

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
MODELING AND SIMULATION

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-4-795-802

УДК 681.787

Погрешности алгоритма демодуляции с генерируемой фазой несущей,  
вносимые фильтром низкой частотыГеоргий Петрович Мирошниченко<sup>1</sup>, Алина Николаевна Аржаненкова<sup>2</sup>✉,  
Михаил Юрьевич Плотников<sup>3</sup><sup>1,2,3</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация<sup>1</sup> [gpmirosh@gmail.com](mailto:gpmirosh@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-4265-8818><sup>2</sup> [11arzh11@gmail.com](mailto:11arzh11@gmail.com)✉, <https://orcid.org/0000-0003-4869-2838><sup>3</sup> [plotnikov-michael@yandex.ru](mailto:plotnikov-michael@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2506-0379>

## Аннотация

**Введение.** Представлены результаты исследования погрешности метода гомодинной демодуляции на основе решений функции арктангенса (PGC-ATAN). Метод связан с использованием фильтра низких частот в данном алгоритме демодуляции фазы сигнала. **Метод.** Исследован метод демодуляции интерференционного сигнала методом PGC-ATAN. Обнаружены и рассмотрены погрешности на этапе фильтрации методом скользящего среднего. Аналитически рассчитаны поправки к сигналу с учетом погрешности, вносимой фильтром низких частот. **Основные результаты.** Выведены формулы для расчета поправок к сигналам  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $S_3(t)$ ,  $S_4(t)$  полученным с помощью фильтрации исходного сигнала, умноженного на сигнал опорного генератора. Выполнено сравнение результатов расчетов с данными математического моделирования обработки интерференционного сигнала методом PGC-ATAN. Демодуляция сигнала с учетом поправок показала, что влияние на фазу сигнала оказывается небольшим при невысокой скорости нагрева. Замечено, что для высокоскоростных процессов погрешность может приводить к серьезным искажениям искомой фазы сигнала. **Обсуждение.** Рассчитанные поправки к обрабатываемому интерференционному сигналу позволят улучшить метод демодуляции на основе вычислений функции арктангенса и точнее рассчитывать искомую фазу сигнала.

## Ключевые слова

PGC, интерферометрия, погрешности

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание № 2019-0923.

**Ссылка для цитирования:** Мирошниченко Г.П., Аржаненкова А.Н., Плотников М.Ю. Погрешности алгоритма демодуляции с генерируемой фазой несущей, вносимые фильтром низкой частоты // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 4. С. 795–802. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-4-795-802

Errors in the demodulation algorithm with a generated carrier phase introduced  
by the low-pass filterGeorge P. Miroshnichenko<sup>1</sup>, Alina N. Arzhanenkova<sup>2</sup>✉, Michael Yu. Plotnikov<sup>3</sup><sup>1,2,3</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation<sup>1</sup> [gpmirosh@gmail.com](mailto:gpmirosh@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-4265-8818><sup>2</sup> [11arzh11@gmail.com](mailto:11arzh11@gmail.com)✉, <https://orcid.org/0000-0003-4869-2838><sup>3</sup> [plotnikov-michael@yandex.ru](mailto:plotnikov-michael@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2506-0379>

## Abstract

In this paper, we study the errors of the homodyne demodulation method based on arctangent function solutions (PGC-ATAN) which are associated with the use of a low-pass filter (LPF) in this signal phase demodulation algorithm. The

© Мирошниченко Г.П., Аржаненкова А.Н., Плотников М.Ю., 2023

method of demodulation of an interference signal by PGC-ATAN method is investigated in order to detect and consider in more detail the errors at the filtering stage (the article considers the moving average method), and corrections to the signal are analytically calculated, taking into account the error introduced by the low-pass filter. We obtained formulas for calculating corrections to the signals  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $S_3(t)$ ,  $S_4(t)$  which received by filtering the original signal multiplied by the reference oscillator signal, the calculations were compared with the results of mathematical modeling of the interference signal processing by the PGC-ATAN method. The demodulation of the signal, taking into account the corrections, showed that, in general, the effect on the signal phase is small at a low heating rate, however, for high-speed processes, the error can lead to serious distortions of the desired signal phase. These calculated corrections for processed interference signal will improve the demodulation method based on the calculations of the arc tangent function and more accurately calculate the desired phase of the signal.

### Keywords

PGC, interferometry, measurement errors

### Acknowledgements

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation, State Assignment no. 2019-0923.

**For citation:** Miroshnichenko G.P., Arzhanenkova A.N., Plotnikov M.Yu. Errors in the demodulation algorithm with a generated carrier phase introduced by the low-pass filter. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 4, pp. 795–802 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-4-795-802

## Введение

Волоконно-оптические интерферометрические датчики обладают рядом преимуществ благодаря высокой чувствительности, низкой стоимости и невосприимчивости к электромагнитным помехам. Данные датчики успешно применяются во многих областях, таких как вибромониторинг различных объектов, подводное акустическое зондирование, деформационный мониторинг объектов, измерение скорости прецессии гироскопов, некоторые химические или биомедицинские, а также температурные измерения. Для восстановления акустического сигнала с выхода интерференционного датчика используют алгоритм демодуляции с генерируемой фазой несущей (PGC). Этот алгоритм активно используется из-за его широкого динамического диапазона, хорошей линейности фазовой характеристики и высокой чувствительности.

Запишем сигнал с фотодиода  $S_{in}(t)$ , поступающий на схему гомодинного детектирования в виде:

$$S_{in}(t) = I_0(1 + n_I(t))(1 + V\cos(C\cos(\omega_c t) + \varphi(t) + n_p(t))) + n_c(t),$$

где  $n_p(t)$  — фазовый шум, возникающий из-за частотного шума лазерного источника;  $n_c(t)$  — шум электронной схемы (фотоэлектрические преобразования, усилители и схемы дискретизации), который можно смоделировать как аддитивный белый гауссовский шум;  $n_I(t)$  — шум интенсивности света, исходящий от лазерного источника, модулятора, оптических усилителей;  $I_0$  — средняя интенсивность интерференционного сигнала;  $V$  — параметр видности;  $C$  — глубина модуляции (амплитуда несущей);  $\omega_c = 2\pi\nu_c$  — частота модуляции;  $\nu_c$  — частота колебаний;  $\varphi(t)$  — фаза, зависящая от изучаемого сигнала.

Алгоритм PGC активно изучается, исследуются границы его применимости, рассчитываются погрешности и поправки к методу для того, чтобы качественнее и эффективнее выделять искомую фазу сигнала.

Цель работы — поиск погрешностей, вносимых фильтром низких частот (ФНЧ) в сигнал, представляющий собой умножение интерференционного сигнала и сигнала с опорного генератора.

## Обзор предыдущих исследований

Существует несколько вариантов алгоритма PGC. Все алгоритмы начинаются с процесса гомодинной демодуляции, основанной на умножении сигнала  $S_{in}(t)$  на сигнал опорного генератора, который может иметь гармоники частоты модуляции от первой до четвертой в зависимости от схемы, и последующей фильтрации результата с помощью фильтра низкой частоты. После фильтрации получают низкочастотные сигналы, обозначаемые  $S_k(t)$ , где  $k = 1, 2, 3, 4$  — номер умножаемой гармоники. Сигналы  $S_k(t)$  зависят от измеряемой фазы  $\varphi(t)$ , которую необходимо извлечь с помощью последующей обработки.

Отметим основные алгоритмы обработки сигналов. В работах [1–5] предложен метод дифференцированного перекрестного умножения (differentiate-cross-multiply, PGC-DCM), основанный на дифференцировании сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , их перекрестном перемножении и интегрировании. В результате получен сигнал, пропорциональный изучаемой фазе  $\varphi(t)$ . Эта схема позволяет восстанавливать измеренные фазовые сигналы из сигнала помехи независимо от рабочей точки интерферометра, однако на нее влияет эффект возмущения интенсивности света (Light Intensity Disturbance, LID). В работах [6–8] предложен метод демодуляции, использующий метод PGC-ATAN, который устраняет влияние LID, однако результат демодуляции строго зависит от глубины модуляции  $C$ . Если глубина демодуляции  $C$  отклоняется от 2,63 рад, результаты демодуляции будут иметь серьезные гармонические искажения. В работах [7–14] сформулирован улучшенный алгоритм PGC, основанный на вычислении функции арктангенса и дифференциальном умножении (DSM). Для схемы демодуляции алгоритма PGC на основе подходов PGC-DCM [9] и PGC-ATAN разработаны гибридные алгоритмы [15–26], такие как PGC-RCM [19], улучшенный PGC [20], PGC-DCM-ATAN [21], PGC-ARCCOT-DSM [22], PGC-ATAN-DSM [23], PGC-DSMI [24], PGC-Elim-B [25], PGC-Elim-BC [26]. В работе [12] исследован алгоритм, основанный на вычислении четырех сигналов  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $S_3(t)$ ,  $S_4(t)$ , получаемых с помощью четырех гармоник частоты

модуляции. Этот алгоритм устойчив к флуктуациям интенсивности лазера, глубины модуляции, положения рабочей точки и имеет большой динамический диапазон. В перечисленных работах исследованы шумовые характеристики демодулированной фазы  $\varphi(t)$  и отмечено, что ФНЧ вносит погрешность в измеряемую фазу. Детальное исследование погрешности от ФНЧ исследовано в работе [6]. Тем не менее, в указанных работах не исследованы погрешности, вносимые ФНЧ в демодулированные сигналы  $S_1(t), \dots, S_4(t)$ .

В настоящей работе использован метод PGC-ATAN. Пренебрежем шумовыми характеристиками в сигнале  $S_{in}(t)$ , который запишем в виде:

$$S_{in}(t) = A + B \cos(C \cos(\omega_c t) + \varphi(t)), \quad (1)$$

где  $A$  и  $B$  — константы, определяемые интенсивностью и видностью оптического излучения.

Исследуем поправки к полученным сигналам  $S_1(t), \dots, S_4(t)$  после их обработки ФНЧ.

На рис. 1 изображена схема гомодинной демодуляции на основе решений функции арктангенса (метод PGC-ATAN) [10].

### ФНЧ – скользящее среднее

Исчерпывающими характеристиками любого линейного фильтра являются в операторном пространстве — передаточная функция, во временном пространстве — импульсная характеристика. Используем в качестве ФНЧ нерекурсивный линейный дискретный фильтр. Запишем уравнение фильтрации, имеющее вид свертки сигнала с импульсной характеристикой:

$$y_k = \sum_{j=0}^{P-1} x_{k-j} b_j, \quad (2)$$

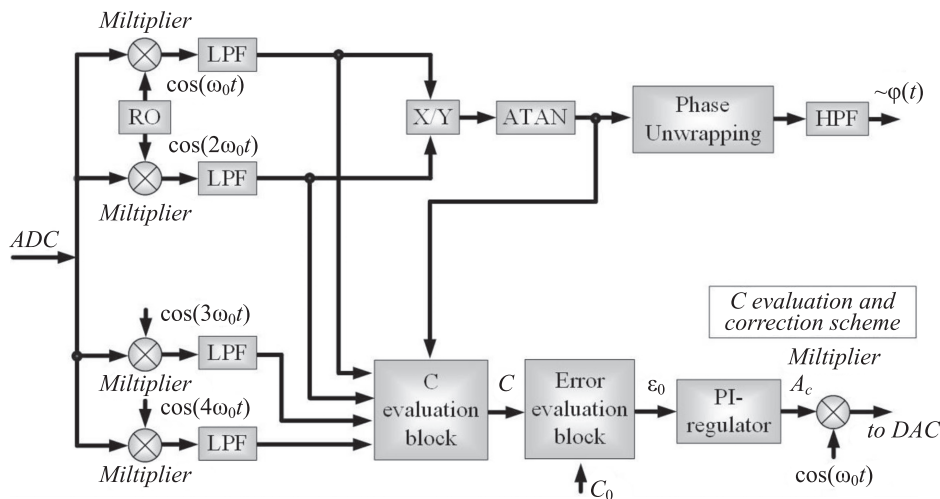


Рис. 1. Схема гомодинной демодуляции метода PGC-ATAN: ADC — аналого-цифровой преобразователь; RO — опорный генератор; LPF — фильтр низких частот; X/Y — операция деления; ATAN — операция вычисления значений функции арктангенса; Phase unwrapping — блок доворачивания фазы; HPF — фильтр высоких частот; C evaluation block — блок вычисления глубины модуляции; Error evaluation block — блок расчета ошибок; PI-regulator — схема обратной связи с интегратором; DAC — цифро-аналоговый преобразователь

Fig. 2. PGC-ATAN demodulation scheme: ADC — analog-to-digital converter; RO — reference oscillator; LPF — low pass filter; X/Y — division block; ATAN — arctangent function block; Phase unwrapping block; HPF — high pass filter; C — evaluation block and Error evaluation block; PI-regulator — integrator feedback scheme; DAC — digital-to-analog converter

где  $y_k$  —  $k$ -ое значение выходного сигнала;  $x_j$  —  $j$ -ое значение входного сигнала;  $b_j$  — отсчеты импульсной характеристики фильтра;  $P$  — порядок фильтра. Исследуем простой фильтр скользящего среднего, для которого импульсная характеристика равна

$$b_j = \frac{1}{P}, j = 0, 1, \dots, P - 1.$$

После преобразования запишем уравнение фильтрации для фильтра скользящего среднего

$$y_k = \frac{1}{P} \sum_{j=k-P+1}^k x_j.$$

При  $k = n + P - 1$

$$y_n = \frac{1}{P} \sum_{j=n}^{n+P-1} x_j, \quad (3)$$

где  $P$  — интервал усреднения (порядок фильтра);  $\omega_d$  — частота дискретизации;  $\omega_c$  — частота модуляции:

$$P = \frac{\omega_d}{\omega_c}. \quad (4)$$

Найдем амплитудно-частотную характеристику  $K(\omega)$  фильтра (3)

$$K(\omega) = \left| \frac{1}{P} \sum_{k=n}^{n+P-1} \exp(-i\omega T_d k) \right| = \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_c}\right)}{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_d}\right)}, \quad (5)$$

где  $T_d$  — период дискретизации.

Детектируемый сигнал алгоритма PGC (1) при постоянной фазе изменяется во времени на частотах, кратных частоте модуляции  $\omega_c$ . Для правильной работы

алгоритма необходимо, чтобы эти частоты являлись нулями  $K(\omega)$ . Именно этим свойством обладает амплитудно-частотная характеристика ФНЧ-скользящее среднее (5). Недостатком этого фильтра, как и других дискретных фильтров, является ограничение диапазона фильтрации по частоте: частота сигнала не должна превосходить частоту Котельникова, равной половине  $\omega_d$ .

Иначе говоря,

$$\frac{\omega}{\omega_c} < \frac{P}{2}. \quad (6)$$

Область изменения частот в сигнале (1) зависит от параметра глубины модуляции  $C$ . Обычно выбирают оптимальную глубину модуляции:

$$C \approx 2,6.$$

Тогда в сигнале (1) можно ограничиться первыми пятью гармониками, и, как следствие, выбрать глубину фильтрации  $P \geq 20$ . Запишем формулу (3) в непрерывной форме:

$$\begin{aligned} T_d &= dt, T_{dj} = t \\ y(t) &= \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} x(t') dt', \end{aligned} \quad (7)$$

где  $T_c$  — период модуляции.

В этом случае амплитудно-частотная характеристика фильтра примет вид

$$K(\omega) = \left| \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} \exp(-i\omega t') dt' \right| = \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_c}\right)}{\pi \frac{\omega}{\omega_d}}. \quad (8)$$

Характеристики (5) и (8) совпадают, при условии (6). Для расчетов уравнение фильтра (7) в непрерывной форме удобнее, чем дискретное уравнение (3).

### Расчет поправок к сигналам

В блоке гомодинной демодуляции выполняется умножение сигнала  $S_{in}(t)$  (1) на гармоники частоты  $\omega_c$  задающего генератора с номерами  $r = 1, 2, 3, 4$ . Полученное произведение пропускается через ФНЧ, в качестве которого будем использовать фильтр скользящего среднего, функционирующий, согласно соотношению (7). В результате выделяются искомые низкочастотные сигналы  $S_r(t)$

$$S_r(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} S_{in}(t') \cos(r\omega_c t') dt'.$$

Подставим (1), получим

$$S_r(t) = S_r^{(c)}(t) + S_r^{(s)}(t),$$

где

$$S_r^{(c)}(t) = B \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} \cos(C \cos(\omega_c t')) \cos(\varphi(t')) \cos(r\omega_c t') dt'$$

$$S_r^{(s)}(t) = -B \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} \sin(C \cos(\omega_c t')) \sin(\varphi(t')) \cos(r\omega_c t') dt'$$

В формуле (1) параметры  $A$  и  $B$  полагаются не зависящими от времени, интеграл  $A \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} \cos(r\omega_c t') dt'$  равен нулю (свойство (8) фильтра скользящего среднего).

Перепишем сигналы  $S_r^{(c)}(t)$  и  $S_r^{(s)}(t)$  с помощью формулы Якоби–Ангера [27].

$$\cos(C \cos(\omega_c t')) = J_0(C) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(C) \cos(2k\omega_c t'),$$

$$\sin(C \cos(\omega_c t')) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(C) \cos((2k+1)\omega_c t').$$

Тогда

$$S_r^{(c)}(t) = B(J_0(C)A_{0,r}(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(C)A_{2k,r}(t)),$$

$$S_r^{(s)}(t) = -2B \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(C)B_{2k+1,r}(t),$$

где

$$\begin{aligned} A_{2k,r}(t) &= \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} \cos(2k\omega_c t') \cos(\varphi(t')) \cos(r\omega_c t') dt'; \\ B_{2k+1,r}(t) &= \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} \cos((2k+1)\omega_c t') \sin(\varphi(t')) \cos(r\omega_c t') dt'. \end{aligned} \quad (9)$$

Поясним, по какой причине для анализа погрешностей фильтрации был выбран ФНЧ скользящего среднего, обладающий свойством (8). Рассмотрим интеграл  $B_{2k+1,r}(t)$  при условии независимости искомой фазы  $\varphi(t)$  от времени. Имеем

$$B_{2k+1,r}(t) = \sin(\varphi) \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t+T_c} \cos((2k+1)\omega_c t') \cos(r\omega_c t') dt'.$$

Из формулы (8) следует, что при условии  $r = 2k + 1$  получим  $B_{2k+1,r}(t) = \frac{1}{2} \sin(\varphi)$ , в противном случае этот интеграл равен нулю. Другими словами, ФНЧ скользящего среднего идеально отфильтровывает все гармоники задающего генератора и правильно выделяет низкочастотную часть сигнала (при условии, что фаза не зависит от времени). Если фаза меняется во времени, то фильтрация вносит погрешность в искомый низкочастотный сигнал. Поправки к  $S_1(t), \dots, S_4(t)$  найдем при условии

$$\xi = \frac{\dot{\varphi}(t')}{\omega_c} \ll 1, t \leq t' \leq t + T_c,$$

где  $\xi$  — параметр малости.

При этом условии можно разложить  $\varphi(t')$  в ряд Тейлора в интегралах (9):

$$\varphi(t') = \varphi(t) + \dot{\varphi}(t)(t' - t).$$

Ограничимся вычислением поправок первого порядка по параметру  $\xi$ :

$$S_r(t) = S_r^{(0)}(t) + \xi \Delta S_r(t). \quad (10)$$

Найдем интегралы  $A_{2k+1,r}(t), B_{2k+1,r}(t)$  с точностью до первого порядка по параметру  $\xi$ .

Для  $A_{2k,r}(t)$  получим

$$A_{2k,r}(t) = \delta_{2k,r} A_{2k,r}^{(0)}(t) + \xi A_{2k,r}^{(1)}(t),$$

$$A_{2k,2k}^{(0)}(t) = \frac{\cos(\varphi(t))}{2},$$

$$A_{2k,2k}^{(1)}(t) = -\frac{\sin(\varphi(t)) \sin(4k\omega_c t)}{2 \cdot 4k},$$

$$A_{2k,r}^{(1)}(t) = -\frac{\sin(\varphi(t))}{2} \left( \frac{\sin((2k+r)\omega_c t)}{2k+r} + \frac{\sin((2k-r)\omega_c t)}{2k-r} \right),$$

при условии, что  $r \neq 2k$ .

Для  $A_{2k+1,r}(t)$  получим

$$B_{2k+1,r}(t) = \delta_{2k+1,r} B_{2k+1,r}^{(0)}(t) + \xi B_{2k+1,r}^{(1)}(t),$$

$$B_{2k+1,2k+1}^{(0)}(t) = \frac{\sin(\varphi(t))}{2},$$

$$B_{2k+1,2k+1}^{(1)}(t) = \frac{\cos(\varphi(t)) \sin((4k+2)\omega_c t)}{2 \cdot 4k+2},$$

$$B_{2k+1,r}^{(1)}(t) = \frac{\cos(\varphi(t))}{2} \left( \frac{\sin((2k+1-r)\omega_c t)}{2k+1-r} + \frac{\sin((2k+1+r)\omega_c t)}{2k+1+r} \right),$$

при условии, что  $r \neq 2k+1$ , где  $\delta_{n,m}$  — символ Кронекера.

Рассчитаем нулевой порядок для  $S_r(t)$ :

$$S_1^{(0)}(t) = -2BJ_1(C)B_{1,1}^{(0)}(t) = -BJ_1(C)\sin(\varphi(t)),$$

$$S_2^{(0)}(t) = -2BJ_2(C)A_{2,2}^{(0)}(t) = -BJ_2(C)\cos(\varphi(t)),$$

$$S_3^{(0)}(t) = 2BJ_3(C)B_{3,3}^{(0)}(t) = BJ_3(C)\sin(\varphi(t)),$$

$$S_4^{(0)}(t) = 2BJ_4(C)A_{4,4}^{(0)}(t) = BJ_4(C)\cos(\varphi(t)),$$

где  $J_1, J_2, J_3, J_4$  — функции Бесселя первого рода 1, 2, 3 и 4 порядков соответственно.

Поправка первого порядка для  $S_r(t)$  (10) имеет вид

$$\Delta S_r(t) = B(J_0(C)A_{0,r}^{(1)}(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(C)A_{2k,r}^{(1)}(t) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(C)B_{2k+1,r}^{(1)}(t)).$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка;  $J_{2k}$  и  $J_{2k+1}$  — функции Бесселя  $2k$  и  $2k+1$  порядков.

### Применение метода PGC-ATAN для вычисления фазы $\varphi(t)$

Кратко опишем протокол действия метода PGC-ATAN, используемый для численного моделирования:

1. Зададим сигнал с детектора (1), с зависящей от времени фазой  $\varphi(t)$  и частотой модуляции  $\nu_c = 2 \cdot 10^4$  Гц. Рассмотрим два случая: медленное изменение фазы

$$\varphi(t) = \pi \cos(0,05\nu_c t), \quad \xi_{\max} \approx 0,025 \quad (11)$$

и быстрое изменение фазы

$$\varphi(t) = 16\pi \cos(0,05\nu_c t), \quad \xi_{\max} \approx 0,4. \quad (12)$$

2. Умножим сигнал (1) на  $\cos(r\omega_c t)$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$  и дискретизируем результат с частотой дискретизации  $\nu_d = 2 \cdot 10^6$  Гц.

3. Пропустим полученные векторы через ФНЧ-скользящее среднее (2) с порядком фильтрации  $P = 100$  (4). Получим четыре дискретизированных сигнала  $S_1(t), \dots, S_4(t)$ .

4. Применим процедуру арктангенса и вычислим искомую фазу:

$$\tilde{\varphi}(t) = \arctan \left( \sqrt{\frac{3 S_3(t)(S_3(t) - S_1(t))}{2 S_2(t)(S_2(t) - S_4(t))}} \right). \quad (13)$$

Равенство (13) справедливо благодаря известным свойствам функций Бесселя целого порядка.

Найденная таким образом фаза  $\tilde{\varphi}(t)$  будет отличаться от истинной фазы  $\varphi(t)$  из-за наличия поправок фильтрации. Найдем поправки первого порядка к фазе через поправку  $\Delta(t)$  к выражению

$$F(t) = \frac{3 S_3(t)(S_3(t) - S_1(t))}{2 S_2(t)(S_2(t) - S_4(t))} = \left( \frac{\sin(\varphi(t))}{\cos(\varphi(t))} \right)^2 (1 + \xi \Delta(t)). \quad (14)$$

Преобразуем выражение (14) с помощью формулы (10)

$$\Delta(t) = \frac{\Delta S_3(t)}{S_3^{(0)}(t)} + \frac{\Delta S_3(t) - \Delta S_1(t)}{S_3^{(0)}(t) - S_1^{(0)}(t)} - \frac{\Delta S_2(t)}{S_2^{(0)}(t)} - \frac{\Delta S_2(t) - \Delta S_4(t)}{S_2^{(0)}(t) - S_4^{(0)}(t)}.$$

Получим формулу для искаженной фазы с точностью первого порядка

$$\tilde{\varphi}(t) = \arctan(\sqrt{F(t)}) = \arctan \left( \frac{\sin(\varphi(t))}{\cos(\varphi(t))} \left( 1 + \frac{1}{2} \xi \Delta(t) \right) \right). \quad (15)$$

Вычисление арктангенса (15) даст искомую фазу с поправкой:

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + \xi \varphi^{(1)}(t). \quad (16)$$

В итоге запишем

$$\varphi^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \cos(\varphi(t)) \left( \left( \frac{1}{J_3(C)} + \frac{C}{4J_2(C)} \right) \Delta S_3(t) - \frac{C}{4J_2(C)} \Delta S_1(t) \right) + \frac{1}{2} \sin(\varphi(t)) \left( \left( \frac{1}{J_2(C)} + \frac{C}{6J_3(C)} \right) \Delta S_2(t) - \frac{C}{6J_3(C)} \Delta S_4(t) \right). \quad (17)$$

### Результаты

Результаты численного моделирования по методу PGC-ATAN представлены на рис. 2 и рис. 3. Полученные графики погрешностей демодуляции фазы, рассчитаны с помощью математического моделирования (экспериментальная погрешность  $\delta_{\text{exp}}(t) = \tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)$ ) и по формулам (16) и (17) (теоретическая погрешность  $\delta_{\text{th}}(t) = \xi(t)\varphi^{(1)}(t)$ ). На рис. 2 приведено сравнение погрешностей  $\delta_{\text{exp}}(t)$  и  $\delta_{\text{th}}(t)$  для медленного из-

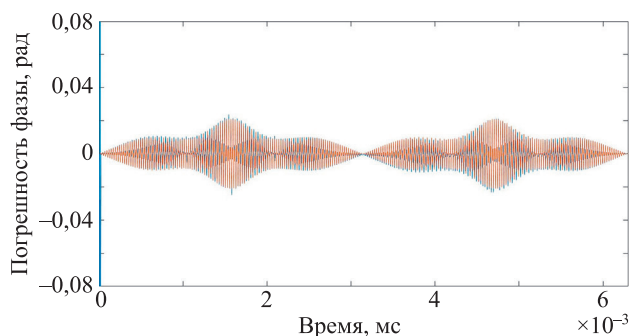


Рис. 2. Рассчитанная аналитическим методом погрешность  $\delta_{exp}(t)$  (синий цвет) и численный эксперимент  $\delta_{th}(t)$  (красный цвет) для небольшой скорости нагрева (11)

Fig. 2. Analytical calculated error  $\delta_{exp}(t)$  (in blue) and numerical experiment  $\delta_{th}(t)$  (in red) for a low heating rate (11)

менения фазы по формуле (11), на рис. 3 —  $\delta_{exp}(t)$  и  $\delta_{th}(t)$  для быстрого изменения фазы по формуле (12). Для периодического изменения фазы и ошибка изменяются периодически. На рисунках представлено несколько периодов. Ошибка велика в области максимальной скорости изменения фазы и мала в области минимальной скорости.

### Заключение

Исследованы погрешности в сигнале, создаваемые фильтром низких частот скользящего среднего. В рамках предыдущих исследований ошибки в сигналах  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $S_3(t)$ ,  $S_4(t)$  из-за фильтра низких частот исследованы не были. Фильтр низких частот скользящего

### Литература

1. Dandridge A., Tveten A.B., Giallorenzi T.G. Homodyne demodulation scheme for fiber optic sensors using phase generated carrier // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 1982. V. 18. N 10. P. 1647–1653. <https://doi.org/10.1109/jqe.1982.1071416>
2. McGarrity C., Jackson D. Improvement on phase generated carrier technique for passive demodulation of miniature interferometric sensors // *Optics Communications*. 1994. V. 109. N 3-4. P. 246–248. [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(94\)90687-4](https://doi.org/10.1016/0030-4018(94)90687-4)
3. Kersey A.D. A Review of recent developments in fiber optic sensor technology // *Optical Fiber Technology*. 1996. V. 2. N 3. P. 291–317. <https://doi.org/10.1006/ofte.1996.0036>
4. Wu K., Min Z., Liao Y. Signal dependence of the phase-generated carrier method // *Optical Engineering*. 2007. V. 46. N 10. P. 105602. <https://doi.org/10.1117/1.2799518>
5. Lin W.-W., Huang S.-C., Chen M.-H. Fiber optic microampere dc current sensor // *Optical Engineering*. 2003. V. 42. N 9. P. 2551–2557. <https://doi.org/10.1117/1.1597675>
6. Feng L., He J., Duan J.-Y., Li F., Liu Y.-L. Implementation of phase generated carrier technique for FBG laser sensor multiplexed system based on compact RIO // *Proc. 1st Asia-Pacific Optical Fiber Sensors Conference, APOS*. 2008. <https://doi.org/10.1109/APOS.2008.5226295>
7. Liu Y., Wang L., Tian C., Zhang M., Liao Y. Analysis and optimization of the PGC method in all digital demodulation systems // *Journal of Lightwave Technology*. 2008. V. 26. N 18. P. 3225–3233. <https://doi.org/10.1109/jlt.2008.928926>
8. He J., Wang L., Li F., Liu Y. An ameliorated phase generated carrier demodulation algorithm with low harmonic distortion and high stability // *Journal of Lightwave Technology*. 2010. V. 28. N 22. P. 3258–3265. <https://doi.org/10.1109/jlt.2010.2081347>
9. Azmi A.I., Leung I., Chen X., Zhou S., Zhu Q., Gao K., Childs P., Peng G. Fiber laser based hydrophone systems // *Photonic Sensors*.

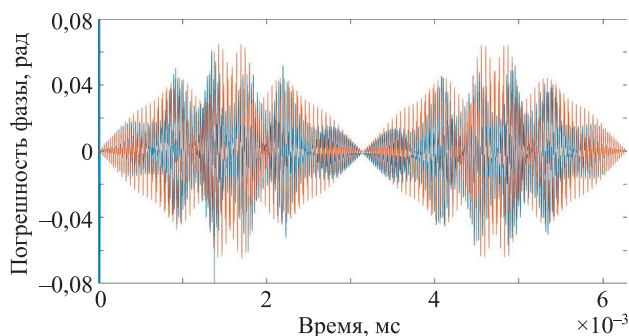


Рис. 3. Погрешности фазы интерференционного сигнала для быстрых процессов (12). Синим цветом показана теоретическая погрешность  $\delta_{th}(t)$ , красным — численный эксперимент  $\delta_{exp}(t)$

Fig. 3. Interference signal phase errors for fast processes (12). The theoretical error  $\delta_{th}(t)$  is shown in blue, numerical experiment  $\delta_{exp}(t)$  is shown in red

среднего был выбран неслучайно, он проще и идеально отфильтровывает все гармоники задающего генератора и правильно выделяет низкочастотную часть сигнала (при условии, что фаза не зависит от времени). Как следует из приведенного исследования, величина поправки к сигнальной фазе зависит от скорости ее изменения. Таким образом, динамический диапазон метода PGC-ATAN определяется не только величиной фазовых и амплитудных шумов, но и скоростью изменения сигнальной фазы. Полученные результаты позволяют улучшить качество метода PGC-ATAN и точнее определить его динамический диапазон.

### References

1. Dandridge A., Tveten A.B., Giallorenzi T.G. Homodyne demodulation scheme for fiber optic sensors using phase generated carrier. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1982, vol. 18, no. 10, pp. 1647–1653. <https://doi.org/10.1109/jqe.1982.1071416>
2. McGarrity C., Jackson D. Improvement on phase generated carrier technique for passive demodulation of miniature interferometric sensors. *Optics Communications*, 1994, vol. 109, no. 3-4, pp. 246–248. [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(94\)90687-4](https://doi.org/10.1016/0030-4018(94)90687-4)
3. Kersey A.D. A Review of recent developments in fiber optic sensor technology. *Optical Fiber Technology*, 1996, vol. 2, no. 3, pp. 291–317. <https://doi.org/10.1006/ofte.1996.0036>
4. Wu K., Min Z., Liao Y. Signal dependence of the phase-generated carrier method. *Optical Engineering*, 2007, vol. 46, no. 10, pp. 105602. <https://doi.org/10.1117/1.2799518>
5. Lin W.-W., Huang S.-C., Chen M.-H. Fiber optic microampere dc current sensor. *Optical Engineering*, 2003, vol. 42, no. 9, pp. 2551–2557. <https://doi.org/10.1117/1.1597675>
6. Feng L., He J., Duan J.-Y., Li F., Liu Y.-L. Implementation of phase generated carrier technique for FBG laser sensor multiplexed system based on compact RIO. *Proc. 1st Asia-Pacific Optical Fiber Sensors Conference, APOS*, 2008. <https://doi.org/10.1109/APOS.2008.5226295>
7. Liu Y., Wang L., Tian C., Zhang M., Liao Y. Analysis and optimization of the PGC method in all digital demodulation systems. *Journal of Lightwave Technology*, 2008, vol. 26, no. 18, pp. 3225–3233. <https://doi.org/10.1109/jlt.2008.928926>
8. He J., Wang L., Li F., Liu Y. An ameliorated phase generated carrier demodulation algorithm with low harmonic distortion and high stability. *Journal of Lightwave Technology*, 2010, vol. 28, no. 22, pp. 3258–3265. <https://doi.org/10.1109/jlt.2010.2081347>
9. Azmi A.I., Leung I., Chen X., Zhou S., Zhu Q., Gao K., Childs P., Peng G. Fiber laser based hydrophone systems. *Photonic Sensors*,

2011. V. 1. N 3. P. 210–221. <https://doi.org/10.1007/s13320-011-0018-3>
10. Plotnikov M.J., Kulikov A.V., Strigalev V.E., Meshkovsky I.K. Dynamic range analysis of the phase generated carrier demodulation technique // *Advances in Optical Technologies*. 2014. V. 2014. P. 815108. <https://doi.org/10.1155/2014/815108>
  11. Zhang A., Zhang S. High stability fiber-optics sensors with an improved PGC demodulation algorithm // *IEEE Sensors Journal*. 2016. V. 16. N 21. P. 7681–7684. <https://doi.org/10.1109/jSEN.2016.2604348>
  12. Беликин М.Н., Плотников М.Ю., Стригалеv В.Е., Куликов А.В., Киреевков А.Ю. Экспериментальное сравнение алгоритмов гомодинной демодуляции сигналов для фазового волоконно-оптического датчика // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2015. Т. 15. № 6. С. 1008–1014. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2015-15-6-1008-1014>
  13. Volkov A.V., Plotnikov M.Y., Mekhregin M.V., Miroshnichenko G.P., Aleynik A.S. Phase modulation depth evaluation and correction technique for the PGC demodulation scheme in fiber-optic interferometric sensors // *IEEE Sensors Journal*. 2017. V. 17. N 13. P. 4143–4150. <https://doi.org/10.1109/jSEN.2017.2704287>
  14. Zhang Z., Zhang Z., Cheng J., Kong Y., Zhang L., Zhang D., Zhuang S., Peng W., Wu F., Zhu Y., Cui X. An improved phase generated carrier demodulation algorithm with high stability and low harmonic distortion // *Optics Communications*. 2022. V. 524. P. 128800. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2022.128800>
  15. Zhang S., Chen Y., Chen B., Yan L., Xie J., Lou Y. A PGC-DCDM demodulation scheme insensitive to phase modulation depth and carrier phase delay in an EOM-based SPM interferometer // *Optics Communications*. 2020. V. 474. P. 126183. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126183>
  16. Li Q., Huang H., Lin F., Wu X. Optical micro-particle size detection by phase-generated carrier demodulation // *Optics Express*. 2016. V. 24. N 11. P. 11458–11465. <https://doi.org/10.1364/OE.24.011458>
  17. Yu Z., Dai H., Zhang M., Zhang J., Liu L., Jin X., Luo Y. High stability and low harmonic distortion PGC demodulation technique for interferometric optical fiber sensors // *Optics & Laser Technology*. 2019. V. 109. P. 8–13. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.07.055>
  18. Christian T.R., Frank P.A., Houston B.H. Real-time analog and digital demodulator for interferometric fiber optic sensors // *Proceedings of SPIE*. 1994. V. 2191. P. 324–336. <https://doi.org/10.1117/12.173962>
  19. Zhang S., Zhang A., Pan H. Eliminating light intensity disturbance with reference compensation in interferometers // *IEEE Photonics Technology Letters*. 2015. V. 27. N 17. P. 1888–1891. <https://doi.org/10.1109/lpt.2015.2444421>
  20. Tong Y., Zeng H., Li L., Zhou Y. Improved phase generated carrier demodulation algorithm for eliminating light intensity disturbance and phase modulation amplitude variation // *Applied Optics*. 2012. V. 51. N 29. P. 6962–6967. <https://doi.org/10.1364/AO.51.006962>
  21. Yang X., Chen Z., Ng J.H., Pallayil V., Unnikrishnan C.K.C. A PGC demodulation based on differential-cross-multiplying (DCM) and arctangent (ATAN) algorithm with low harmonic distortion and high stability // *Proceedings of SPIE*. 2012. V. 8421. P. 84215J. <https://doi.org/10.1117/12.974939>
  22. Wang G.-Q., Xu T.-W., Li F. PGC demodulation technique with high stability and low harmonic distortion // *IEEE Photonics Technology Letters*. 2012. V. 24. N 23. P. 2093–2096. <https://doi.org/10.1109/lpt.2012.2220129>
  23. He J., Li F., Zhang W., Wang L., Xu T., Liu Y. High performance wavelength demodulator for DFB fiber laser sensor using novel PGC algorithm and reference compensation method // *Proceedings of SPIE*. 2011. V. 7753. P. 775333. <https://doi.org/10.1117/12.885823>
  24. Zhang W., Xia H., Pan C., Huang W., Li F. Differential self-multiplying-integrate phase generated carrier method for fiber optic sensors // *Proceedings of SPIE*. 2014. V. 9233. P. 92331U. <https://doi.org/10.1117/12.2069764>
  25. Peng F., Hou L., Yang J., Yuan Y., Li C., Yan D., Yuan L., Zheng H., Chang Z., Ma K., Yang J. An improved fixed phased demodulation method combined with phase generated carrier (PGC) and ellipse fitting algorithm // *Proceedings of SPIE*. 2015. V. 9620. P. 96200S. <https://doi.org/10.1117/12.2190842>
  26. Wu B., Yuan Y., Yang J., Liang S., Yuan L. Optimized phase generated carrier (PGC) demodulation algorithm insensitive to C value // *Proceedings of SPIE*. 2015. V. 9655. P. 96550C. <https://doi.org/10.1117/12.2184268>
  - 2011, vol. 1, no. 3, pp. 210–221. <https://doi.org/10.1007/s13320-011-0018-3>
  10. Plotnikov M.J., Kulikov A.V., Strigalev V.E., Meshkovsky I.K. Dynamic range analysis of the phase generated carrier demodulation technique. *Advances in Optical Technologies*, 2014, vol. 2014, pp. 815108. <https://doi.org/10.1155/2014/815108>
  11. Zhang A., Zhang S. High stability fiber-optics sensors with an improved PGC demodulation algorithm. *IEEE Sensors Journal*, 2016, vol. 16, no. 21, pp. 7681–7684. <https://doi.org/10.1109/jSEN.2016.2604348>
  12. Belikin M.N., Plotnikov M.Yu., Strigalev V.E., Kulikov A.V., Kireenkov A.Yu. Experimental comparison of homodyne demodulation algorithms for phase fiber-optic sensor. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 6, pp. 1008–1014. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2015-15-6-1008-1014>
  13. Volkov A.V., Plotnikov M.Y., Mekhregin M.V., Miroshnichenko G.P., Aleynik A.S. Phase modulation depth evaluation and correction technique for the PGC demodulation scheme in fiber-optic interferometric sensors. *IEEE Sensors Journal*, 2017, vol. 17, no. 13, pp. 4143–4150. <https://doi.org/10.1109/jSEN.2017.2704287>
  14. Zhang Z., Zhang Z., Cheng J., Kong Y., Zhang L., Zhang D., Zhuang S., Peng W., Wu F., Zhu Y., Cui X. An improved phase generated carrier demodulation algorithm with high stability and low harmonic distortion. *Optics Communications*, 2022, vol. 524, pp. 128800. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2022.128800>
  15. Zhang S., Chen Y., Chen B., Yan L., Xie J., Lou Y. A PGC-DCDM demodulation scheme insensitive to phase modulation depth and carrier phase delay in an EOM-based SPM interferometer. *Optics Communications*, 2020, vol. 474, pp. 126183. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126183>
  16. Li Q., Huang H., Lin F., Wu X. Optical micro-particle size detection by phase-generated carrier demodulation. *Optics Express*, 2016, vol. 24, no. 11, pp. 11458–11465. <https://doi.org/10.1364/OE.24.011458>
  17. Yu Z., Dai H., Zhang M., Zhang J., Liu L., Jin X., Luo Y. High stability and low harmonic distortion PGC demodulation technique for interferometric optical fiber sensors. *Optics & Laser Technology*, 2019, vol. 109, pp. 8–13. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.07.055>
  18. Christian T.R., Frank P.A., Houston B.H. Real-time analog and digital demodulator for interferometric fiber optic sensors. *Proceedings of SPIE*, 1994, vol. 2191, pp. 324–336. <https://doi.org/10.1117/12.173962>
  19. Zhang S., Zhang A., Pan H. Eliminating light intensity disturbance with reference compensation in interferometers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2015, vol. 27, no. 17, pp. 1888–1891. <https://doi.org/10.1109/lpt.2015.2444421>
  20. Tong Y., Zeng H., Li L., Zhou Y. Improved phase generated carrier demodulation algorithm for eliminating light intensity disturbance and phase modulation amplitude variation. *Applied Optics*, 2012, vol. 51, no. 29, pp. 6962–6967. <https://doi.org/10.1364/AO.51.006962>
  21. Yang X., Chen Z., Ng J.H., Pallayil V., Unnikrishnan C.K.C. A PGC demodulation based on differential-cross-multiplying (DCM) and arctangent (ATAN) algorithm with low harmonic distortion and high stability. *Proceedings of SPIE*, 2012, vol. 8421, pp. 84215J. <https://doi.org/10.1117/12.974939>
  22. Wang G.-Q., Xu T.-W., Li F. PGC demodulation technique with high stability and low harmonic distortion. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2012, vol. 24, no. 23, pp. 2093–2096. <https://doi.org/10.1109/lpt.2012.2220129>
  23. He J., Li F., Zhang W., Wang L., Xu T., Liu Y. High performance wavelength demodulator for DFB fiber laser sensor using novel PGC algorithm and reference compensation method. *Proceedings of SPIE*, 2011, vol. 7753, pp. 775333. <https://doi.org/10.1117/12.885823>
  24. Zhang W., Xia H., Pan C., Huang W., Li F. Differential self-multiplying-integrate phase generated carrier method for fiber optic sensors. *Proceedings of SPIE*, 2014, vol. 9233, pp. 92331U. <https://doi.org/10.1117/12.2069764>
  25. Peng F., Hou L., Yang J., Yuan Y., Li C., Yan D., Yuan L., Zheng H., Chang Z., Ma K., Yang J. An improved fixed phased demodulation method combined with phase generated carrier (PGC) and ellipse fitting algorithm. *Proceedings of SPIE*, 2015, vol. 9620, pp. 96200S. <https://doi.org/10.1117/12.2190842>
  26. Wu B., Yuan Y., Yang J., Liang S., Yuan L. Optimized phase generated carrier (PGC) demodulation algorithm insensitive to C value. *Proceedings of SPIE*, 2015, vol. 9655, pp. 96550C. <https://doi.org/10.1117/12.2184268>

27. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / 2-е изд., пер. с англ. Н. Я. Виленкина, М.: Наука, 1974. С. 15.

- Proceedings of SPIE*, 2015, vol. 9655, pp. 96550C. <https://doi.org/10.1117/12.2184268>  
27. Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. McGraw-Hill, 1954.

#### Авторы

**Мирошниченко Георгий Петрович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 55401299600](https://orcid.org/0000-0002-4265-8818), <https://orcid.org/0000-0002-4265-8818>, [gpmirosh@gmail.com](mailto:gpmirosh@gmail.com)

**Аржаненкова Алина Николаевна** — аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 57674300400](https://orcid.org/0000-0003-4869-2838), <https://orcid.org/0000-0003-4869-2838>, [11arzh11@gmail.com](mailto:11arzh11@gmail.com)

**Плотников Михаил Юрьевич** — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 57193069973](https://orcid.org/0000-0003-2506-0379), <https://orcid.org/0000-0003-2506-0379>, [plotnikov-michael@yandex.ru](mailto:plotnikov-michael@yandex.ru)

#### Authors

**George P. Miroshnichenko** — D.Sc. (Physics & Mathematics), Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 55401299600](https://orcid.org/0000-0002-4265-8818), <https://orcid.org/0000-0002-4265-8818>, [gpmirosh@gmail.com](mailto:gpmirosh@gmail.com)

**Alina N. Arzhanenkova** — PhD Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 57674300400](https://orcid.org/0000-0003-4869-2838), <https://orcid.org/0000-0003-4869-2838>, [11arzh11@gmail.com](mailto:11arzh11@gmail.com)

**Michael Yu. Plotnikov** — PhD, Senior Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 57193069973](https://orcid.org/0000-0003-2506-0379), <https://orcid.org/0000-0003-2506-0379>, [plotnikov-michael@yandex.ru](mailto:plotnikov-michael@yandex.ru)

*Статья поступила в редакцию 13.03.2023*  
*Одобрена после рецензирования 05.05.2023*  
*Принята к печати 18.07.2023*

*Received 13.03.2023*  
*Approved after reviewing 05.05.2023*  
*Accepted 18.07.2023*



Работа доступна по лицензии  
Creative Commons  
«Attribution-NonCommercial»