

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421

УДК 519.63

Смешанные формы свободных колебаний прямоугольной CF-CF-пластины**Михаил Васильевич Сухотерин¹, Елена Ивановна Распутина²,
Наталья Федоровна Пижуринна³**^{1,2,3} Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация¹ sukhoterimv@gumrf.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>² rasputinaei@gumrf.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7155-2641>³ pizhurinanf@gumrf.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4687-2280>**Аннотация****Предмет исследования.** Изучены смешанные (симметрично/антисимметричные, symmetric/antisymmetric (S-A/A-S)) формы собственных колебаний тонкой прямоугольной пластины постоянной толщины, у которой две параллельные стороны жестко защемлены, а две другие свободны (CF-CF-пластина, C — clamped, F — free).**Метод.** При удовлетворении всем условиям краевой задачи с помощью двух гипербола-тригонометрических рядов координатной функции прогибов получена разрешающая бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов. Используются четные функции по одной координате и нечетные по другой координате для получения симметрично-антисимметричных форм колебаний. В качестве параметра указанная система содержит относительную частоту свободных колебаний. Нетривиальные решения редуцированной системы получены методом последовательных приближений в сочетании с перебором частотного параметра. **Основные результаты.** Численные результаты вычислены для спектра из первых шести смешанных S-A и A-S форм свободных колебаний тонкой квадратной CF-CF-пластины постоянной толщины. Проведено сравнение собственных частот с результатами подобных исследований и с известными экспериментальными значениями. Изучено влияние на точность результатов количества членов, удерживаемых в рядах (размер редуцированной системы), и числа итераций. Представлены 3D-изображения найденных форм колебаний. **Практическая значимость.** Полученные результаты могут быть применены при проектировании различных датчиков и сенсоров, использующих явление резонанса.**Ключевые слова**

прямоугольная CF-CF-пластина, смешанные формы колебания, собственные частоты, гипербола-тригонометрические ряды

Ссылка для цитирования: Сухотерин М.В., Распутина Е.И., Пижуринна Н.Ф. Смешанные формы свободных колебаний прямоугольной CF-CF-пластины // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 2. С. 413–421. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421**Mixed forms of free oscillations of a rectangular CF-CF-plate****Mikhail V. Sukhoterim¹, Elena I. Rasputina², Natalya F. Pizhurina³**^{1,2,3} Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation¹ sukhoterimv@gumrf.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>² rasputinaei@gumrf.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7155-2641>³ pizhurinanf@gumrf.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4687-2280>**Abstract**

Mixed (symmetrically/antisymmetric) forms of natural oscillations of a thin rectangular plate of constant thickness, in which two parallel sides are rigidly pinched, and the other two are free (CF-CF plate, C — clamped, F — free), are studied. When all the conditions of the boundary value problem are satisfied, a resolving infinite homogeneous system

© Сухотерин М.В., Распутина Е.И., Пижуринна Н.Ф., 2023

of linear algebraic equations with respect to unknown coefficients of the series is obtained using two hyperbolic-trigonometric series of the coordinate deflection function. Even functions on one coordinate and odd functions on another coordinate were used to obtain symmetric-antisymmetric waveforms. As a parameter, the resulting system contains the relative frequency of free oscillations. Nontrivial solutions of the reduced system were found by the method of successive approximations in combination with a search of the frequency parameter. Numerical results are obtained for the spectrum of the first six mixed (symmetric/antisymmetric — S-A and A-S) forms of free oscillations of a thin square CFCF plate of constant thickness. The natural frequencies were compared with the results of other authors and with known experimental values. The influence on the accuracy of the results of the number of members held in rows (the size of the reduced system) and the number of iterations is investigated. 3-D images of the found waveforms are presented. The results obtained can be used in the design of various sensors and sensors using the resonance phenomenon.

Keywords

rectangular CFCF plate, mixed oscillation forms, natural frequencies, hyperbolic-trigonometric series

For citation: Sukhoterin M.V., Rasputina E.I., Pizhurina N.F. Mixed forms of free oscillations of a rectangular CFCF-plate. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 2, pp. 413–421 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421

Введение

Тонкие прямоугольные пластины с двумя зашечленными и двумя свободными параллельными сторонами (CFCF-пластины, C — clamped, F — free) широко используются в качестве различных датчиков и сенсоров во многих отраслях микроэлектроники. Самыми простыми и наиболее часто применяемыми конструкциями датчиков-резонаторов являются консоль, мост (CFCF-пластина) и диафрагма. На пластину могут воздействовать периодические возмущения от установленных на ее поверхности (или вблизи) приборов, а также периодические сейсмические и ветровые нагрузки и т. д., что может вызвать резонансные явления. Колебания резонирующей пластины передаются через преобразователь на аналитическое устройство, которое определяет параметры контролируемого процесса. Задача поиска собственных значений (частот колебаний и др.) имеет бесчисленное множество решений. В инженерных расчетах важно знать некоторый спектр собственных частот, на которых может наступить резонанс, а также соответствующие формы колебаний. Эти формы могут быть симметричными (S-S), антисимметричными (A-A) и смешанными (A-S и S-A). В данной работе исследованы смешанные формы собственных колебаний.

Задача о свободных колебаниях прямоугольной CFCF-пластины [1] не имеет точного замкнутого решения относительно координатной функции прогибов $w(x, y)$, содержащей в качестве параметра частоту колебаний. Проблема состоит как в подборе (или отыскании) вида функции $w(x, y)$, удовлетворяющей всем условиям краевой задачи, так и в получении и решении частотного уравнения, дающего нетривиальные значения коэффициентам искомой функции. Известные приближенные решения указанных задач требуют анализа точности полученных численных результатов.

В работах [1–7] для решения задачи применены различные модификации методов Рунге–Кутты–Галеркина. Известно, что эти методы дают, как правило, завышенные значения собственных чисел.

В [1] аппроксимирующая функция содержит 35 слагаемых — комбинаций гиперболических и тригонометрических функций. В работах [2, 3] для более быстрого получения результатов применен метод штрафных функций для 40 слагаемых из полиномов

низкого порядка и тригонометрических функций. В работах [4, 5] использованы циклические многочлены для различных вариантов граничных условий по комбинаторной теории подсчета Поля. В [6] рассмотрены CFCF-сэндвич-панели. Для обнаружения собственных частот применен обобщенный метод Галеркина в сочетании с принципом Гамильтона и теорией деформации сдвига первого порядка. В [7] задача решена в трехмерной постановке с использованием B-spline функций.

В работах [8–12] задействован метод суперпозиции. В [8, 9] этот метод применен в сочетании со спектральным методом динамической жесткости. Искомая функция прогибов представлена двумя типами одномерных модифицированных рядов Фурье. В [10] решение построено в тригонометрических рядах, в работе [11] использована суперпозиция двойного ряда Фурье по косинусам и четырех дополнительных функций в виде произведения полиномиальной функции и разложения в одномерный ряд по косинусам. В [12] предложен новый симплектический метод суперпозиции — модификация метода Эйлера.

В работах [13, 14] применен метод статического анализа в сочетании с особыми комбинациями тригонометрических и гиперболических функций для многих вариантов граничных условий.

Цель настоящей работы — построение алгоритма вычисления с высокой точностью собственных частот смешанных форм колебаний прямоугольных CFCF-пластин с различными отношением сторон и значениями коэффициента Пуассона. Высокая точность решения обеспечена увеличением числа членов в рядах и количества итераций при строгом выполнении всех условий краевой задачи. Используемый в настоящей работе метод успешно применен для решения задачи устойчивости прямоугольной консольной пластины [15].

Постановка задачи

Пусть требуется найти частоты смешанных форм свободных колебаний прямоугольной CFCF-пластины с размерами $a \times b \times h$, где a и b — стороны пластины; h — постоянная толщина пластины. Поместим начало прямоугольной системы координат XOY в центр пластины. Задачу решим в безразмерных координатах $x = X/b$, $y = Y/b$, тогда размеры пластины в плане будут $0 \leq x \leq \gamma$,

$0 \leq y \leq 1$, где $\gamma = a/b$ — отношение сторон пластины. Грани $x = \pm \gamma/2$ зашпелены, а $y = \pm 1/2$ свободны.

Дифференциальное уравнение для определения координатной функции прогибов, дающей формы колебаний и соответствующие частоты, имеет вид [16]:

$$\nabla^4 w(x, y) - \Omega^2 w(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ — координатная функция прогибов; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — бигармонический оператор; $\Omega = p \sqrt{\rho h b^4 / D}$ — относительная (безразмерная) частота колебаний, p — собственная частота, ρ — плотность вещества пластины, $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

На зашпеленных гранях $x = \pm \gamma/2$ прогибы и углы поворота равны:

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а на свободных гранях $y = \pm 1/2$ — изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Искомая функция прогибов $w(x, y)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (1) и граничным условиям (2) и (3), а также обеспечить нетривиальное решение данной краевой задачи.

Симметрично-антисимметричные (S-A) формы колебаний (четно-нечетное решение)

Координатную функцию прогибов примем в виде суммы двух рядов $w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y)$, при этом

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k A_k \operatorname{ch}(\beta_k x) \sin(\lambda_k y), \quad (4)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_s \operatorname{sh}(\xi_s y) \cos(\mu_s x), \quad (5)$$

где A_k, β_k, C_s, ξ_s — неопределенные коэффициенты; $\lambda_k = \pi k, \mu_s = \pi s / \gamma, \bar{k} = (k + 1) / 2, \bar{s} = (s + 1) / 2$.

Подчиним функции (4) и (5) дифференциальному уравнению (1), тогда получим

$$\beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 + \Omega}, \bar{\beta}_k = \sqrt{\lambda_k^2 - \Omega}, \xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + \Omega}, \bar{\xi}_s = \sqrt{\mu_s^2 - \Omega}.$$

Переписем функции (4) и (5) в виде:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k (A_k \operatorname{ch}(\beta_k x) + B_k \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x)) \sin(\lambda_k y), \quad (6)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s (C_s \operatorname{sh}(\xi_s y) + D_s \operatorname{sh}(\bar{\xi}_s y)) \cos(\mu_s x), \quad (7)$$

где добавлены соответствующие слагаемые с неопределенными коэффициентами B_k и D_s .

Заметим, что функция $w_2(x, y)$ обращается в нуль на зашпеленных гранях. Потребуем, чтобы и функция $w_1(x, y)$ также обращалась в нуль. Тогда общий член ряда (6) при $x = \pm \gamma/2$ должен быть равен нулю:

$$A_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k \gamma}{2} + B_k \operatorname{ch} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2} = 0,$$

откуда следует, что

$$B_k = -A_k \frac{\operatorname{ch} \beta_k^*}{\operatorname{ch} \bar{\beta}_k^*}, \quad (8)$$

где $\beta_k^* = \beta_k \gamma / 2, \bar{\beta}_k^* = \bar{\beta}_k \gamma / 2$.

Перерезывающие силы на гранях $y = \pm 1/2$ от функции $w_1(x, y)$ равны нулю. Если подчинить и функцию $w_2(x, y)$ этому условию, то после дифференцирования получим подобное представление коэффициентов D_s через C_s :

$$D_s = -\frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{ch} \xi_s^*}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{ch} \bar{\xi}_s^*} C_s, \quad (9)$$

где $\xi_s^* = \xi_s / 2, \bar{\xi}_s^* = \bar{\xi}_s / 2$.

Переписем искомую функцию прогибов с учетом выражений (6)–(9):

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k A_k^* \left(\frac{\operatorname{ch}(\beta_k x)}{\operatorname{ch} \beta_k^*} - \frac{\operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x)}{\operatorname{ch} \bar{\beta}_k^*} \right) \sin(\lambda_k y) + \\ &+ \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_s^* \times \\ &\times \left(\frac{\operatorname{sh}(\xi_s y)}{\operatorname{ch} \xi_s^*} - \frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{sh}(\bar{\xi}_s y)}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{ch} \bar{\xi}_s^*} \right) \cos(\mu_s x), \end{aligned} \quad (10)$$

где $A_k^* = A_k \operatorname{ch} \beta_k^*, C_s^* = C_s \operatorname{ch} \xi_s^*$. При этом неизвестны лишь две последовательности коэффициентов A_k и C_s .

Подчиним функцию (10) двум оставшимся граничным условиям (второе условие (2) и первое условие (3)). Получим уравнения

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k A_k^* (\beta_k \operatorname{th} \beta_k^* - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \bar{\beta}_k^*) \sin(\lambda_k y) + \right. \\ &+ \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s C_s^* \left(\frac{\operatorname{sh}(\xi_s y)}{\operatorname{ch} \xi_s^*} - \frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{sh}(\bar{\xi}_s y)}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{ch} \bar{\xi}_s^*} \right) \\ &+ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k^* \left(\frac{-(\nu \beta_k^2 - \lambda_k^2) \operatorname{ch}(\beta_k x)}{\operatorname{ch} \beta_k^*} + \frac{(\nu \bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2) \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x)}{\operatorname{ch} \bar{\beta}_k^*} \right) + \\ &+ \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_s^* \times \\ &\left. \times \left(\frac{(\xi_s^2 - \nu \mu_s^2) \operatorname{th} \xi_s^*}{\xi_s [\xi_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2]} - \frac{(\bar{\xi}_s^2 - \nu \mu_s^2) \operatorname{th} \bar{\xi}_s^*}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2]} \right) \right\} \cos(\mu_s x) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем систему уравнений (11) с помощью следующих разложений в ряды Фурье [15]:

$$\begin{aligned} \text{sh}(\xi_s y) &= -4\xi_s \text{ch}\xi_s^* \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(\lambda_k y)}{\lambda_k^2 + \xi_s^2}, \\ \text{sh}(\bar{\xi}_s y) &= -4\bar{\xi}_s \text{ch}\bar{\xi}_s^* \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(\lambda_k y)}{\lambda_k^2 + \bar{\xi}_s^2}, \\ \text{ch}(\beta_k x) &= \frac{4}{\gamma} \text{ch}\beta_k^* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\beta_k^2 + \mu_s^2}, \\ \text{ch}(\bar{\beta}_k x) &= \frac{4}{\gamma} \text{ch}\bar{\beta}_k^* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что, так как $\sin(\lambda_k y) = \sin k\pi y$, то полупериод функции $l = 1$, и пластину следует считать двойной длины в направлении оси oy . Потому на отрезке $[0, 0,5]$ при отыскании коэффициентов разложения использована функция $\text{sh}(\xi_s y)$, а на отрезке $[0,5, 1]$ — фиктивная функция $\text{sh}\xi_s(1 - y)$, которая обеспечивает симметрию относительно края $y = 0,5$. Аналогично при разложении по $\cos(\mu_s x)$ привлечем антисимметричное продолжение гиперболических функций относительно защемленного края.

Первое уравнение (11) после подстановки первых двух разложений (12), перестановки знаков суммирования по индексам k и s и освобождения от знака суммирования по индексу k во всем выражении примет вид:

$$\begin{aligned} &A_k^*(\beta_k \text{th}\beta_k^* - \bar{\beta}_k \text{th}\bar{\beta}_k^*) + \\ &+ 4 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s \xi_s \left(\begin{aligned} &-\frac{1}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} + \\ &+ \frac{[\xi_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]}{[\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]} \frac{1}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} \end{aligned} \right) C_s^* = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим теперь два последних разложения (12) во второе уравнение (11), переставим знаки суммирования и освободимся от знака внешней суммы.

Получим

$$\begin{aligned} &\frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k^* \left(\frac{\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2}{\beta_k^2 + \mu_s^2} - \frac{\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2} \right) + \\ &+ C_s^* \left(\begin{aligned} &(\xi_s^2 - \nu\mu_s^2) \text{th}\xi_s^* - \\ &-\frac{\xi_s[\xi_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]}{\bar{\xi}_s[\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]} (\bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2) \text{th}\bar{\xi}_s^* \end{aligned} \right) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14) получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_k^* = 4 \frac{\sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s \xi_s \left(\begin{aligned} &\frac{1}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} - \\ &-\frac{[\xi_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]}{[\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]} \frac{1}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} \end{aligned} \right) C_s^*}{\beta_k \text{th}\beta_k^* - \bar{\beta}_k \text{th}\bar{\beta}_k^*}, \\ C_s^* = \frac{\frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k^* \left(\begin{aligned} &-\frac{\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2}{\beta_k^2 + \mu_s^2} + \frac{\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2} \right)}{(\xi_s^2 - \nu\mu_s^2) \text{th}\xi_s^* - \frac{\xi_s[\xi_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]}{\bar{\xi}_s[\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]} (\bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2) \text{th}\bar{\xi}_s^*}, \end{cases} \quad (15)$$

которая представляет собой бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности коэффициентов C_s^* , содержащую в качестве параметра искомую частоту собственных колебаний Ω . Помимо тривиального решения система может иметь и не тривиальные решения, если ее определитель будет равен нулю. Разложение определителя приведет к частотному уравнению, из которого нужно найти бесконечное множество собственных частот. Данная задача весьма сложна даже для укороченной системы небольшой размерности. Вместо этого используем итерационный метод перебора частотного параметра. Коэффициенты C_s^* в левой части системы (15) можно считать последующей итерацией, а те же коэффициенты под знаком суммы в правой части — предыдущей итерацией. В начальной итерации все C_{s0}^* можно положить равными единице или взять в виде убывающей последовательности, например $C_{s0}^* = 1/\mu_s$, и подставить в правую часть системы (15), а также задать значение частоты Ω . Найденные значения в левой части — коэффициенты C_{s1}^* первой итерации — затем вновь подставляются в правые части, и итерационный процесс повторяется.

Если в ходе итерационного процесса все соответствующие коэффициенты стремятся к нулю или к бесконечности, то процесс прекращается, и назначается новая частота. Та частота, при которой, начиная с некоторой итерации, соответствующие (ненулевые) коэффициенты не отличаются друг от друга, является искомой собственной частотой. Алгоритмом предусмотрено изменение в широких пределах числа членов в рядах (размер редуцированной системы) и числа итераций.

Антисимметрично-симметричные (А-S) формы колебаний (нечетно-четное решение)

Функции прогибов для А-S задачи путем перестановки в формулах (6) и (7) четных и нечетных функций преобразуем к виду

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (A_k \text{sh}(\beta_k x) + B_k \text{sh}(\bar{\beta}_k x)) \cos(\lambda_k y), \\ w_2(x, y) &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (C_s \text{ch}(\xi_s y) + D_s \text{ch}(\bar{\xi}_s y)) \sin(\mu_s x), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\lambda_k = 2\pi k$, $\mu_s = 2\pi s/\gamma$, а индексы k и s пробегают все значения натурального ряда.

Подчиняя первую функцию уравнения (16) условию отсутствия прогибов на защемленных гранях, получим

$$B_k = -A_k \frac{\text{sh}\beta_k^*}{\text{sh}\bar{\beta}_k^*},$$

а вторую функцию — перерезывающих сил на свободных гранях, получим

$$D_s = -\frac{\xi_s[\xi_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2] \text{sh}\xi_s^*}{\bar{\xi}_s[\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2] \text{sh}\bar{\xi}_s^*} C_s^*.$$

Тогда искомая координатная функция прогибов $w(x, y)$ примет вид:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k^* \left(\frac{\text{sh}(\beta_k x)}{\text{sh}\beta_k^*} - \frac{\text{sh}(\bar{\beta}_k x)}{\text{sh}\bar{\beta}_k^*} \right) \cos(\lambda_k y) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s C_s^* \left(\frac{\text{ch}(\xi_s y)}{\text{sh}\xi_s^*} - \frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \text{ch}(\bar{\xi}_s y)}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \text{sh}\bar{\xi}_s^*} \right) \sin(\mu_s x), \quad (17)$$

где $A_k^* = A_k \text{sh}\beta_k^*$, $C_s^* = C_s \text{sh}\xi_s^*$.

Потребуем, чтобы функция (17) удовлетворяла двум оставшимся граничным условиям (второе условие (2) и первое условие (3)). Тогда получим уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k^* (\beta_k \text{cth}\beta_k^* - \bar{\beta}_k \text{cth}\bar{\beta}_k^*) \cos(\lambda_k y) + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} C_s^* \mu_s \left(\frac{\text{ch}(\xi_s y)}{\text{sh}\xi_s^*} - \frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \text{ch}(\bar{\xi}_s y)}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \text{sh}\bar{\xi}_s^*} \right) = 0, \\ & \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left((\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\text{sh}(\beta_k x)}{\text{sh}\beta_k^*} - (\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\text{sh}(\bar{\beta}_k x)}{\text{sh}\bar{\beta}_k^*} \right) + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s C_s^* \left(-\frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]} (\bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2) \text{cth}\bar{\xi}_s^* - \right. \\ & \left. \times \sin(\mu_s x) \right) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Вспользуемся разложениями:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\xi_s y) &= \frac{2}{\xi_s} \text{sh}\xi_s^* + 4\xi_s \text{sh}\xi_s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(\lambda_k y)}{\xi_s^2 + \lambda_k^2}, \\ \text{ch}(\bar{\xi}_s y) &= \frac{2}{\bar{\xi}_s} \text{sh}\bar{\xi}_s^* + 4\bar{\xi}_s \text{sh}\bar{\xi}_s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(\lambda_k y)}{\bar{\xi}_s^2 + \lambda_k^2}, \\ \text{sh}(\beta_k x) &= -\frac{4}{\gamma} \text{sh}\beta_k^* \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \sin(\mu_s x)}{\beta_k^2 + \mu_s^2}, \\ \text{sh}(\bar{\beta}_k x) &= -\frac{4}{\gamma} \text{sh}\bar{\beta}_k^* \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \sin(\mu_s x)}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Первые два разложения (19) имеют свободные члены, поэтому при подстановке их в первое уравнение (18) также появится свободный член, который обозначим

$$G = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s}{\xi_s} \left(1 - \frac{\xi_s^2 [\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}{\bar{\xi}_s^2 [\bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]} \right) C_s^*. \quad (20)$$

Чтобы компенсировать часть углов поворота заданных краев, добавим к функции прогибов (17) дополнительный прогиб

$$w_0(x) = R_1 \text{sh}(\omega x) + R_2 \sin(\omega x), \quad (21)$$

где R_1, R_2, ω — неопределенные коэффициенты.

Подчиним функцию (21) основному уравнению задачи (1). Получим $\omega = \sqrt{\Omega}$. Потребуем выполнения граничных условий на защемленных гранях для функции w_0 :

$$\begin{aligned} R_1 \text{sh}\omega_* + R_2 \sin\omega_* &= 0, \\ \omega(R_1 \text{ch}\omega_* + R_2 \cos\omega_*) &= -G. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{G}{\omega} \frac{1}{\text{sh}\omega_* (\text{ctg}\omega_* - \text{cth}\omega_*)}, \\ R_2 &= -\frac{G}{\omega} \frac{1}{\sin\omega_* (\text{ctg}\omega_* - \text{cth}\omega_*)}, \end{aligned}$$

где $\omega_* = \omega\gamma/2$.

Теперь первое уравнение (18) (без свободных членов) после перестановки знаков суммирования по индексам k и s и освобождения от знака суммирования по индексу k примет вид:

$$\begin{aligned} & A_k^* (\beta_k \text{cth}\beta_k^* - \bar{\beta}_k \text{cth}\bar{\beta}_k^*) + \\ & + 4 \sum_{s=1}^{\infty} C_s^* \mu_s \xi_s \left(-\frac{1}{[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \xi_s^2 + \lambda_k^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A_k^* = \frac{-4 \sum_{s=1}^{\infty} C_s^* \mu_s \xi_s \left(-\frac{1}{[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \xi_s^2 + \lambda_k^2} \right)}{\beta_k \text{cth}\beta_k^* - \bar{\beta}_k \text{cth}\bar{\beta}_k^*}. \quad (22)$$

Функция (21) нарушает первое граничное условие (3) — получена невязка по изгибающему моменту на краях $y = \pm 1/2$:

$$M_{y0} = \nu\omega^2 (R_1 \text{sh}(\omega x) - R_2 \sin(\omega x)).$$

Разложим невязку в ряд Фурье по $\sin(\mu_s x)$. Вспользуемся известными формулами

$$\text{sh}(\omega x) = -\frac{4}{\gamma} \text{sh}\omega_* \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \sin(\mu_s x)}{\mu_s^2 + \omega^2}, \quad (23)$$

$$\sin(\omega x) = -\frac{4}{\gamma} \sin\omega_* \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \sin(\mu_s x)}{\mu_s^2 - \omega^2}.$$

Тогда получим уточненную невязку

$$\begin{aligned} M_{y0} &= -\frac{4\nu\omega^2}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \mu_s \left(R_1 \frac{\text{sh}\omega_*}{\mu_s^2 + \omega^2} - R_2 \frac{\sin\omega_*}{\mu_s^2 - \omega^2} \right) \sin(\mu_s x) = \\ &= -G \frac{8\nu}{\gamma} \frac{\omega}{\text{ctg}\omega_* - \text{cth}\omega_*} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \mu_s^3}{\mu_s^4 - \omega^4} \sin(\mu_s x). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставим два последних разложения (23) во второе уравнение (18) и добавим невязку (24) от w_0 . После аналогичных преобразований уравнение (24) примет вид:

$$\begin{aligned} & -G \frac{8\nu}{\gamma} \frac{\omega}{\text{ctg}\omega_* - \text{cth}\omega_*} \frac{\mu_s^3}{\mu_s^4 - \omega^4} + \\ & + \frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left(-\frac{\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2}{\beta_k^2 + \mu_s^2} + \frac{\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2} \right) + \end{aligned}$$

$$+ C_s^* \left(\frac{(\xi_s^2 - \nu\mu_s^2)\text{cth}\xi_s^* - \xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]} (\bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2)\text{cth}\bar{\xi}_s^* \right) = 0.$$

Отсюда получим разрешающую бесконечную систему

$$C_s^* = \frac{G \frac{8\nu}{\gamma} \frac{\omega}{\text{ctg}\omega_* - \text{cth}\omega_*} \frac{\mu_s^3}{\mu_s^4 - \omega^4} - \frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left(-\frac{\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2}{\beta_k^2 + \mu_s^2} + \frac{\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2} \right)}{(\xi_s^2 - \nu\mu_s^2)\text{cth}\xi_s^* - \frac{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]} (\bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2)\text{cth}\bar{\xi}_s^*},$$

где A_k^* найдем по формуле (22), а G — по (20).

Окончательно искомая координатная функция прогибов примет вид:

$$w(x, y) = \frac{G}{\omega} \frac{1}{(\text{ctg}\omega_* - \text{cth}\omega_*)} \left(\frac{\text{sh}(\omega x)}{\text{sh}\omega_*} - \frac{\sin(\omega x)}{\sin\omega_*} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k^* \left(\frac{\text{sh}(\beta_k x)}{\text{sh}\beta_k^*} - \frac{\text{sh}(\bar{\beta}_k x)}{\text{sh}\bar{\beta}_k^*} \right) \cos(\lambda_k y) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s C_s^* \left(\frac{\text{ch}(\xi_s y)}{\text{sh}\xi_s^*} - \frac{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\text{ch}(\bar{\xi}_s y)}{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\text{sh}\bar{\xi}_s^*} \right) \sin(\mu_s x).$$

Результаты

Выполним вычисления в системе аналитических вычислений Maple. В программе можно менять отношение сторон пластины γ , коэффициент Пуассона, число членов в рядах и число итераций. Основным параметром является относительная частота колебаний Ω , которая перебиралась методом «стрельбы». Коэффициенты A_k^* и C_s^* для контроля выведем на печать на каждой итерации. Время расчета каждого варианта 2–3 мин (при условии, что в рядах удерживалось до 100 членов).

В качестве примера рассмотрим квадратную пластину с коэффициентом Пуассона равным 0,3. Число членов в рядах было изменено от 25 до 50, число итераций — от 10 до 20. Дальнейшее увеличение этих величин не изменяло пятой значащей цифры коэффициентов C_s^* в соседних итерациях, а также шестой цифры в значении частоты. Для каждой из смешанных форм колебаний, S-A и A-S, достаточно точно вычислены три относительные собственные частоты (таблица) и построены трехмерные графики (рисунок).

Обсуждение

Выполнено сравнение численных результатов трех смешанных частот [14] и полученных шести частот в настоящей работе. Авторы работы [14] высказали мнение, что получили «точные» значения, с которыми практически совпали результаты настоящей работы.

Результаты работ [1, 2] несколько преувеличены, так как авторы использовали метод Рэлея–Ритца, который обычно дает завышенные значения искомого параметра.

Отметим, что в известной экспериментальной работе [17] получены следующие три значения смешанных частот: 26,484; 59,506 и 78,521 (в пересчете к относительным значениям) против соответствующих значений, вычисленных в настоящей работе: 26,4018; 61,1692; 79,8122. Видно, что низкие частоты практически совпали, а значения более высоких частот (так же, как и в работе [14]) заметно превышают экспериментальные значения. Это можно объяснить «размытостью» резонансных интервалов на высоких частотах в экспериментальных измерениях. Возможно, в эксперименте были зафиксированы нижние границы интервалов.

Достоинство предложенного метода состоит в том, что разрешающая бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений (15) имеет компактный вид, который обеспечивает организацию итерационного процесса вычисления коэффициентов гипербола-тригонометрических рядов при заданной частоте для редуцированной системы, размер которой

Таблица. Собственные относительные (безразмерные) частоты смешанных форм свободных колебаний квадратной CFCF-пластины $\Omega = p\sqrt{\rho h b^4/D}$

Table. Natural relative frequencies of mixed forms of free oscillations of a square CFCF plate $\Omega = p\sqrt{\rho h b^4/D}$

Номер частоты	Форма колебаний	Результаты настоящей работы	Результаты подобных научных работ			
			[10]	[1]	[2]	[14]
Ω_1	S-A	26,4018	26,4000	26,5290	26,4070	26,4009
Ω_2	A-S	61,1692	61,2000	61,4660	61,1770	61,1685
Ω_3	S-A	79,8122	—	79,9040	79,8180	79,8109
Ω_4	A-S	87,5851	—	—	—	—
Ω_5	S-A	131,8030	—	—	—	—
Ω_6	A-S	180,2280	—	—	—	—

Примечания:

- 1) точность значений для источников [1, 2, 10, 14] приведена в соответствии с авторскими текстами;
- 2) «—» — собственные частоты в указанных научных работах не вычислялись.

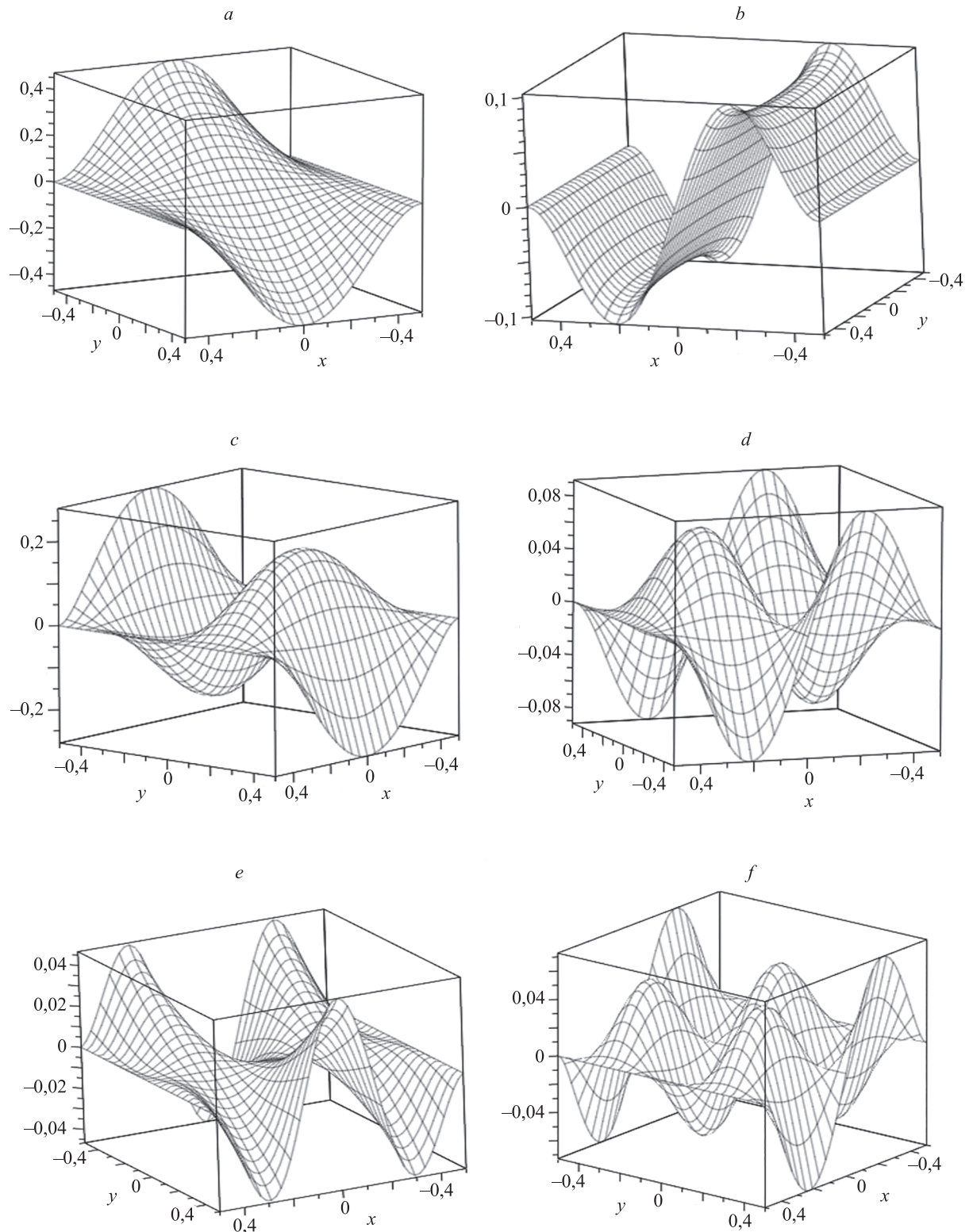


Рисунок. Формы собственных колебаний для частот: первые S-A ($\Omega_1 = 26,4018$) (a) и A-S ($\Omega_2 = 61,1692$) (b); вторые S-A ($\Omega_3 = 79,8122$) (c) и A-S ($\Omega_4 = 87,5851$) (d); третьи S-A ($\Omega_5 = 131,8030$) (e) и A-S ($\Omega_6 = 180,228$) (f)

Figure. The forms of natural oscillations for frequencies: the first S-A ($\Omega_1 = 26.4018$) (a) and A-S ($\Omega_2 = 61.1692$) (b); the second S-A ($\Omega_3 = 79.8122$) (c) and A-S ($\Omega_4 = 87.5851$) (d); the third S-A ($\Omega_5 = 131.8030$) (e) and A-S ($\Omega_6 = 180.2280$) (f)

можно увеличивать. Легко выбрать стратегию метода «стрельбы» и быстро локализовать поиск собственной частоты.

Заключение

Используемый в работе эффективный метод перебора частотных параметров для получения нетривиальных решений разрешающей бесконечной системы

позволяет с высокой точностью вычислить собственные значения для широкого круга задач колебаний и устойчивости прямоугольных пластин с классическими граничными условиями.

Метод и результаты исследования могут быть использованы для определения собственных частот различных датчиков и сенсоров в виде прямоугольных пластин во многих отраслях микроэлектроники.

Литература

1. Leissa A.W., Qatu M.S. *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill Companies, 2011. 507 p.
2. Ilanko S., Monterrubio L., Mochida Y. *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Hoboken, NJ: Wiley & Sons, 2014. 240 p. <https://doi.org/10.1002/9781118984444>
3. Monterrubio L.E., Ilanko S. Proof of convergence for a set of admissible functions for the Rayleigh–Ritz analysis of beams and plates and shells of rectangular planform // *Computers and Structures*. 2015. V. 147. P. 236–243. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.09.008>
4. Narita Y. Polya counting theory applied to combination of edge conditions for generally shaped isotropic plates // *EPI International Journal of Engineering*. 2019. V. 2. N 2. P. 194–202. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.082019.16>
5. Narita Y., Inami M. Identifying all combinations of boundary conditions for in-plane vibration of isotropic and anisotropic rectangular plates // *Thin-Walled Structures*. 2021. V. 164. P. 107320. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107320>
6. Lopatin A.V., Morozov E.V. Fundamental frequency and design of the CFCF composite sandwich plate // *Composite Structures*. 2011. V. 93. N 2. P. 983–991. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.023>
7. Nagino H., Mikami T., Mizusawa T. Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. V. 317. N 1-2. P. 329–353. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.021>
8. Liu X., Banerjee J.R. A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. V. 87. Part A. P. 136–160. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.10.017>
9. Liu X., Banerjee J.R. Free vibration analysis for plates with arbitrary boundary conditions using a novel spectral-dynamic stiffness method // *Computers & Structures*. 2016. V. 164. P. 108–126. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.11.005>
10. Kshirsagar S., Bhaskar K. Accurate and elegant free vibration and buckling studies of orthotropic rectangular plates using untruncated infinite series // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. V. 314. N 3–5. P. 837–850. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.013>
11. Du J., Li W.L., Jin G., Yang T., Liu Z. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges // *Journal of Sound and Vibration*. 2007. V. 306. N 3–5. P. 908–927. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.011>
12. Li R., Zheng X., Wang P., Wang B., Wu H., Cao Y., Zhu Z. New analytic free vibration solutions of orthotropic rectangular plates by a novel symplectic approach // *Acta Mechanica*. 2019. V. 230. N 9. P. 3087–3101. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02448-1>
13. Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions // *Journal of Sound and Vibration*. 2019. V. 452. P. 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.03.024>
14. Deutsch A., Tenenbaum J., Eisenberger M. Benchmark vibration frequencies of square thin plates with all possible combinations of classical boundary conditions // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019. V. 19. N 11. P. 1950131. <https://doi.org/10.1142/S0219455419501311>
15. Sukhoterina M., Baryshnikov S., Knysh T., Rasputina E. Stability of rectangular cantilever plates with high elasticity // *E3S Web of Conferences*. 2021. V. 244. P. 04004. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202124404004>
16. Lekhnitskii S.G. *Anisotropic Plates*. New York: Gordon & Breach, 1968. 534 p.
17. Singal R.K., Gorman D.J., Forques S.A. A comprehensive analytical solution for free vibration of rectangular plates with classical edge conditions: Experimental verification // *Experimental Mechanics*. 1992. V. 32. N 1. P. 21–23. <https://doi.org/10.1007/BF02317979>

References

1. Leissa A.W., Qatu M.S. *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill Companies, 2011, 507 p.
2. Ilanko S., Monterrubio L., Mochida Y. *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Hoboken, NJ, Wiley & Sons, 2014, 240 p. <https://doi.org/10.1002/9781118984444>
3. Monterrubio L.E., Ilanko S. Proof of convergence for a set of admissible functions for the Rayleigh–Ritz analysis of beams and plates and shells of rectangular planform. *Computers and Structures*, 2015, vol. 147, pp. 236–243. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.09.008>
4. Narita Y. Polya counting theory applied to combination of edge conditions for generally shaped isotropic plates. *EPI International Journal of Engineering*, 2019, vol. 2, no. 2, pp. 194–202. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.082019.16>
5. Narita Y., Inami M. Identifying all combinations of boundary conditions for in-plane vibration of isotropic and anisotropic rectangular plates. *Thin-Walled Structures*, 2021, vol. 164, pp. 107320. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107320>
6. Lopatin A.V., Morozov E.V. Fundamental frequency and design of the CFCF composite sandwich plate. *Composite Structures*, 2011, vol. 93, no. 2, pp. 983–991. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.023>
7. Nagino H., Mikami T., Mizusawa T. Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 317, no. 1–2, pp. 329–353. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.021>
8. Liu X., Banerjee J.R. A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, vol. 87, part A, pp. 136–160. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.10.017>
9. Liu X., Banerjee J.R. Free vibration analysis for plates with arbitrary boundary conditions using a novel spectral-dynamic stiffness method. *Computers & Structures*, 2016, vol. 164, pp. 108–126. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.11.005>
10. Kshirsagar S., Bhaskar K. Accurate and elegant free vibration and buckling studies of orthotropic rectangular plates using untruncated infinite series. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 314, no. 3–5, pp. 837–850. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.013>
11. Du J., Li W.L., Jin G., Yang T., Liu Z. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 306, no. 3–5, pp. 908–927. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.011>
12. Li R., Zheng X., Wang P., Wang B., Wu H., Cao Y., Zhu Z. New analytic free vibration solutions of orthotropic rectangular plates by a novel symplectic approach. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, no. 9, pp. 3087–3101. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02448-1>
13. Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, vol. 452, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.03.024>
14. Deutsch A., Tenenbaum J., Eisenberger M. Benchmark vibration frequencies of square thin plates with all possible combinations of classical boundary conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, vol. 19, no. 11, pp. 1950131. <https://doi.org/10.1142/S0219455419501311>
15. Sukhoterina M., Baryshnikov S., Knysh T., Rasputina E. Stability of rectangular cantilever plates with high elasticity. *E3S Web of Conferences*, 2021, vol. 244, pp. 04004. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202124404004>
16. Lekhnitskii S.G. *Anisotropic Plates*. New York, Gordon & Breach, 1968, 534 p.
17. Singal R.K., Gorman D.J., Forques S.A. A comprehensive analytical solution for free vibration of rectangular plates with classical edge conditions: Experimental verification. *Experimental Mechanics*, 1992, vol. 32, no. 1, pp. 21–23. <https://doi.org/10.1007/BF02317979>

Авторы

Сухотерин Михаил Васильевич — доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, [sc 16496923700](https://orcid.org/0000-0002-8295-7089), <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>, sukhoterimv@gumrf.ru

Распутина Елена Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, [sc 57204360630](https://orcid.org/0000-0002-7155-2641), <https://orcid.org/0000-0002-7155-2641>, rasputinaei@gumrf.ru

Пижурина Наталья Федоровна — кандидат технических наук, доцент, профессор, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, [sc 57213917458](https://orcid.org/0000-0002-4687-2280), <https://orcid.org/0000-0002-4687-2280>, pizhurinanf@gumrf.ru

Authors

Mikhail V. Sukhoterin — D.Sc., Associate Professor, Head of Department, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, [sc 16496923700](https://orcid.org/0000-0002-8295-7089), <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>, sukhoterimv@gumrf.ru

Elena I. Rasputina — PhD (Physics & Mathematics), Associate Professor, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, [sc 57204360630](https://orcid.org/0000-0002-7155-2641), <https://orcid.org/0000-0002-7155-2641>, rasputinaei@gumrf.ru

Natalya F. Pizhurina — PhD, Associate Professor, Professor, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, [sc 57213917458](https://orcid.org/0000-0002-4687-2280), <https://orcid.org/0000-0002-4687-2280>, pizhurinanf@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 15.12.2022
Одобрена после рецензирования 26.12.2022
Принята к печати 26.03.2023

Received 15.12.2022
Approved after reviewing 26.12.2022
Accepted 26.03.2023



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»