

doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-293-305

УДК 532.529

Применение метода решеточных уравнений Больцмана для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости

Никита Александрович Брыков¹, Константин Николаевич Волков²✉, Владислав Николаевич Емельянов³, Семен Сергеевич Толстогузов⁴

^{1,2,3,4} Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация

¹ brykovna@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>

² dsci@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>

³ vlademelyanov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>

⁴ semen.tolstoguzov96@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9560-2693>

Аннотация

Введение. Рассмотрены возможности моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости при помощи метода решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM). В отличие от классического макроскопического подхода, основанного на решении уравнений Навье–Стокса, в методе решеточных уравнений Больцмана используется мезоскопическая модель для моделирования течений жидкости. Макроскопические параметры жидкости, такие как плотность и скорость, выражаются через моменты дискретной функции распределения. **Метод.** Дискретизация решеточного уравнения Больцмана осуществляется при помощи схем D2Q9 (двумерный случай) и D3Q19 (трехмерный случай). Для моделирования столкновений между псевдочастицами применяется приближение Бхатнагара–Гросса–Крука с одним временем релаксации. Обсуждаются особенности постановки начальных и граничных условий на различных границах расчетной области. **Основные результаты.** Развиваются представления о закономерностях формирования вихревых течений в квадратной каверне, а также пространственных струйных потоков внутри крупномасштабных вихревых структур в пределах замкнутого пространства кубической каверны. Выполнено сравнение результатов расчетов характеристик течения в квадратной и кубической каверне при различных числах Рейнольдса с данными, имеющимися в литературе и полученными на основе метода конечных объемов. Исследована зависимость численного решения, а также положения критических точек на стенках кубической каверны от размера сетки. Выполнено сравнение времени счета со скоростью вычислений в методе конечных разностей и методе конечных объемов. **Обсуждение.** Разработанная реализация метода решеточных уравнений Больцмана представляет интерес для перехода к последующему моделированию неизотермических и высокоскоростных течений.

Ключевые слова

уравнение Больцмана, решеточное уравнение Больцмана, решетка, вязкая жидкость, каверна, вихрь, функция тока, критическая точка, визуализация

Благодарности

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект «Математическое моделирование на суперЭВМ экс- и зеттафлопсной производительности»).

Ссылка для цитирования: Брыков Н.А., Волков К.Н., Емельянов В.Н., Толстогузов С.С. Применение метода решеточных уравнений Больцмана для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 2. С. 293–305. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-293-305

Application of lattice Boltzmann method to solution of viscous incompressible fluid dynamics problems

Nikita A. Brykov¹, Konstantin N. Volkov²✉, Vladislav N. Emelyanov³, Semen S. Tolstoguzov⁴

^{1,2,3,4} Baltic State Technical University, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation

¹ brykovna@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>

² dsci@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>

³ vlademelyanov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>

⁴ semen.tolstoguzov96@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9560-2693>

Abstract

The possibilities of simulation of viscous incompressible fluid flows with lattice Boltzmann method are considered. Unlike the traditional discretization approach based on the use of Navier–Stokes equations, the lattice Boltzmann method uses a mesoscopic model to simulate incompressible fluid flows. Macroscopic parameters of a fluid, such as density and velocity, are expressed through the moments of the discrete probability distribution function. Discretization of the lattice Boltzmann equation is carried out using schemes D2Q9 (two-dimensional case) and D3Q19 (three-dimensional case). To simulate collisions between pseudo-particles, the Bhatnagar–Gross–Crooke approximation with one relaxation time is used. The specification of initial and boundary conditions (no penetration and no-slip conditions, outflow conditions, periodic conditions) is discussed. The patterns of formation and development of vortical flows in a square cavity and cubic cavities are computed. The results of calculations of flow characteristics in a square and cubic cavity at various Reynolds numbers are compared with data available in the literature and obtained based on the finite difference method and the finite volume method. The dependence of the numerical solution and location of critical points on faces of cubic cavity on the lattice size is studied. Computational time is compared with performance of fine difference and finite volume methods. The developed implementation of the lattice Boltzmann method is of interest for the transition to further modeling non-isothermal and high-speed compressible flows.

Keywords

Boltzmann equation, lattice Boltzmann equation, lattice, viscous fluid, cavity, vortex, stream function, critical point, visualization

Acknowledgements

The research was carried out within the framework of the scientific program of the National Center for Physics and Mathematics (project “Mathematical modeling on supercomputers with exa- and zettaflop performance”).

For citation: Brykov N.A., Volkov K.N., Emelyanov V.N., Tolstoguzov S.S. Application of lattice Boltzmann method to solution of viscous incompressible fluid dynamics problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 293–305 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-293-305

Введение

Традиционный подход к решению задач динамики вязкой жидкости основан на численном решении уравнений Навье–Стокса. Среди других подходов к моделированию течений вязкой несжимаемой жидкости применение находит метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) [1–4]. В LBM течение сплошной среды рассматривается как движение большого набора частиц с некоторой функцией распределения по дискретным скоростям. В основе метода лежит кинетическое уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука (Bhatnagar Gross–Krook, BGK). Решеточные уравнения Больцмана получаются из модели BGK путем ограничения числа возможных молекулярных скоростей некоторым дискретным набором и заменой дифференциальных операторов разностными соотношениями.

К достоинствам LBM относится простота реализации и вычислительная эффективность, а также широкие возможности для распараллеливания, которые определяются локальностью вычислений. При решении уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости LBM имеет сходство с псевдосжимаемыми методами, которые обеспечивают простоту и масштабируемость вычислительной процедуры за счет введения искусственной сжимаемости. Как и псевдосжимаемые методы, LBM позволяет избежать решения уравнения

Пуассона, нелокальность которого ограничивает производительность вычислительной процедуры. Тяжелые вычисления в LBM являются локальными (ограничены узлами), что способствует его производительности и распараллеливанию. В то же время LBM обладает низкой устойчивостью и невыполнением условия сеточной сходимости, для устранения которых проводится процедура регуляризации [5].

LBM используется для моделирования течений в областях сложной геометрической формы с учетом различных физических эффектов (пористые и многофазные среды, течения со свободной поверхностью и теплопереносом) [6–11]. При моделировании многокомпонентных и многофазных течений диапазон вязкостей и плотностей является несколько ограниченным [12, 13].

Одним из недостатков LBM является ограничение на число Маха (скорости частиц принадлежат к дискретному набору). Для сохранения эффективности LBM в широком диапазоне параметров разрабатываются его различные модификации, приемлемые для моделирования неизоэнтальпических и высокоскоростных течений [14–17]. Модели, предназначенные для моделирования сжимаемых течений, обсуждаются в работах [18–22].

В гибридном подходе предполагается совместное решение кинетического уравнения Больцмана в тех областях, где функция распределения в существенной

степени отличается от равновесной, и решеточных уравнений Больцмана там, где отклонение функции распределения от равновесной сравнительно невелико [23, 24]. На границах различных подобластей производится сшивка решений, полученных при помощи различных подходов. Реализация гибридного метода приводит к экономии вычислительных ресурсов без уменьшения точности вычислений.

Разработки в области LBM доведены до программных комплексов с открытым исходным кодом, которые применяются для решения задач различного класса. К комплексам с открытым исходным кодом, в частности, относится пакет, реализация которого обсуждается в работах [25, 26] и предназначенный для моделирования течений со свободными границами.

Несмотря на популярность LBM и имеющиеся многочисленные примеры его реализации и практического использования, представляет интерес оценка возможностей подхода для моделирования вихревых течений вязкой несжимаемой жидкости. В настоящей работе метод решеточных уравнений Больцмана применяется для решения двух широко распространенных задач, связанных с расчетом характеристик потоков в квадратной и кубической кавернах с подвижной верхней стенкой. Результаты численного моделирования сравниваются с литературными данными. Для оценки вычислительной эффективности различных подходов проводится сравнение времени счета при помощи LBM и конечно-объемными подходами. Определяются направления дальнейших исследований, связанных с расширением границ применимости LBM.

Уравнение Больцмана с дискретными скоростями

Рассмотрим кинетическое уравнение Больцмана для одночастичной функции распределения $f(\mathbf{r}, \xi, t)$ (действием внешних сил пренебрегается)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \nabla f = \Omega(f, f), \quad (1)$$

где t — время; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор; $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ — вектор скорости частицы; $\Omega(f, f)$ — оператор столкновений.

Макроскопические характеристики жидкости, например, плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$ и скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, находятся как моменты функции распределения (интегрирование проводится по всем возможным скоростям ξ).

Дискретизация уравнения (1) проводится в пространстве скоростей, ограничиваясь небольшим числом точек, определенных в каждом элементе пространства. Решетка представляет собой равномерную по пространственным координатам сетку с ячейками определенной формы. Предполагается, что за шаг по времени возмущения передаются не далее, чем на шаг решетки. Такой подход обеспечивает вычислительную эффективность, но ограничивает область применимости LBM задачами, близкими к равновесным. При этом используется виртуальная система единиц, в которой единицы времени и расстояния не связаны с физическими единицами измерения.

Выберем в пространстве скоростей некоторый конечный набор дискретных скоростей \mathbf{c}_k , где $k = 0, \dots, m$. Каждой дискретной скорости соответствует функция распределения $f_k(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_k, t)$, которая зависит только от времени и пространственных координат. Выбор набора дискретных скоростей позволяет свести уравнение (1) к системе уравнений относительно функций распределения f_k . Уравнение Больцмана с дискретными скоростями имеет вид

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{c}_k \nabla f_k = \Omega_k, \quad (2)$$

где \mathbf{c}_k — вектор дискретной решеточной скорости в направлении k .

Из уравнения (2), рассматривая равномерную по пространственным переменным сетку с шагом Δx и предполагая, что частицы за шаг по времени Δt перемещаются в соседние узлы решетки (размер ячейки $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{c}_k \Delta t$), получим решеточное уравнение Больцмана

$$f_k(\mathbf{r} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\mathbf{r}, t) + \Omega_k[f_k(\mathbf{r}, t)]. \quad (3)$$

В LBM для представления оператора столкновений обычно используется приближение BGK (BGK collision model)

$$\Omega_k = \frac{1}{\tau} \{f_k^e[\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] - f_k(\mathbf{r}, t)\},$$

где τ — параметр релаксации (изменяется от 0,5 до 2); f_k^e — равновесная функция распределения; \mathbf{u} — макроскопическая скорость. Равновесная функция распределения по скоростям (Maxwell–Boltzmann model) раскладывается в ряд Тейлора (сохраняются слагаемые до 3-го порядка малости)

$$f_k^e(\rho, \mathbf{u}) = w_k \rho \left[1 + \frac{\mathbf{c}_k \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c_s^2} \right], \quad (4)$$

где $c_s^2 = c^2/3$ — виртуальная (решеточная) скорость звука (скорость переноса возмущений на сетке), где $c = \Delta x/\Delta t$. Под w_k в соотношении (4) понимаются весовые коэффициенты, различные для разных моделей решеток. Обычно весовые коэффициенты подбираются таким образом, чтобы применение к уравнению (2) метода Чепмена–Энскога приводило к уравнениям Навье–Стокса.

В практике численных расчетов широкое распространение получил однопараметрический вариант интеграла столкновений (Single Relaxation Time, SRT). Многопараметрическое представление релаксационного оператора (Multiple Relaxation Time, MRT) позволяет повысить устойчивость численных расчетов при высоких числах Рейнольдса [5]. Применение такого подхода к дискретизации интервала столкновений приводит к увеличению числа степеней свободы (производится переход от фазового пространства к пространству моментов и используется матрица столкновений).

Плотность и макроскопическая скорость жидкости в узлах решетки находятся из соотношений

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^m f_k(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^m \mathbf{c}_k f_k(\mathbf{r}, t).$$

Давление полагается пропорциональным плотности

$$p(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)c_s^2.$$

В связи с дискретностью вычислений, численные значения скорости и расстояния соотносятся не с реальными, а с виртуальными значениями. Например, единичная скорость означает перемещение на шаг решетки за шаг по времени, а при единичном шаге сетки и времени виртуальная плотность численно равняется виртуальному давлению. Кинематическая вязкость жидкости определяется через параметр релаксации

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta t.$$

Уравнение (3) имеет строгое теоретическое обоснование только при малых скоростях потока. Для расширения области применимости LBM на высокоскоростные течения, когда начинает играть роль сжимаемость, функция распределения в уравнении (3) раскладывается в ряд Тейлора по степеням шага по времени. При сохранении двух членов ряда полученные уравнения отличаются от уравнений Навье–Стокса, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости, на величины 2-го порядка малости по шагу по времени и числу Маха. Число Маха рассчитывается по формуле $M = u/c_s$, где u — масштаб скорости задачи, а c_s — скорость звука. Для обеспечения устойчивости расчетов необходимо чтобы $M < 0,1$. При необходимости число Маха (число Куранта) уменьшается либо при помощи измельчения сетки, либо при помощи уменьшения параметра релаксации (безопасным значением является $\tau = 1$, что соответствует максимальному значению числа Маха).

Метод решения

Решеточное уравнение Больцмана представляется в следующем виде:

$$\underbrace{f_k(\mathbf{r} + \mathbf{e}_k \Delta t, t + \Delta t) - f_k(\mathbf{r}, t)}_{\text{перенос}} = - \underbrace{\frac{\Delta t}{\tau} [f_k(\mathbf{r}, t) - f_k^e(\mathbf{r}, t)]}_{\text{релаксация}},$$

где $k = 0, \dots, m$. Для решения решеточного уравнения Больцмана применяется схема расщепления. На шаге по времени сначала происходит перенос, а затем — релаксация к равновесной функции распределения. Метод

реализуется в виде следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Происходят столкновения частиц (collision step), которые описываются локальным взаимодействием частиц в узлах решетки (применяется модель абсолютно упругого столкновения). Столкновения частиц в узлах решетки приводят к изменению функции распределения, которая на промежуточном шаге находится из соотношения

$$\tilde{f}_k(\mathbf{r}, t) = f_k(\mathbf{r}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_k(\mathbf{r}, t) - f_k^e(\mathbf{r}, t)].$$

Тильда соответствует функции распределения после столкновения, а f_k^e находится с помощью f_k .

Шаг 2. Происходит перенос частиц (streaming step), когда частицы перемещаются между узлами решетки, не взаимодействуя друг с другом. Вдоль направления скорости k имеем

$$f_k(\mathbf{r} + \mathbf{e}_k \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_k(\mathbf{r}, t).$$

Схему расщепления демонстрирует рис. 1, где одни частицы поступают из центрального узла к его соседям, а другие частицы возвращаются обратно. Направления движения частиц показывают цветные стрелки. При этом длина стрелки примерно соответствует расстоянию, которое проходит частица за один шаг по времени.

Пространственные решетки

В отличие от классического макроскопического подхода, основанного на решении уравнений Навье–Стокса, LBM использует модель промежуточного масштаба для моделирования течения жидкости. В LBM решетка (lattice) представляет собой набор разрешенных векторов скорости, причем такой набор остается одинаковым для всех узлов. Любая решетка в зависимости от размерности задачи и набора дискретных скоростей обозначается как $DpQq$ (рис. 2), где p — размерность физического пространства, а q — число возможных скоростей. Форма ячеек решетки является произвольной, но для декартовых координат наиболее приемлемой является прямоугольная решетка. Разрешенные направления являются одинаковыми для всех узлов решетки. Нулевой вектор, направленный из узла в себя самого, описывает частицы, которые не дви-

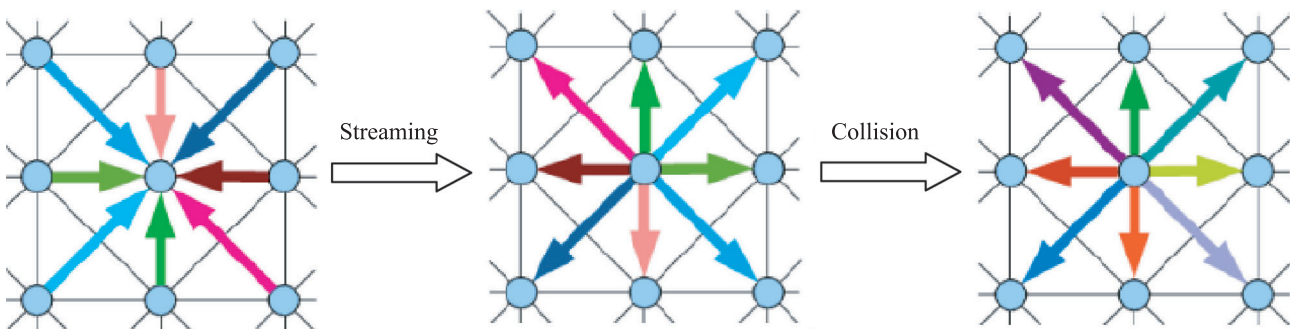


Рис. 1. Изменение функции распределения на шаге по времени

Fig. 1. Changing the distribution function at a time step

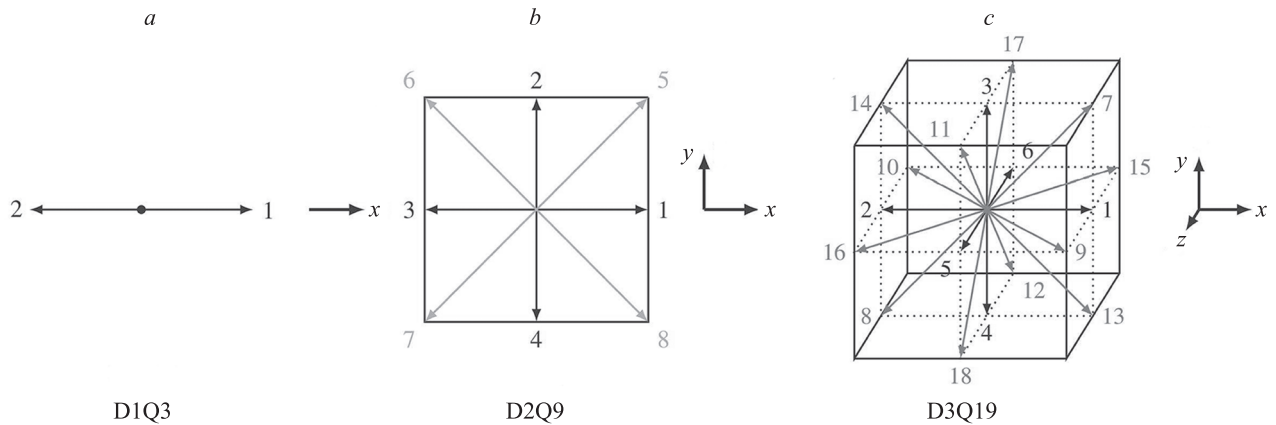


Рис. 2. Возможные векторы скорости частиц для моделей: D1Q3 (a); D2Q9 (b); D3Q19 (c)

Fig. 2. Possible particle velocity vectors for models: D1Q3 (a), D2Q9 (b), D3Q19 (c)

жуются из текущего узла и находятся в покое. Стрелки указывают возможные направления скоростей c_k , где $k = 0, \dots, m$ представляет собой индекс направления.

Выбор решетки определяется точностью моделирования (расширенный набор дискретных скоростей позволяет повысить точность моделирования), доступными вычислительными ресурсами. Наиболее распространенными моделями для двумерных и трехмерных задач являются решетки D2Q9 и D3Q19.

Весовые коэффициенты выбираются таким образом, чтобы обеспечить равномерное движение частиц между соседними ячейками. Весовые коэффициенты принимают значения:

— модель D2Q9

$$w_k = \begin{cases} \frac{4}{9} & \text{при } k = 0 \\ \frac{1}{9} & \text{при } k = 1, \dots, 4 \\ \frac{1}{36} & \text{при } k = 5, \dots, 8 \end{cases};$$

— модель D3Q19

$$w_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{при } k = 0 \\ \frac{1}{18} & \text{при } k = 1, \dots, 6 \\ \frac{1}{36} & \text{при } k = 7, \dots, 18 \end{cases}.$$

Скорости в узлах решетки принимают значения:

— модель D2Q9

$$c_k = \begin{cases} (0, 0) & \text{при } i = 0 \\ (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) & \text{при } i = 1, \dots, 4 \\ (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1) & \text{при } i = 5, \dots, 8 \end{cases};$$

— модель D3Q19

$$c_k = \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{при } i = 0 \\ (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1) & \text{при } i = 1, \dots, 6 \\ (\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1) & \text{при } i = 7, \dots, 18 \end{cases}.$$

За масштабы длины и времени принимаются пространственный и временной шаг сетки. Шаг по вре-

мени выбирается таким образом, чтобы при переходе на новый временной слой частица попадала в соседний узел сетки.

Начальные и граничные условия

В начальный момент времени функция распределения полагается равной равновесной функции распределения $f(\mathbf{r}, 0) = f^e(\mathbf{r}, 0)$. В LBM необходимо определить соотношения для вычисления функции распределения на границах расчетной области.

Условие отскока применяется для реализации условий непротекания и прилипания на твердой стенке. Такой подход имеет сходство с использованием фиктивных узлов или ячеек, находящихся за границами расчетной области, в которых скорость меняет знак на противоположный (условие зеркального отражения). Граница между жидкостью и стенкой располагается между слоями приграничных ячеек. В слое ячеек, примыкающих к физической границе области, релаксации к равновесной функции распределения не происходит. В этом слое ячеек функции распределения принимают значения функций распределения частиц, которые двигаются в противоположном направлении. Частицы, попавшие в этот слой ячеек, возвращаются на следующем шаге в поток.

Периодические граничные условия используются для воспроизведения повторяющихся условий течения (при достижении границы области функция распределения перемещается на противоположную границу). Поток выше линии симметрии является зеркальным отображением потока ниже линии симметрии, поэтому интегрирование выполняется только для одной части области.

На границе, через которую поток покидает расчетную область, задаются условия свободного вытекания (производная от функции распределения по нормали к выходной границе обращается в нуль).

Результаты расчетов

Для проверки и сравнения точности различных подходов к описанию течений вязкой несжимаемой

жидкости и дискретизации уравнений Навье–Стокса используется задача о течении в квадратной (двумерная задача) или кубической (трехмерная задача) каверне с подвижной верхней крышкой. Характерные особенности вихревых течений, формирующихся в квадратной и кубической каверне, наблюдаются и в более сложных вихревых и отрывных течениях [27, 28].

Постановка задачи. Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости рассматривается в замкнутой полости. Течение в замкнутом объеме квадратной или кубической каверны индуцируется движением верхней стенки с постоянной скоростью U вдоль оси x . Скорость перемещения верхней крышки полагается равной $U = 1$ м/с. Длина ребра полости составляет $L = 1$ м. Дискретизация основных уравнений производится на декартовой сетке с одинаковым числом узлов в различных координатных направлениях. Число узлов в координатном направлении k полагается равным N_k . Число узлов в квадратной каверне — N_k^2 , а в кубической — N_k^3 .

Характерным параметром задачи, определяющим особенности формирующего течения в замкнутом объеме квадратной или кубической каверны, является число Рейнольдса $Re = \rho UL/\mu$. В расчетах плотность жидкости считается фиксированной и равной $\rho = 1,2$ кг/м³. Варьирование числом Рейнольдса осуществляется за счет надлежающего изменения динамической вязкости μ . При этом изменение динамической вязкости и числа Рейнольдса обуславливает изменение времени релаксации.

В начальный момент времени $t = 0$ используются условия покоя жидкости. Скорость жидкости полагается равной нулю, а давлению присваивается значение $p = 10^5$ Па. На стенках каверны для тангенциальной и нормальной компонент скорости применяются граничные условия прилипания и непротекания.

Квадратная каверна. Число Рейнольдса изменяется в интервале от 0 до 5000. Расчеты проводятся на сетках с различной разрешающей способностью.

Обработку поля течения в каверне при помощи традиционных средств визуализации (линии уровня

и заливка цветом) показывает рис. 3. Применение текстового подхода для визуализации течения в квадратной каверне показывает рис. 4 при различных числах Рейнольдса.

Профили продольной и поперечной компонент скорости в срединном сечении каверны показаны на рис. 5 при $Re = 1000$. Сплошные линии соответствуют результатам численного моделирования на основе LBM, а значки — данным физического эксперимента [29]. Наблюдается достаточно хорошее согласие расчетов с литературными данными. При высоких числах Рейнольдса распределение продольной компоненты скорости имеет зигзагообразную форму [27], что обусловливается смещением неравномерного пристеночного потока, который увлекается в движение верхней стенкой, и потока, который циркулирует в крупномасштабном вихре [27].

Для оценки качества и критерия точности численного решения применяются координаты центров различных вихревых образований (основной вихрь P, вторичные угловые вихри L и R вблизи неподвижной нижней стенки) и значения функции тока в них. Результаты расчетов в безразмерном виде при помощи LBM приводятся в табл. 1 при $Re = 100$ (x_p — продольная координата центра, y_p — поперечная координата центра, ψ_m — значение функции тока). Результаты численного моделирования достаточно хорошо согласуются с данными [29].

Влияние числа Рейнольдса на результаты расчетов течения в квадратной каверне показывает табл. 2. Результаты расчетов хорошо согласуются с литературными данными [29–38] в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Кубическая каверна. В расчетах течения в кубической каверне число Рейнольдса варьируется в интервале от 0 до 2000. Число узлов составляет 81^3 .

Распределения компонент скорости приводятся на рис. 6 (сплошные линии) в сравнении с расчетными данными [39] (сетка 63^3) и [40] (сетка 51^3). Сравнение с данными двумерного моделирования течения в квадратной каверне показывает, что в трехмерном случае

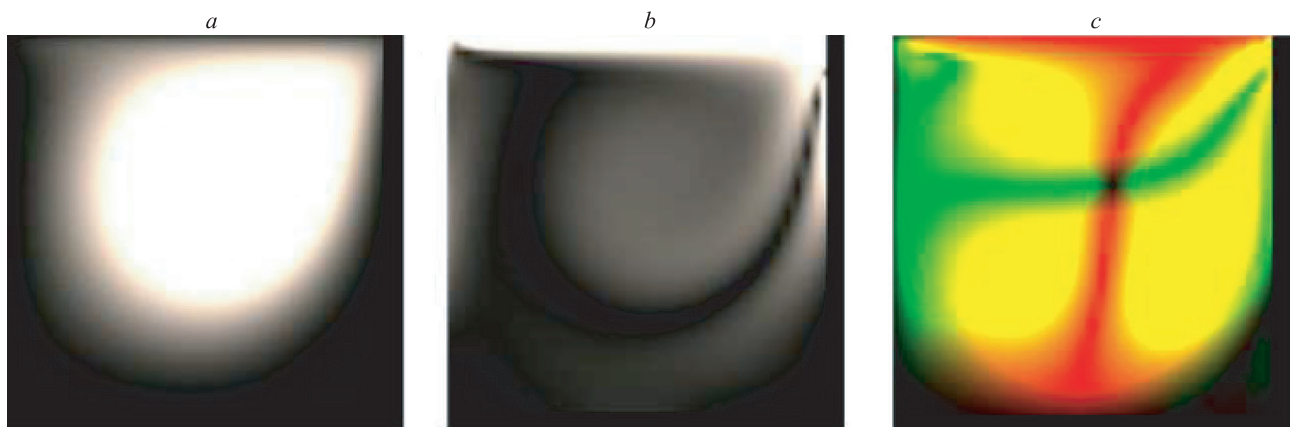


Рис. 3. Распределения функции тока (a), завихренности (b) и компонент вектора скорости (c) в каверне при $Re = 500$. На фрагменте (c) красный цвет соответствует продольной скорости, а зеленый — поперечной скорости

Fig. 3. Distributions of the stream function (a), vorticity (b) and velocity vector components (c) in the cavern at $Re = 500$. On the fragment, the red color corresponds to the longitudinal velocity, and the green color corresponds to the transverse velocity

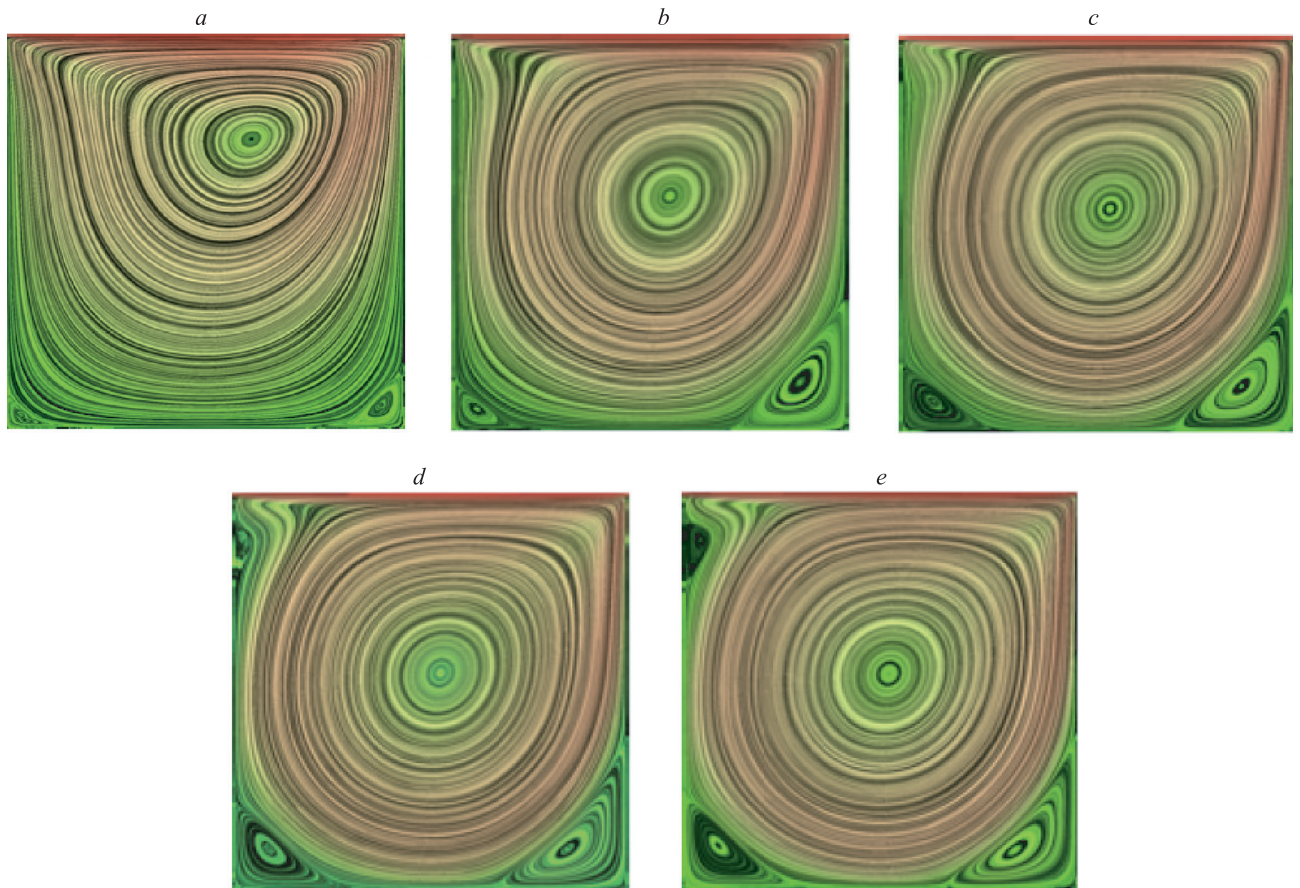


Рис. 4. Линии тока течения в квадратной камере при Re равном: 100 (a); 500 (b); 1000 (c); 2000 (d); 2500 (e)
 Fig. 4. Streamlines in a square cavity at Re: 100 (a), 500 (b), 1000 (c), 2000 (d), 2500 (e)

величина скорости ниже. При этом с увеличением числа Рейнольдса разница между значениями скорости в квадратной и кубической камерах также увеличивается. В то время, как при $Re = 100$ такой различие остается практически неразличимым, при увеличении числа Рейнольдса до 400 максимальная разница достигает 13 %, а при увеличении числа Рейнольдса до 1000 различие составляет 23 %.

Линии тока в различных сечениях кубической камеры показывают рис. 7 и рис. 8 (при $Re = 100$ и $Re = 400$).

Результаты решения задачи о течении в камере при помощи LBM не столь многочисленны по сравнению с другими подходами к дискретизации уравнений Навье–Стокса (конечно-разностные методы, конечно-объемные методы, спектральные методы и другие).

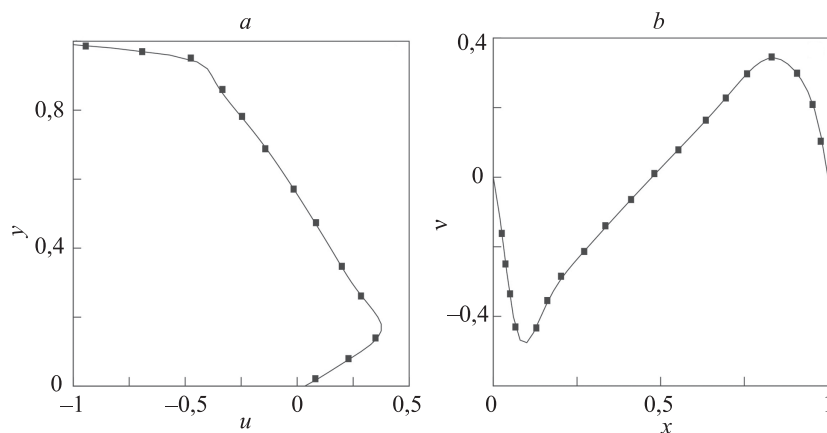


Рис. 5. Профили компонент скорости в квадратной камере при $Re = 1000$, полученные на основе LBM (сплошные линии) и экспериментальных данных [29] (символы ■): продольная скорость (a), поперечная скорость (b)

Fig. 5. Distributions of longitudinal (a) and transverse (b) velocity components in a square cavity at $Re = 1000$, obtained with calculations (solid lines) and experimental data [29] (symbols ■)

Таблица 1. Результаты расчетов течения в квадратной каверне на сетках различного разрешения при $Re = 100$
 Table 1. Influence of mesh size on the results of calculations of flow in a square cavity at $Re = 100$

Сетка	Вихрь P			Вихрь L			Вихрь R		
	x_p	y_p	Ψ_m	x_p	y_p	Ψ_m	x_p	y_p	Ψ_m
81^2	0,6125	0,7375	0,1032	0,0324	0,0365	$-1,22 \cdot 10^{-6}$	0,9375	0,0641	$-1,00 \cdot 10^{-5}$
101^2	0,6143	0,7361	0,1034	0,0321	0,0375	$-1,62 \cdot 10^{-6}$	0,9410	0,0620	$-1,62 \cdot 10^{-5}$
129^2	0,6172	0,7344	0,1034	0,0313	0,0391	$-1,75 \cdot 10^{-6}$	0,9453	0,0625	$-1,25 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2. Влияние числа Рейнольдса на результаты расчетов течения в квадратной каверне
 Table 2. Influence of the Reynolds number on the results of calculations of flow in a square cavity

Re	Вихрь P			Вихрь L			Вихрь R			Ссылка
	x_p	y_p	Ψ_m	x_p	y_p	Ψ_m	x_p	y_p	Ψ_m	
400	0,5547	0,6055	0,1139	0,0508	0,0469	$-1,42 \cdot 10^{-5}$	0,8906	0,1250	$-6,42 \cdot 10^{-4}$	[29]
	0,5608	0,6078	0,1121	0,0549	0,0510	$-1,30 \cdot 10^{-5}$	0,8902	0,1255	$-6,19 \cdot 10^{-4}$	[32]
	0,5547	0,6055	0,1113	0,0508	0,0469	$-1,25 \cdot 10^{-5}$	0,8867	0,1211	$-5,94 \cdot 10^{-4}$	Расчет
1000	0,5313	0,5625	0,1179	0,0859	0,0781	$-2,31 \cdot 10^{-4}$	0,8594	0,1094	$-1,75 \cdot 10^{-3}$	[29]
	0,5333	0,5647	0,1178	0,0902	0,0784	$-2,22 \cdot 10^{-4}$	0,8667	0,1137	$-1,69 \cdot 10^{-3}$	[32]
	0,5313	0,5664	0,1142	0,0820	0,0742	$-1,84 \cdot 10^{-4}$	0,8633	0,1094	$-1,60 \cdot 10^{-3}$	Расчет
5000	0,5117	0,5352	0,1190	0,0703	0,1367	$-1,36 \cdot 10^{-3}$	0,8086	0,0742	$-3,08 \cdot 10^{-3}$	[29]
	0,5176	0,5373	0,1214	0,0784	0,1373	$-1,35 \cdot 10^{-3}$	0,8078	0,0745	$-3,03 \cdot 10^{-3}$	[32]
	0,5156	0,5586	0,1030	0,0781	0,1405	$-1,79 \cdot 10^{-4}$	0,8086	0,0741	$-2,93 \cdot 10^{-3}$	Расчет

Результаты сравнения точности решения задачи при помощи различных подходов представляют несомненный интерес.

Для обработки результатов расчетов обычно применяются линии растекания жидкости по стенкам куба (такие результаты приводятся на рис. 7 и рис. 8). В дополнение к этому применяется строгий математический аппарат для определения положения и типа критических точек на стенках каверны (обычно для этого также используются картины линий тока, а тип критической точки определяется визуальным образом). Для визуализации критических точек применяется тензор гра-

диента скорости и линеаризация соответствующих соотношений, что позволяет определить тип критической точки на основе знаков и значений собственных чисел якобиана [41]. Несмотря на то, что в математике такой подход хорошо известен, примеры его применения к визуализации решений уравнений динамики вязкой жидкости являются немногочисленными.

Анализ собственных чисел якобиана указывает на наличие особых точек типа фокуса, центра и седла. Положение критических точек на гранях кубической каверны зависит от числа Рейнольдса [41]. Связь между типом и числом особых точек устанавливает теоре-

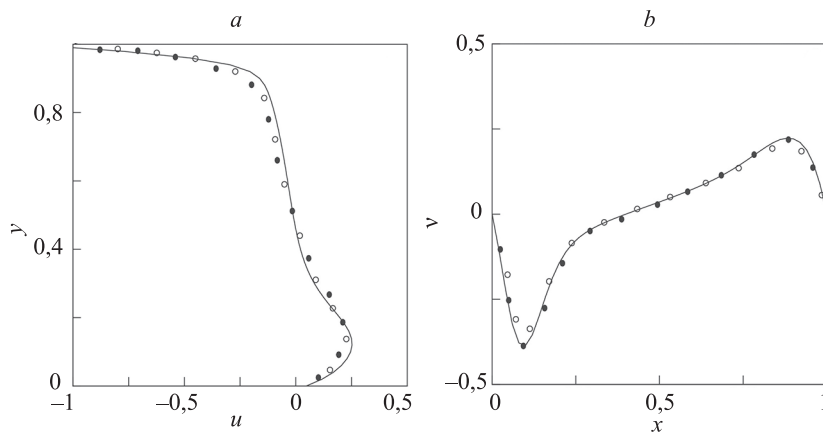


Рис. 6. Профили скорости в срединном сечении кубической каверны при $Re = 400$, полученные на основе LBM (сплошные линии) и экспериментальных данных [39] (символы \circ) и [40] (символы \bullet): продольной скорости (a), поперечная скорость (b)
 Fig. 6. Distributions of longitudinal (a) and transverse (b) velocity in the middle section of a cubic cavern at $Re = 400$ obtained with calculations (solid lines) and experimental data [39] (symbols \circ) and [40] (symbols \bullet)

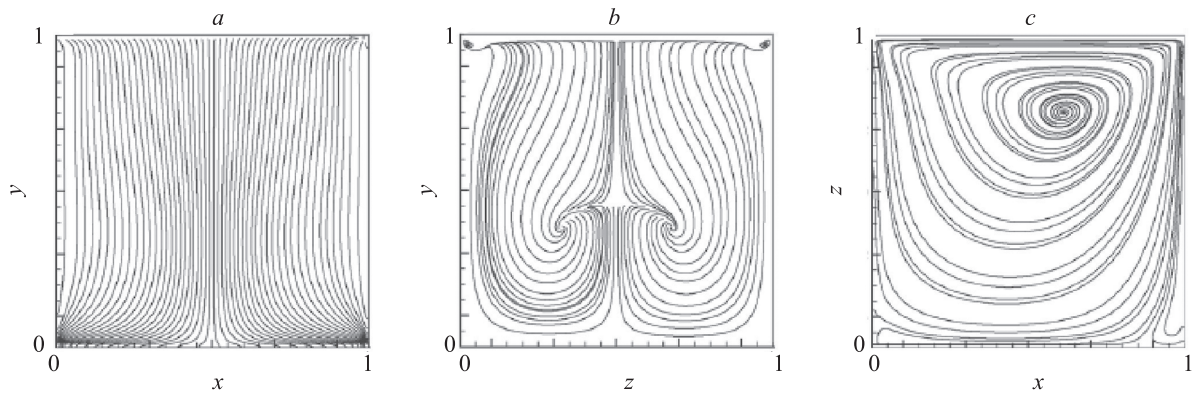


Рис. 7. Линии тока в кубической камере при $Re = 100$: плоскость xy (a); плоскость yz (b); плоскость xz (c)
 Fig. 7. Streamlines in the middle planes xy (a), yz (b) and xz (c) at $Re = 100$

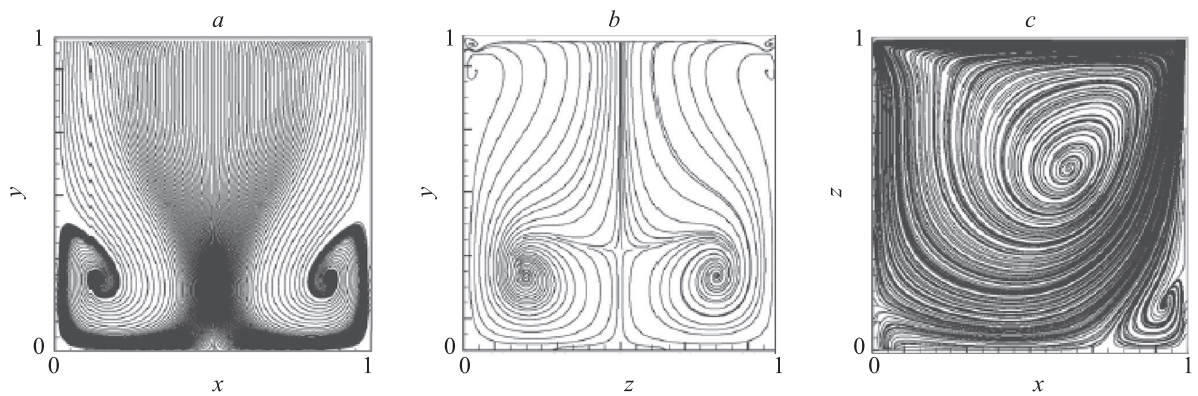


Рис. 8. Линии тока в кубической камере при $Re = 400$: плоскость xy (a); плоскость yz (b); плоскость xz (c)
 Fig. 8. Streamlines in the middle planes xy (a), yz (b) and xz (c) at $Re = 400$

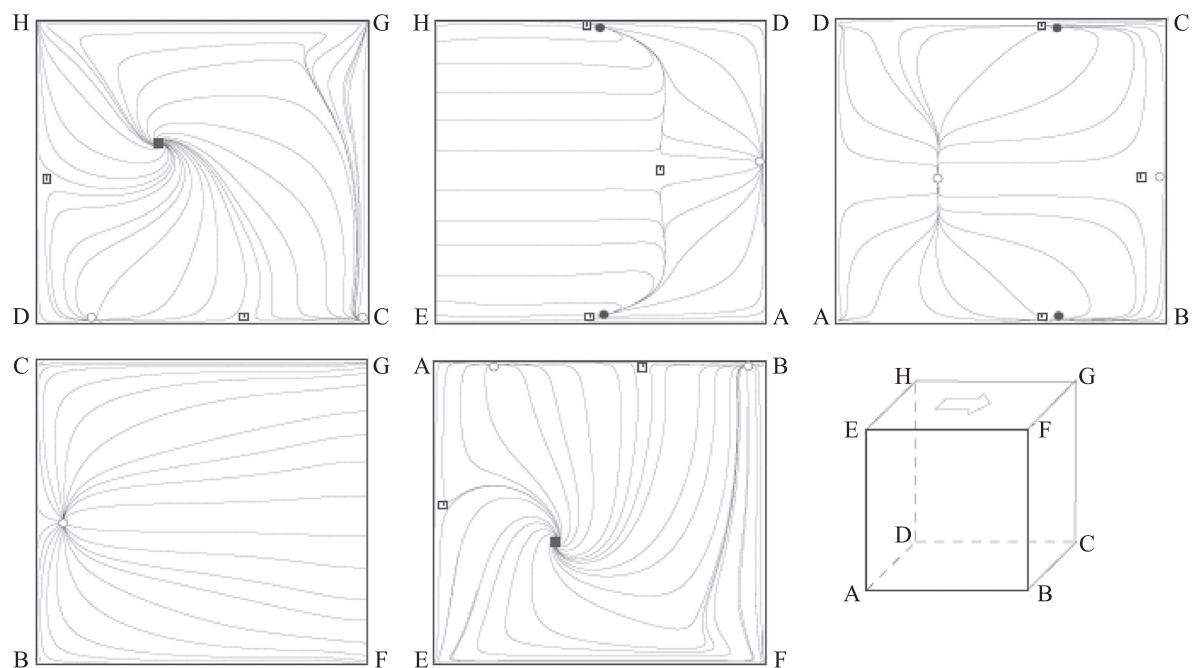


Рис. 9. Предельные линии тока при $Re = 1000$ (□ — седловая точка, ● — устойчивый узел, ○ — неустойчивый узел, ■ — устойчивый фокус)
 Fig. 9. Limiting streamlines at $Re = 1000$ (□ — saddle point, ● — stable node, ○ — unstable node, ■ — stable focus)

ма Пуанкаре–Бендиксона ($N_c - N_s = 2$, где N_c — число узлов или центров, N_s — число седловых точек). Например, при числе Рейнольдса, равном 1000, получим, что $N_s = 10$ и $N_c = 12$.

В целом, результаты расчетов характеристик течения, полученные при помощи LBM, достаточно хорошо согласуются с литературными данными [39, 40]. Увеличение числа Рейнольдса приводит к интенсификации вихревого движения в кубической каверне. При увеличении числа Рейнольдса (уменьшение вязкости) происходит перемещение центра крупномасштабного вихря к геометрическому центру каверны, а также увеличению размеров вторичных угловых вихрей вблизи нижней стенки каверны. Влияние боковых стенок кубической каверны сказывается на уменьшении скоростей возвратных течений по сравнению с квадратной каверной при таком же числе Рейнольдса. Такие изменения структуры пространственного течения в кубической каверне согласуются с теми, которые наблюдаются в работах [27, 28] при изменении числа Рейнольдса от 0 до 2000.

Координаты критических точек на стенках каверны, которые получены при помощи обработки результатов, рассчитанных при помощи LBM и конечно-объемных методов [28, 41], хорошо согласуются между собой, а максимальная ошибка не превышает 3–5 %.

Сравнение времени счета. Время расчета течения в кубической каверне с подвижной верхней крышкой при помощи LBM сравнивается с временем счета, необходимым для достижения сходимости при помощи конечно-объемных подходов [41]. Помимо LBM, уравнения Навье–Стокса решаются при помощи схемы расщепления по физическим процессам (метод NS1). Реализация схемы расщепления приводит к необходимости решения уравнения Пуассона для давления на каждом шаге по времени. В качестве другого подхода к решению уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости рассматривается метод псевдосжимаемости (метод NS2). Особенности реализации методов NS1 и NS2 излагаются в работе [28].

LBM является явным, поэтому для дискретизации уравнений Навье–Стокса применяются явные конечно-разностные схемы. Для дискретизации по времени используется явная схема Эйлера, а для дискретизации конвективных и вязких потоков — разности против потока и центральные разности 2-го порядка точности.

Сравнение времени счета, необходимого для достижения сходимости, показывает рис. 10 (течение в кубической каверне при $Re = 1000$). Время счета нормируется на максимальное время счета, соответствующее расчету при помощи метода NS1 на самой подробной сетке. При использовании подробных сеток LBM в существенной степени проигрывает в скорости расчетов по уравнениям Навье–Стокса, для интегрирования которых используется метод псевдосжимаемости, но выигрывает перед подходами, основанными на схеме расщепления по физическим процессам (решение

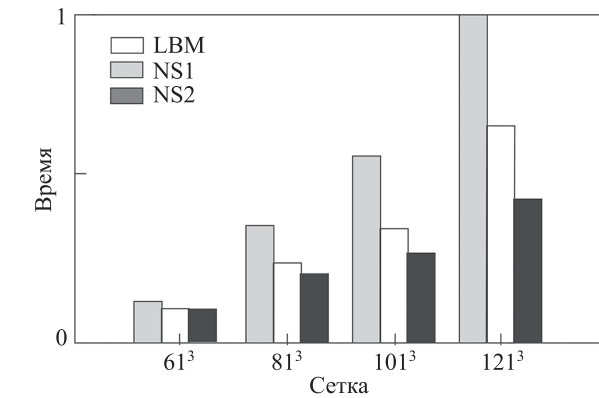


Рис. 10. Время счета, необходимое для решения задачи о течении в кубической каверне при помощи LBM (белый цвет), схемы расщепления по физическим процессам (серый цвет) и метода псевдосжимаемости (черный цвет)
 Fig. 10. Computation time required to solve the problem of flow in a cubic cavern using the LBM (white color), the splitting scheme by physical processes (gray color) and the pseudo-compressibility method (black color)

уравнения Пуассона для давления требует нелокальных подходов).

Заключение

Рассмотрены особенности реализации и применения метода решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости. Возможности подхода продемонстрированы на примере моделирования течений в квадратной и кубической кавернах с подвижной верхней стенкой. Результаты численного моделирования согласуются с имеющимися численными решениями и экспериментальными данными, представленными в литературе.

LBM позволяет получить характеристики потока, которые согласуются с результатами численного моделирования, полученными при помощи методов конечных объемов. Сравнение с эталонными решениями показывает, что LBM позволяет получить распределение характеристик потока с погрешностью, не превышающей 3–5 %. Отклонение локальных значений скорости от значений, полученных другими методами, объясняется неявным представлением макроскопических граничных условий при помощи мезоскопической функции распределения в LBM.

При использовании подробных сеток LBM в существенной степени проигрывает в скорости расчетов уравнений Навье–Стокса при помощи метода псевдосжимаемости, но выигрывает перед подходами, в которых требуется решение уравнения Пуассона для давления.

Направления дальнейших исследований связаны с реализацией LBM для моделирования неизотермических течений и течений сжимаемого газа.

Литература

1. Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggan E.M. *The lattice Boltzmann method: Principles and Practice*. Springer, 2017. 694 p.
2. Rivet J.P., Boon J.P. *Lattice Gas Hydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 289 p.
3. Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford, Clarendon Press, 2001. 288 p.
4. Чащин Г.С. Метод решёточных уравнений Больцмана: моделирование изотермических низкоскоростных течений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 99. 31 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-99>
5. Захаров А.М., Сенин Д.С., Грачев Е.А. Моделирование течений методом решёточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. № 1. С. 644–657.
6. Rahmati A.R., Ashrafizaadeh M. A generalized Lattice Boltzmann Method for three-dimensional incompressible fluid flow simulation // *Journal of Applied Fluid Mechanics*. 2009. V. 2. N 1. P. 71–96. <https://doi.org/10.36884/jafm.2.01.11858>
7. Anupindi K., Lai W., Frankel S. Characterization of oscillatory instability in lid driven cavity flows using lattice Boltzmann method // *Computers and Fluids*. 2014. V. 20. N 92. P. 7–21. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.12.015>
8. Aslan E., Taymaz I., Benim A.C. Investigation of the Lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow // *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*. 2014. V. 2. P. 317–324. <https://doi.org/10.7763/ijmmm.2014.v2.149>
9. Yuana K.A., Budiana E.P., Deendarlianto, Indarto. Modeling and simulation of top and bottom lid driven cavity using Lattice Boltzmann Method // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. V. 546. N 5. P. 052088. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/546/5/052088>
10. Huang T., Lim H.-C. Simulation of lid-driven cavity flow with internal circular obstacles // *Applied Sciences*. 2020. V. 10. N 13. P. 4583. <https://doi.org/10.3390/app10134583>
11. Yang J.-Y., Hung L.-H. A three-dimensional semiclassical Lattice Boltzmann Method for lid-driven cubic cavity flows // *Journal of Fluid Science and Technology*. 2011. V. 6. N 5. P. 780–791. <https://doi.org/10.1299/jfst.6.780>
12. Belardinelli D., Sbragaglia M., Biferale L., Gross M., Varnik F. Fluctuating multicomponent lattice Boltzmann model // *Physical Review E*. 2015. V. 91. N 2. P. 023313. <https://doi.org/10.1103/physreve.91.023313>
13. Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *International Journal of Multiphase Flow*. 2003. V. 29. N 1. P. 117–169. [https://doi.org/10.1016/s0301-9322\(02\)00108-8](https://doi.org/10.1016/s0301-9322(02)00108-8)
14. Asinari P., Ohwada T. Connection between kinetic methods for fluid-dynamic equations and macroscopic finite-difference schemes // *Computers and Mathematics with Applications*. 2009. V. 58. N 5. P. 841–861. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.02.009>
15. Mattila K., Hyväluoma J., Timonen J., Rossi T. Comparison of implementations of the lattice-Boltzmann method // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. V. 55. N 7. P. 1514–1524. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.08.001>
16. Szalmás L. Multiple-relaxation time lattice Boltzmann method for the finite Knudsen number region // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2007. V. 379. N 2. P. 401–408. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.01.013>
17. Tsutahara M., Kataoka T., Shikata K., Takada N. New model and scheme for compressible fluids of the finite difference lattice Boltzmann method and direct simulations of aerodynamic sound // *Computers and Fluids*. 2008. V. 37. N 1. P. 79–89. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2005.12.002>
18. Yu H., Zhao K. Lattice Boltzmann method for compressible flows with high Mach numbers // *Physics Review E*. 2000. V. 61. N 4. P. 3867–3870. <https://doi.org/10.1103/physreve.61.3867>
19. Kataoka T., Tsutahara M. Lattice Boltzmann model for the compressible Navier–Stokes equations with flexible specific-heat ratio // *Physics Review E*. 2004. V. 69. N 3. Part. 2. P. 035701. <https://doi.org/10.1103/physreve.69.035701>
20. Sun C., Hsu A. Multi-level lattice Boltzmann model on square lattice for compressible flows // *Computers and Fluids*. 2004. V. 33. N 10. P. 1363–1385. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2003.12.001>

References

1. Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggan E.M. *The lattice Boltzmann method: Principles and Practice*. Springer, 2017, 694 p.
2. Rivet J.P., Boon J.P. *Lattice Gas Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2001, 289 p.
3. Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford, Clarendon Press, 2001, 288 p.
4. Chashchin G.S. Lattice Boltzmann method: simulation of isothermal low-speed flows. *Keldysh Institute Preprints*, 2021, vol. 99, 31 p. (in Russian). <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-99>
5. Zakharov A.M., Senin D.S., Grachev E.A. Flow simulation by the lattice boltzmann method with multiple-relaxation times. *Numerical Methods and Programming*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 644–657. (in Russian)
6. Rahmati A.R., Ashrafizaadeh M. A generalized Lattice Boltzmann Method for three-dimensional incompressible fluid flow simulation. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 1, pp. 71–96. <https://doi.org/10.36884/jafm.2.01.11858>
7. Anupindi K., Lai W., Frankel S. Characterization of oscillatory instability in lid driven cavity flows using lattice Boltzmann method. *Computers and Fluids*, 2014, vol. 20, no. 92, pp. 7–21. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.12.015>
8. Aslan E., Taymaz I., Benim A.C. Investigation of the Lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 2014, vol. 2, pp. 317–324. <https://doi.org/10.7763/ijmmm.2014.v2.149>
9. Yuana K.A., Budiana E.P., Deendarlianto, Indarto. Modeling and simulation of top and bottom lid driven cavity using Lattice Boltzmann Method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 546, no. 5, pp. 052088. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/546/5/052088>
10. Huang T., Lim H.-C. Simulation of lid-driven cavity flow with internal circular obstacles. *Applied Sciences*, 2020, vol. 10, no. 13, pp. 4583. <https://doi.org/10.3390/app10134583>
11. Yang J.-Y., Hung L.-H. A three-dimensional semiclassical Lattice Boltzmann Method for lid-driven cubic cavity flows. *Journal of Fluid Science and Technology*, 2011, vol. 6, no. 5, pp. 780–791. <https://doi.org/10.1299/jfst.6.780>
12. Belardinelli D., Sbragaglia M., Biferale L., Gross M., Varnik F. Fluctuating multicomponent lattice Boltzmann model. *Physical Review E*, 2015, vol. 91, no. 2, pp. 023313. <https://doi.org/10.1103/physreve.91.023313>
13. Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications. *International Journal of Multiphase Flow*, 2003, vol. 29, no. 1, pp. 117–169. [https://doi.org/10.1016/s0301-9322\(02\)00108-8](https://doi.org/10.1016/s0301-9322(02)00108-8)
14. Asinari P., Ohwada T. Connection between kinetic methods for fluid-dynamic equations and macroscopic finite-difference schemes. *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, vol. 58, no. 5, pp. 841–861. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.02.009>
15. Mattila K., Hyväluoma J., Timonen J., Rossi T. Comparison of implementations of the lattice-Boltzmann method. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, vol. 55, no. 7, pp. 1514–1524. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.08.001>
16. Szalmás L. Multiple-relaxation time lattice Boltzmann method for the finite Knudsen number region. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, vol. 379, no. 2, pp. 401–408. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.01.013>
17. Tsutahara M., Kataoka T., Shikata K., Takada N. New model and scheme for compressible fluids of the finite difference lattice Boltzmann method and direct simulations of aerodynamic sound. *Computers and Fluids*, 2008, vol. 37, no. 1, pp. 79–89. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2005.12.002>
18. Yu H., Zhao K. Lattice Boltzmann method for compressible flows with high Mach numbers. *Physics Review E*, 2000, vol. 61, no. 4, pp. 3867–3870. <https://doi.org/10.1103/physreve.61.3867>
19. Kataoka T., Tsutahara M. Lattice Boltzmann model for the compressible Navier–Stokes equations with flexible specific-heat ratio. *Physics Review E*, 2004, vol. 69, no. 3, part. 2, pp. 035701. <https://doi.org/10.1103/physreve.69.035701>
20. Sun C., Hsu A. Multi-level lattice Boltzmann model on square lattice for compressible flows. *Computers and Fluids*, 2004, vol. 33, no. 10, pp. 1363–1385. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2003.12.001>

21. He B., Chen Y., Feng W., Li Q., Song A., Wang Y., Zhang M., Zhang W. Compressible lattice Boltzmann method and applications // *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2012. V. 9. N 2. P. 410–418.
22. Li K., Zhong C. A lattice Boltzmann model for simulation of compressible flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2015. V. 77. N 6. P. 334–357. <https://doi.org/10.1002/fld.3984>
23. Chikatamarla S., Karlin I. Lattices for the lattice Boltzmann method // *Physics Review E*. 2009. V. 79. N 4. P. 046701. <https://doi.org/10.1103/physreve.79.046701>
24. Ильин О.В. Метод моделирования динамики разреженного газа на основе решеточных уравнений Больцмана и уравнения БГК // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018. Т. 58. № 11. С. 1889–1899. <https://doi.org/10.31857/S004446690003540-5>
25. Ataei M., Shaayegan V., Costa F., Han S., Park C.B., Bussmann M. LBfoam: an open-source software package for the simulation of foaming using the lattice Boltzmann method // *Computer Physics Communications*. 2021. V. 259. P. 107698. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107698>
26. Latt J., Malaspina O., Kontaxakis D., Parmigiani A., Lagrava D., Brogi F., Belgacem M.B., Thorimbert Y., Leclaire S., Li S., Marson F., Lemus J., Kotsalos C., Conradin R., Coreixas C., Petkantchin R., Raynaud F., Beny J., Chopard B. Palabos: parallel lattice Boltzmann solver // *Computers and Mathematics with Applications*. 2021. V. 81. P. 334–350. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.03.022>
27. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) / под ред. А.В. Ермишина и С.А. Исаева. М.: Изд-во МГУ, 2001. 360 с.
28. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012. 468 с.
29. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // *Journal of Computational Physics*. 1982. V. 48. N 3. P. 387–411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)
30. Schreiber R., Keller H.B. Driven cavity flows by efficient numerical techniques // *Journal of Computational Physics*. 1983. V. 49. N 2. P. 310–333. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90129-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90129-8)
31. Vanka S.P. Block-implicit multigrid solution of Navier–Stokes equations in primitive variables // *Journal of Computational Physics*. 1986. V. 65. N 1. P. 138–158. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90008-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90008-2)
32. Hou S., Zou Q., Chen S., Doolen G., Cogley A. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method // *Journal of Computational Physics*. 1995. V. 118. N 2. P. 329–347. <https://doi.org/10.1006/jcph.1995.1103>
33. Gupta M.M., Kalita J.C. A new paradigm for solving Navier–Stokes equations: streamfunction–velocity formulation // *Journal of Computational Physics*. 2005. V. 207. N 1. P. 52–68. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.002>
34. Pandit S.K. On the use of compact streamfunction–velocity formulation of steady Navier–Stokes equations on geometries beyond rectangular // *Journal of Science and Computers*. 2008. V. 36. N 2. P. 219–242. <https://doi.org/10.1007/s10915-008-9186-8>
35. Lin L.S., Chen Y.C., Lin C.A. Multi relaxation time lattice Boltzmann simulations of deep lid driven cavity flows at different aspect ratios // *Computers and Fluids*. 2011. V. 45. N 1. P. 233–240. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.12.012>
36. Mishra N., Sanyasiraju Y.V.S.S. Exponential compact higher order scheme for steady incompressible Navier–Stokes equations // *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*. 2012. V. 6. N 4. P. 541–555. <https://doi.org/10.1080/19942060.2012.11015441>
37. Bruneau C.-H., Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier–Stokes equations // *Journal of Computational Physics*. 1990. V. 89. N 2. P. 389–413. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90149-u](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90149-u)
38. Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // *Computers and Fluids*. 1998. V. 27. N 4. P. 421–433. [https://doi.org/10.1016/s0045-7930\(98\)00002-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7930(98)00002-4)
39. Babu V., Korpela S.A. Numerical solution of the incompressible three-dimensional Navier–Stokes equations // *Computers and Fluids*. 1994. V. 23. N 5. P. 675–691. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(94\)90009-4](https://doi.org/10.1016/0045-7930(94)90009-4)
21. He B., Chen Y., Feng W., Li Q., Song A., Wang Y., Zhang M., Zhang W. Compressible lattice Boltzmann method and applications. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2012, vol. 9, no. 2, pp. 410–418.
22. Li K., Zhong C. A lattice Boltzmann model for simulation of compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2015, vol. 77, no. 6, pp. 334–357. <https://doi.org/10.1002/fld.3984>
23. Chikatamarla S., Karlin I. Lattices for the lattice Boltzmann method. *Physics Review E*, 2009, vol. 79, no. 4, pp. 046701. <https://doi.org/10.1103/physreve.79.046701>
24. Ilyin, O.V. A Method for Simulating the dynamics of rarefied gas based on lattice Boltzmann equations and the BGK equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 11, pp. 1817–1827. <https://doi.org/10.1134/S0965542518110052>
25. Ataei M., Shaayegan V., Costa F., Han S., Park C.B., Bussmann M. LBfoam: an open-source software package for the simulation of foaming using the lattice Boltzmann method. *Computer Physics Communications*, 2021, vol. 259, pp. 107698. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107698>
26. Latt J., Malaspina O., Kontaxakis D., Parmigiani A., Lagrava D., Brogi F., Belgacem M.B., Thorimbert Y., Leclaire S., Li S., Marson F., Lemus J., Kotsalos C., Conradin R., Coreixas C., Petkantchin R., Raynaud F., Beny J., Chopard B. Palabos: parallel lattice Boltzmann solver. *Computers and Mathematics with Applications*, 2021, vol. 81, pp. 334–350. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.03.022>
27. *Control of Flow Around Bodies with Vortex Cells as Applied to Aircraft of an Integral Configuration (Numerical and Physical Modeling)*. Ed. by A.V. Ermishin, S.A. Isaev. Moscow, MSU, 2001, 360 p. (in Russian)
28. Volkov K.N., Emelianov V.N. *Computational Technologies in Problems of Fluid and Gas Mechanics*. Moscow, Fizmatlit, 2012, 468 p. (in Russian)
29. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 1982, vol. 48, no. 3, pp. 387–411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)
30. Schreiber R., Keller H.B. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 49, no. 2, pp. 310–333. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90129-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90129-8)
31. Vanka S.P. Block-implicit multigrid solution of Navier–Stokes equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics*, 1986, vol. 65, no. 1, pp. 138–158. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90008-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90008-2)
32. Hou S., Zou Q., Chen S., Doolen G., Cogley A. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, 1995, vol. 118, no. 2, pp. 329–347. <https://doi.org/10.1006/jcph.1995.1103>
33. Gupta M.M., Kalita J.C. A new paradigm for solving Navier–Stokes equations: streamfunction–velocity formulation. *Journal of Computational Physics*, 2005, vol. 207, no. 1, pp. 52–68. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.002>
34. Pandit S.K. On the use of compact streamfunction–velocity formulation of steady Navier–Stokes equations on geometries beyond rectangular. *Journal of Science and Computers*, 2008, vol. 36, no. 2, pp. 219–242. <https://doi.org/10.1007/s10915-008-9186-8>
35. Lin L.S., Chen Y.C., Lin C.A. Multi relaxation time lattice Boltzmann simulations of deep lid driven cavity flows at different aspect ratios. *Computers and Fluids*, 2011, vol. 45, no. 1, pp. 233–240. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.12.012>
36. Mishra N., Sanyasiraju Y.V.S.S. Exponential compact higher order scheme for steady incompressible Navier–Stokes equations. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2012, vol. 6, no. 4, pp. 541–555. <https://doi.org/10.1080/19942060.2012.11015441>
37. Bruneau C.-H., Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 1990, vol. 89, no. 2, pp. 389–413. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90149-u](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90149-u)
38. Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers and Fluids*, 1998, vol. 27, no. 4, pp. 421–433. [https://doi.org/10.1016/s0045-7930\(98\)00002-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7930(98)00002-4)
39. Babu V., Korpela S.A. Numerical solution of the incompressible three-dimensional Navier–Stokes equations. *Computers and Fluids*,

40. Sheu T.W.H., Tsai S.F. Flow topology in a steady three-dimensional lid-driven cavity // *Computers and Fluids*. 2002. V. 31. N 8. P. 911–934. [https://doi.org/10.1016/s0045-7930\(01\)00083-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7930(01)00083-4)
41. Волков К.Н. Топология течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической камере с подвижной крышкой // *Инженерно-физический журнал*. 2006. Т. 79. № 2. С. 86–91.

1994, vol. 23, no. 5, pp. 675–691. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(94\)90009-4](https://doi.org/10.1016/0045-7930(94)90009-4)

40. Sheu T.W.H., Tsai S.F. Flow topology in a steady three-dimensional lid-driven cavity. *Computers and Fluids*, 2002, vol. 31, no. 8, pp. 911–934. [https://doi.org/10.1016/s0045-7930\(01\)00083-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7930(01)00083-4)
41. Volkov K.N. Topology of an incompressible viscous-fluid flow in a cubic cavity with a moving cover. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2006, vol. 79, no. 2, pp. 295–300. <https://doi.org/10.1007/s10891-006-0100-7>

Авторы

Брыков Никита Александрович — кандидат технических наук, доцент, доцент, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация, [sc 57209849110](https://orcid.org/0000-0002-3568-7522), <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>, brykovna@yandex.ru

Волков Константин Николаевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация, [sc 8663950000](https://orcid.org/0000-0001-6055-2323), <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>, dsci@mail.ru

Емельянов Владислав Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация, [sc 7004697417](https://orcid.org/0000-0002-7039-9948), <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>, vlademelyanov@gmail.com

Толстогузов Семен Сергеевич — аспирант, Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, 190005, Российская Федерация, [sc 57219482859](https://orcid.org/0000-0001-9560-2693), <https://orcid.org/0000-0001-9560-2693>, semen.tolstoguzov96@mail.ru

Authors

Nikita A. Brykov — PhD, Associate Professor, Associate Professor, Baltic State Technical University, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation, [sc 57209849110](https://orcid.org/0000-0002-3568-7522), <https://orcid.org/0000-0002-3568-7522>, brykovna@yandex.ru

Konstantin N. Volkov — D.Sc. (Physics & Mathematics), Leading Researcher, Baltic State Technical University, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation, [sc 8663950000](https://orcid.org/0000-0001-6055-2323), <https://orcid.org/0000-0001-6055-2323>, dsci@mail.ru

Vladislav N. Emelyanov — D.Sc., Full Professor, Baltic State Technical University, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation, [sc 7004697417](https://orcid.org/0000-0002-7039-9948), <https://orcid.org/0000-0002-7039-9948>, vlademelyanov@gmail.com

Semen S. Tolstoguzov — PhD Student, Baltic State Technical University, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation, [sc 57219482859](https://orcid.org/0000-0001-9560-2693), <https://orcid.org/0000-0001-9560-2693>, semen.tolstoguzov96@mail.ru

Статья поступила в редакцию 02.02.2024
Одобрена после рецензирования 21.02.2024
Принята к печати 24.03.2024

Received 02.02.2024
Approved after reviewing 21.02.2024
Accepted 24.03.2024



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»