000](https://orcid.org/0000-0001-6055-2323), <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>, k.volkov@kingston.ac.uk

Емельянов Владислав Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация, [sc 7004697417](https://orcid.org/0000-0002-7039-9948), <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>, vlademelyanov@gmail.com

Authors

Nikita A. Brykov — PhD, Associate Professor, Associate Professor, Baltic State Technical University “VOENMEH” named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation, [sc 57209849110](https://orcid.org/0000-0002-3568-7522), <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>, brykovna@yandex.ru

Konstantin N. Volkov — D.Sc., Leading Researcher, Baltic State Technical University “VOENMEH” named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation, [sc 8663950000](https://orcid.org/0000-0001-6055-2323), <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>, k.volkov@kingston.ac.uk

Vladislav N. Emelyanov — D.Sc., Full Professor, Baltic State Technical University “VOENMEH” named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation, [sc 7004697417](https://orcid.org/0000-0002-7039-9948), <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>, vlademelyanov@gmail.com

Статья поступила в редакцию 28.12.2021
Одобрена после рецензирования 17.01.2022
Принята к печати 30.01.2022

Received 28.12.2021
Approved after reviewing 17.01.2022
Accepted 30.01.2022



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»