

doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-314-321

УДК 519.651

Метод разбиения единицы и гладкая аппроксимация

Виктор Николаевич Толстых ✉

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 190000, Российская Федерация

victor.n.tolstykh@gmail.com ✉, <https://orcid.org/0009-0003-0202-5500>

Аннотация

Введение. Представлен новый метод гладкой кусочно-полиномиальной аналитической аппроксимации экспериментальных данных любой размерности и степени изменчивости. Альтернативой данному методу являются кубические и бикубические сплайны, которые имеют свои достоинства и недостатки. Исследования, направленные на создание более гибких методов гладкой аппроксимации больших данных, активно ведутся учеными, но подобного аналога, представленного в настоящей работе, автором не найдено, в том числе и для многомерных зависимостей. **Метод.** Экспериментальные данные часто зависят от многих переменных, которые для задач компрессии, прогноза и передачи данных локально могут быть аппроксимированы простыми аналитическими функциями. Они могут быть локальными полиномами как на интервалах в одномерном случае, так и на полигонах в многомерных случаях. Представленный в работе метод гладкого согласования локальных функций между собой может быть расширен с одномерной кусочно-полиномиальной аппроксимации на более высокие размерности, что имеет множество научных и практических применений. В данном случае можно сохранять и передавать коэффициенты локальных полиномов или других локальных функций вместо того, чтобы использовать исходные данные, часто имеющие чрезмерно большой объем. В описываемом методе использовано клеточное разбиение области интереса и на этих клетках определены локальные функции — полиномы низких степеней или другие параметрические функции. В местах соединения клеток задаются переходные зоны, в которых локальные функции согласуются друг с другом, образуя достаточно гладкий переход между ними. Количество локальных функций в точке совпадает с ее индексом топологического покрытия. Результатом является единая, дважды дифференцируемая аналитическая функция. Для гладкого согласования локальных функций используются базовые функции, основанные на специальных полиномах второй или третьей степени. Значения этих функций плавно уменьшаются от единицы до нуля. Значения производной базовой функции на обоих концах интервала равны нулю. Согласование представлено гомотопическим преобразованием, отображающим единичный интервал в пространство функций. Для одномерной зависимости эффективность метода представлена примером согласования набора локально заданных парабол. Метод расширен на двумерный случай путем применения известного в математике приема клеточного разбиения компакта с покрытием его топологическими картами. Вычислительный эксперимент показал, что и в этом случае локальные функции согласуются на всем компакте, образуя единую дважды дифференцируемую функцию. **Основные результаты.** Результатом исследования является разработка нового метода гладкого согласования локальных параметрических функций, осуществляющих аппроксимацию экспериментальных данных на интервале произвольного размера. Представленный метод основан на топологическом разбиении единицы и согласовании двумерных локальных функций, осуществляющих аппроксимацию на двумерном компакте. Выполнено теоретическое обоснование возможности расширения метода согласования на произвольные размерности компакта, на клетках которого заданы локальные полиномиальные и другие аппроксимирующие функции. **Обсуждение.** Решена задача разработки и частичного обоснования концепта создания полезного инструмента для хранения и передачи экспериментальных информационных данных.

Ключевые слова

сплайн, полином, функция согласования, разбиение единицы, покрытие, клеточное пространство, многообразие, аппроксимация

Ссылка для цитирования: Толстых В.Н. Метод разбиения единицы и гладкая аппроксимация // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 2. С. 314–321. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-314-321

© Толстых В.Н., 2024

Partition of unity method and smooth approximation

Victor N. Tolstykh✉

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI), 190000, Saint Petersburg, Russian Federation
victor.n.tolstykh@gmail.com✉, <https://orcid.org/0009-0003-0202-5500>

Abstract

This work presents a new piecewise polynomial method of smooth analytic approximation for any dimension and variability of experimental data. Alternatives to this method are cubic and bicubic splines which have their advantages and disadvantages. There are many researches in the field of big data flexible approximation; however nothing similar was found to what is presented in the work, especially concerning multivariate dependencies. Experimental data frequently depend on many variables which for the purposes of compression, prediction, and transmission locally expressed by relatively simple analytic functions. It can be local polynomials, either on some intervals in one-dimensional case or polygons — in two-dimensional cases. Presented in the work method of local functions smooth matching extends from the one-dimension piecewise polynomial approximation method to higher dimensions that has a variety of scientific and practical applications. Under this condition, it makes sense to store and transmit coefficients of local polynomials or other local functions rather than use raw data for those purposes, which frequently requires an unacceptably large amount of resources. In the method described, we use cellular subdivision of the area of interest, and define low-degree polynomials or other parametric functions on the cells. At the junctions between cells, there are overlapping transition zones where local functions match to each other. Their amount is defined by the index of the topological compact covering. As a result, the matching obtains a single double-differentiable analytic function on the entire compact. Defined in the work basic functions are second- and third-degree especial polynomials. The values of these functions smoothly transit from one to zero within a closed unit interval. Derivatives on the interval edges both are equal to zero. The matching is performed by the homotopy which maps a unit interval to the space of functions. Efficiency of the method is demonstrated for one-dimensional case by matching a set of approximating parabolas. We extend this method to the two-dimensional case by applying the known unit partitioning technique with topological maps coverage. The computational experiment demonstrates that even in this case local functions smoothly match making a double-differentiable function on the entire compact. First result is a development of a smooth matching method for experimental data approximation by local parametric functions on a large interval. Second result is development of a new method, based on a unit partitioning, for matching two-dimensional local functions making an approximation on the two-dimensional compact. Third result is a theoretical proof of the method extension from dimension of one and two to any dimension. Task of this study consisted in the development of a useful tool for efficient storage and transmission of experimental data.

Keywords

splines, polynomials, matching functions, unit partitions, coverages, cell spaces, manifolds, approximation

For citation: Tolstykh V.N. Partition of unity method and smooth approximation. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 314–321 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-314-321

Введение

Существует множество алгоритмов построения аналитических зависимостей от одной или двух переменных, другими словами, гладких кривых или поверхностей, аппроксимирующих опытные данные [1–7]. Анализ научных работ показал, что наиболее популярными для аппроксимации одномерных зависимостей являются кубические сплайны и В-сплайны — кривые Безье [8, 9], реже согласующие функции типа синус-косинус или их квадраты [10–12], и более сложного вида функции^{1,2}, основанные на экспонентах с отрицательным аргументом [13]. Для аппроксимации двумерных зависимостей в основном используются бикубические сплайны [8], а также различные алгоритмы, в основе которых лежит полигональное сглаживание, традиционно применяемое для создания поверхностей 3D-моделей в

современных компьютерных играх [1, 12]. В настоящей работе представлен алгоритм, позволяющий гладко (включая непрерывность вторых частных производных) переводить локальные одно- и двумерные зависимости одну в другую.

По теореме Вейерштрасса об аппроксимации [13], полиномы обладают свойством аппроксимировать с заданной точностью непрерывную функцию на замкнутом отрезке (а также на компакте произвольной размерности, согласно обобщению Стоуна [13]). Полиномы активно используются также для построения поверхностей. Наибольшую вычислительную проблему представляют многомерные полиномы высоких степеней со свободными коэффициентами — они крайне неустойчивы при малейших изменениях в данных, особенно на краях интервалов (или компактов³) при большой изменчивости в данных. Для размерностей пространства аргумента не выше двух, эффективным средством построения функций на больших компактах, как правило, являются кубические и бикубические сплайны. Также может быть выполнена сборка (или точнее глад-

¹ Интерполяция и аппроксимация [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://ppt-online.org/128925> (дата обращения: 05.11.2023).

² Высококачественное моделирование сложных поверхностей и тел [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.caduser.ru/press/articles/cm_34_ai_step3.html (дата обращения: 15.02.2024).

³ Компактом называется замкнутое и ограниченное многообразие. Многообразием называется локально евклидово пространство.

кая склейка или согласование) локально определенных достаточно простых функций — полиномов и других функций, плавно переводящих одни локальные функции в другие в переходных зонах согласования.

Цель работы — разработать оригинальный метод согласования локальных функций, через построение набора базовых функций, разбивающих единицу [11, 14] на некотором двумерном компакте (в общем случае — гиперкубе), которые позволяют плавно соединять (согласовывать) локальные функции друг с другом. Результатом будет являться многомерная гладкая функция класса C^2 , т. е. дважды дифференцируемая функция, определенная на всем компакте.

Разбиение единицы

Разбиением единицы [15] в топологии называется конструкция для работы с множеством карт D_α на компакте M , образующем атлас покрытия. Конструкция требует, чтобы листы карт покрывали [16] данное многообразие целиком, «с нахлестом». При этом на M должна быть задана система вещественных функций $\{h_n\}$, $n \in N$ таких, что

- 1) $0 \leq h_n \leq 1$;
- 2) носитель каждой из этих функций целиком содержится в D_α ;
- 3) $\sum_{n \in N} h_n = 1$ для любой точки $x \in M$.

Для моделирования согласования локальных функций использован частный случай покрытия двумерного компакта — квадратной области, разделенной на 9 клеток и покрытой четырьмя листами покрытия (рис. 1). Число листов над каждой точкой называется индексом покрытия. В рассматриваемом случае есть три варианта — это зоны с индексами покрытия 1, 2, 4. Выделим срединную клетку с индексом покрытия 4, в которой каждая точка $x \in M \subset M'$ покрывается ровно четырьмя листами карт. На M' заданы «базовые» функции согласования, представляющие разбиение единицы на M , такие, что на клетке компакта M , покрытой всеми листами, их сумма тождественно равна единице. Таким образом, выполнено условие $\sum_{n \in N} h_n = 1$ для любой точки $x \in M$.

Назовем одномерную функцию $g(t)$ базовой функцией, если она обладает следующими свойствами:

- $g(t) \in C^2 [0, 1]$;
- $0 \leq g(t) \leq 1$;

- $g(0) = 1, g(1) = 0$;
- $g(t) + g(1 - t) = 1 \forall t \in [0, 1]$;
- $g'(0) = g'(1) = 0$;
- $g''(0) = -g''(1)$.

Таковыми свойствами обладает кубический полином $f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$, заданный на отрезке $[0, 1]$, а также сборка из фрагментов двух парабол

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 2(x - 1)^2, & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Согласование локальных функций на отрезке

Возьмем две локальные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, заданные на пересекающихся интервалах $[a, 1]$ и $[0, b]$, где $a < 0$ и $b > 1$, тогда их согласование на интервале $[0, 1]$ будет выглядеть как гомотопия $g: [0, 1] \rightarrow C^\infty$, плавно переводящая одну функцию в другую при изменении параметра t от значения 0 до значения 1.

$$f(x) = g(t)f_1(x) + g(1 - t)f_2(x), \text{ при } t = x.$$

Если две функции пересекаются на интервале $[0, 1]$, то их согласование будет выглядеть как плавное понижение значения первой функции от начала интервала до нуля и одновременно такое же плавное возрастание второй функции от нуля до ее настоящего значения на конце интервала¹. Степень гладкости согласованной функции на всем компакте будет равна двум, т. е. $f \in C^2(M')$. Это следует из равенства значений, а также первой и второй производных функций $g(t)$ и $g(1 - t)$ в точках, принадлежащих одновременно двум интервалам, т. е. в точках $x_i = b_i = a_{i+1}$ для соседних интервалов $[a_i, b_i]$ и $[a_{i+1}, b_{i+1}]$.

Рассмотрим пример согласования трех локальных функций (рис. 2). Здесь и на следующих рисунках единицы измерения относительные. Локальные функции — параболы, получены методом наименьших квадратов К.Ф. Гаусса. Выделенной линией показано как из трех парабол получилась одна сложная гладкая кривая на интервале $[\pi, 3\pi]$.

На рис. 2 локальные функции — параболы — показаны пунктиром. Выделенной линией показано как из

¹ Если интервал согласования отличен от $[0, 1]$, то его следует привести к этим границам преобразованием $[a, b] \rightarrow [0, 1]$.

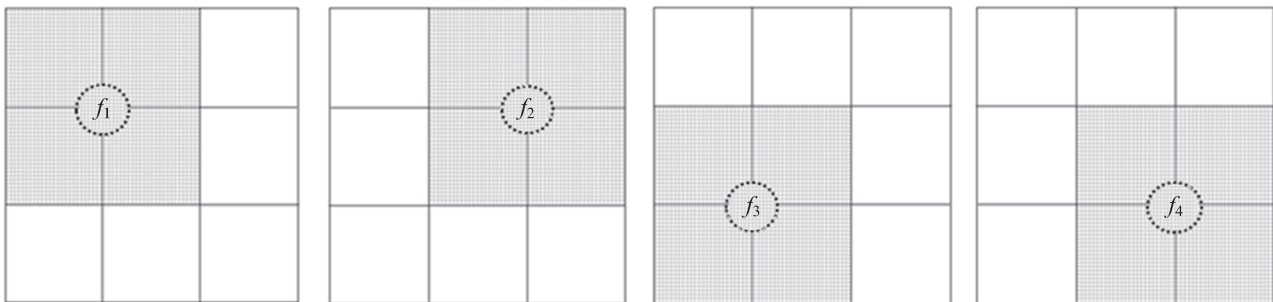


Рис. 1. Расположение четырех листов покрытия на компакте. Кружками отмечены локальные функции
 Fig. 1. Arrangement of four coating sheets on the compact. Local functions are marked by circles

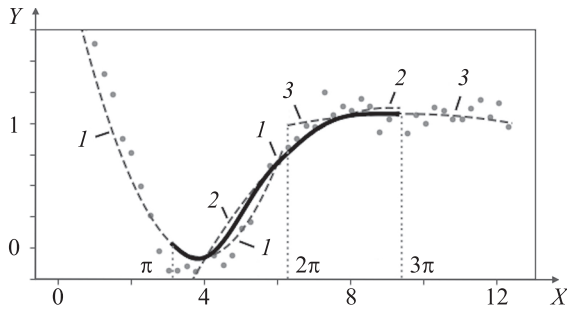


Рис. 2. Пример согласования трех локальных функций
 Fig. 2. An example of three local functions matching

трех парабол получилась одна сложная гладкая кривая на интервале $[\pi, 3\pi]$. Локальные функции получены методом наименьших квадратов. Точками задана модель для аппроксимации и согласования — модельная функция с наложенной на нее аддитивной помехой. Цифрами отмечены локальные функции — параболы. Вертикальные пунктирные линии показывают центры построения трех локальных функций, они также являются границами интервалов согласования. Параболы построены на пересекающихся отрезках: $[0, 2\pi]$, $[\pi, 3\pi]$ и $[2\pi, 4\pi]$.

Построение поверхностей

Двумерная базовая функция согласования, которая осуществляет согласование функций на двумерном компакте $I^2 = [0, 1]^2$, строится на основе одномерных базовых функций. В отличие от одномерного случая, «соседями» компакта в виде квадрата являются уже не две, а четыре функции: f_1, f_2, f_3, f_4 (рис. 1), соответствующие четырем вершинам квадрата I^2 . Соответственно, функций согласования также должно быть четыре. Функции получены из формулы для одномерного согласования. Заметим, что для удобства кодирования, предпочтительно пользоваться базовой функцией одного аргумента, подставляя при вызове в нее аргументы: x или y ; $1 - x$ или $1 - y$.

В данном случае набор двумерных базовых функций образует разбиение единицы, если области действий локальных функций четырехлистно покрывают I^2 . Аппроксимирующей функцией на этом участке, при условии, что четыре функции f_1, f_2, f_3, f_4 его полностью покрывают, будет взвешенная сумма. Условия на границе компакта допускают, что клетка может быть покрыта не только четырьмя листами карт, но также двумя или даже одним, если находится на грани или в углу компакта. В последнем случае значение ее локальной функции не меняется, т. е. согласования не производится. При покрытии двумя листами карт, базовая функция согласования будет зависеть только от одной координаты — от x ($t = x$) или от y ($t = y$) на компакте I^2 .

На регулярной двумерной сетке с координатами x и y выполним разбиение единицы таким образом, чтобы центральная клетка содержала четыре функции согласования. Далее построим набор локальных функций f_1, f_2, f_3, f_4 , аппроксимирующих данные, покрывающие каждую клетку «с нахлестом» на размер клетки. Тогда

для каждой точки центральной клетки получится набор из четырех значений от четырех локальных функций. После чего суммируем эти функции с весами, определенными базовыми функциями согласования, все они имеют стандартный вид $g(t)$. Таким образом, склеиваем четырехлистное покрытие в один глобальный покрывающий лист, соединяющий четыре функции вместе (рис. 3).

Центральная клетка имеет четырехлистное покрытие (рис. 1) там, где происходит разбиение единицы. Каждая из четырех функций под листами покрытия может быть полиномом от двух переменных, например, параболоидом или седловой поверхностью, заданная полиномом третьей степени. Или же иной параметрической, в частности, рациональной функцией. За пределами элементов покрытия эти функции равны нулю. В месте пересечения-нахлеста элементов покрытия функции согласовываются друг с другом, т. е. суммируются с «весами» заданными базовыми функциями согласования.

На рис. 4 представлен вид центральной клетки с четырьмя функциями согласования, подчиненными четырем листам покрытия D_α . Такое представление позволяет делать произвольное разбиение компакта, пристраивая клетку к клетке. Выпишем явно формулы для всех функций согласования на центральной клетке и добавим параметры сдвига n_x и n_y , позволяющие добавлять клетки, дублируя существующие по координатной сетке.

$$\begin{aligned} z_1 &= g(x + n_x)g(y + n_y), \\ z_2 &= g(1 - x - n_x)g(y + n_y), \\ z_3 &= g(x + n_x)g(1 - y - n_y), \\ z_4 &= g(1 - x - n_x)g(1 - y - n_y). \end{aligned}$$

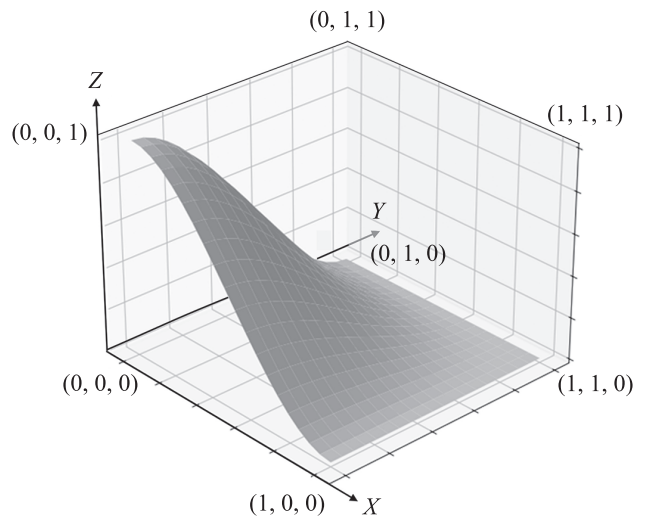


Рис. 3. Двумерная базовая функция согласования гладко спадает от значения 1 с градиентом $(0, 0)$ в начале координат до значения 0 с градиентом $(0, 0)$ в точках компакта $[1, 0]$, $[0, 1]$ и $[1, 1]$. Также на ребрах, соединяющих $[0, 1]$ с $[1, 1]$ и $[1, 0]$ с $[1, 1]$

Fig. 3. Two-dimensional matching function smoothly decreases from the value 1 with zero gradient $(0, 0)$ to the value 0 with zero gradient $(0, 0)$ in points of the compact $[1, 0]$, $[0, 1]$ and $[1, 1]$

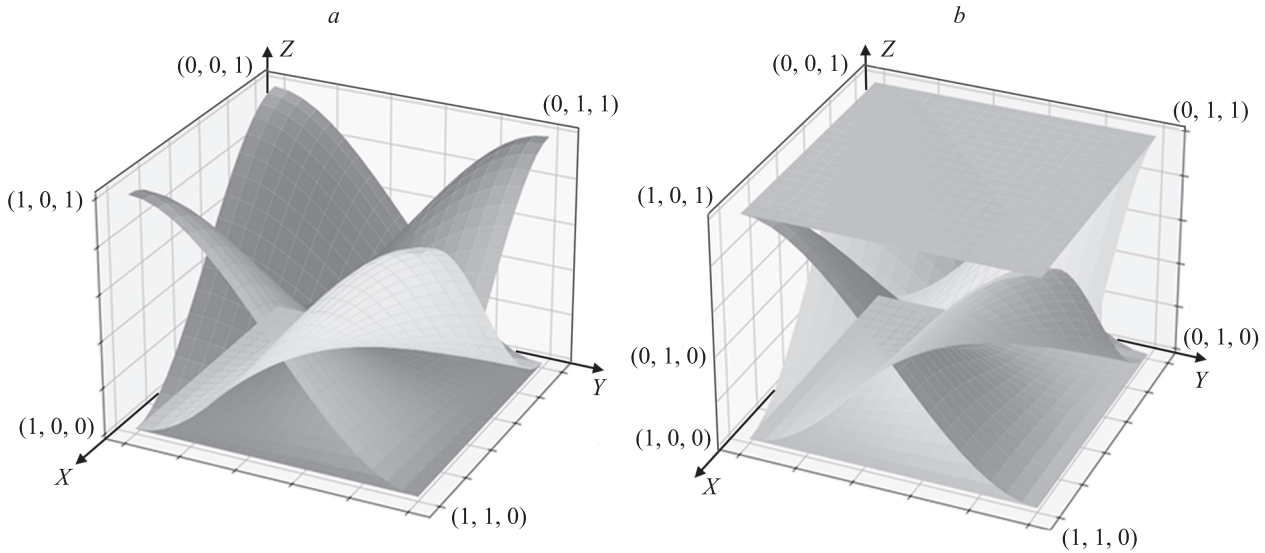


Рис. 4. Разбиение единицы в центральной клетке (a) и в центральной клетке с добавленной суммой четырех базовых функций (b)

Fig. 4. Partition of unity in the central cell (a) and in the central cell with a sum of basic functions (b)

Пример согласующей поверхности для функций: $f(0, 0) = 0,1; f(1, 0) = 0,2; f(0, 1) = 0,3; f(1, 1) = 0,4$ приведен на рис. 5.

Для практических задач с компактами большого размера весь компакт M разбивается на небольшие клетки, на которых строится покрытие локальными моделями. Клеточное разбиение выбирается таким образом, чтобы в пределах одной клетки аппроксимирующая зависимость могла быть описана полиномом первой (три коэффициента), второй (6 коэффициентов), максимум третьей (10 коэффициентов) степени от двух переменных, или иной аппроксимирующей функцией. Демонстрация согласования локальных функций на примере компакта из 9 клеток, покрытых четырьмя листами покрытия с заданными на них локальными функциями приведена на рис. 6.

Покажем, что несложно разработать компьютерный алгоритм для функций согласования любой размерности, по аналогии с двумерным согласованием.

Лемма о сумме базовых функций. Сумма базовых функций на компакте I^2 тождественно равна единице.

Доказательство. Расчетные функции для согласования в центральной клетке с заменой обозначения переменных x, y на переменную с индексом

$$\begin{aligned} z_1 &= g(x_1)g(x_2), \\ z_2 &= g(1 - x_1)g(x_2), \\ z_3 &= g(x_1)g(1 - x_2), \\ z_4 &= g(1 - x_1)g(1 - x_2). \end{aligned}$$

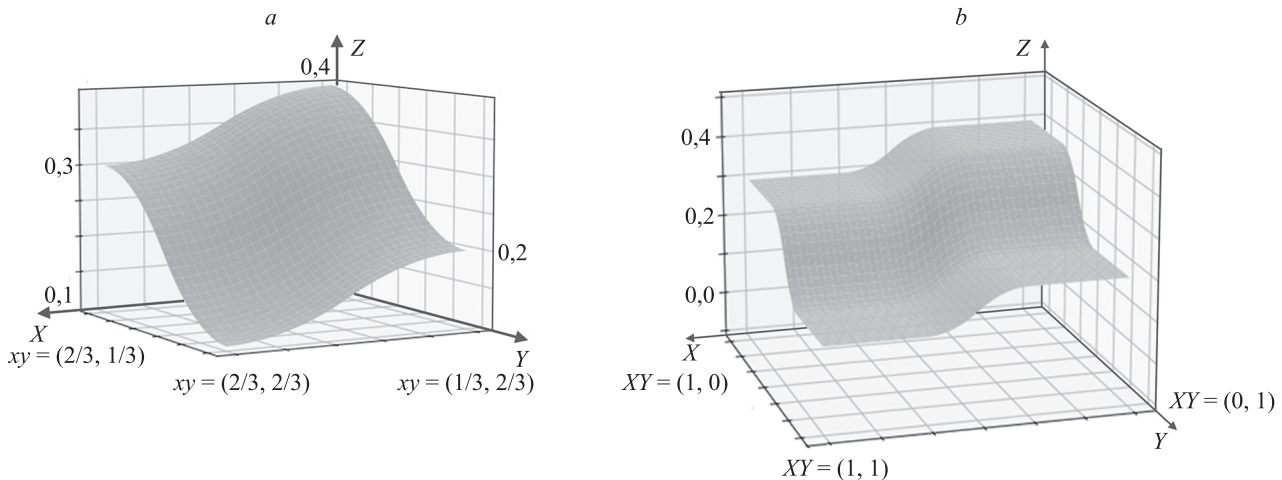


Рис. 5. Результаты согласования в центральной клетке (a) и по всему компакту (b). Угловые значения локальных функций на компакте равны 0,4, 0,3, 0,2 и 0,1

Fig. 5. Result of functions matching in the central cell (a) and in entire compact (b). Corner values of local functions are 0.4, 0.3, 0.2, and 0.1 accordingly

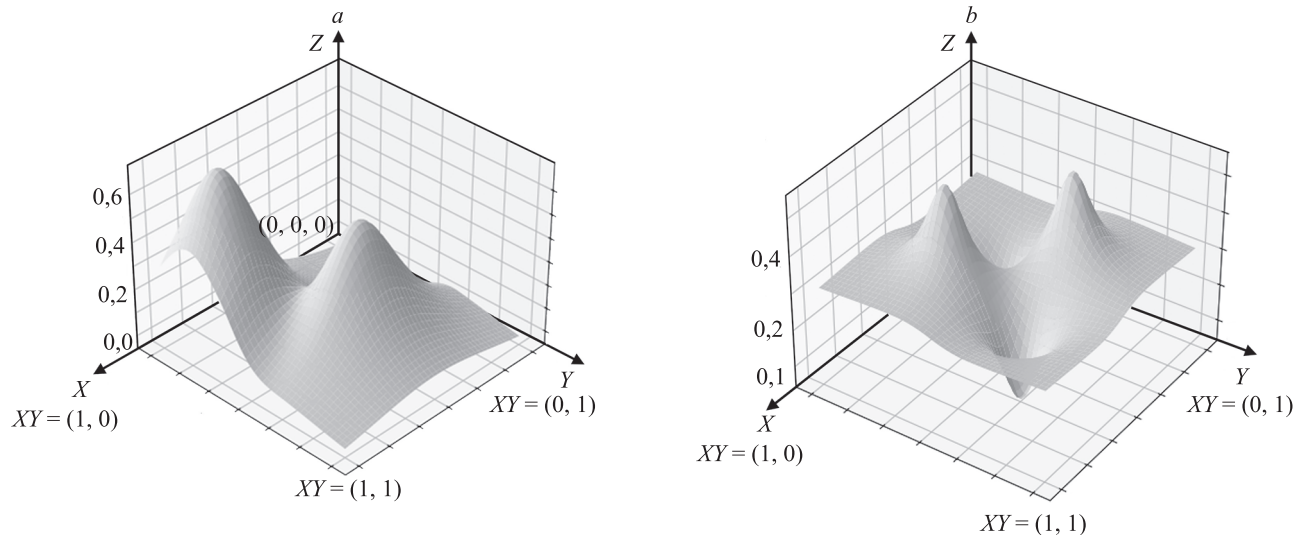


Рис. 6. Гладкое согласование двух (а) и четырех (б) рациональных функций с полиномами второй степени в знаменателе, представленных единичными «пиками», расположенных на четырех элементах покрытия
 Fig. 6. Smooth matching of two (a) and four (b) rational functions presented by second degrees polynomials in the denominator with a single «peak» on four covering sheets

Сумма четырех базовый функций

$$z = g(x_1)g(x_2) + g(1 - x_1)g(x_2) + g(x_1)g(1 - x_2) + g(1 - x_1)g(1 - x_2) = (g(x_1) + g(1 - x_1))(g(x_2) + g(1 - x_2)) = 1 \cdot 1 \equiv 1 \blacksquare.$$

Теорема о согласовании функций. Алгоритм согласования локальных функций применим для компакта любой размерности.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции: из расчетных функций для согласования в центральной клетке следует, что

$$n = 1: z_1 + z_2 = G_1 = (g(1 - x_1) + g(x_1)) = 1, \\ n = 2: z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = G_2 = G_1(g(x_2) + g(1 - x_2)) = 1,$$

где G_k — функция от k переменных при $k = 1, 2, \dots, n$. Количество слагаемых z_k при повышении размерности на единицу увеличивается в два раза, при этом число равных единице на единичном интервале $[0, 1]$ сомножителей увеличивается на единицу.

Сделаем индукционное предположение, что на n -мерной клетке согласование выполняется.

$$G_n = (g(x_1) + g(1 - x_1))(g(x_2) + g(1 - x_2)) \dots (g(x_n) + g(1 - x_n)) = 1.$$

Добавление еще одной переменной x_{n+1} приводит к формуле, доказывающей теорему

$$G_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} z_k = G_n(g(x_{n+1}) + g(1 - x_{n+1})) = 1 \blacksquare.$$

Обсуждение

Особенность предлагаемого подхода к построению аналитических гладких одно- и двумерных, а в перспективе и более многомерных зависимостей на базе локальных функций, состоит в том, что он работает на полигональной сетке любых размеров. Как на сетке, составленной в двумерном случае из четырехугольников (четыреугольник как трансформированный квадрат с локализованной координатной сеткой), так и на сетке из треугольников (треугольник как вырожденный четырехугольник) произвольных размеров и форм. Причем все вычисления производятся локально, в отличие от стандартных кубических и бикубических сплайнов, независимо от того какие у каждой клетки соседи. Ничто не мешает расширить семейство локальных функций с полиномов младших степеней на произвольные локальные функции (рис. 6). Основная цель данной работы — разработка метода быстрого построения одно и двумерных гладких аналитических зависимостей, с перспективой обобщения на следующие размерности. Начиная с метода наименьших квадратов и метода группового учета аргументов, к удобному алгоритму согласования локальных зависимостей и эффективной замене кубических и бикубических сплайнов. Принципиальное отличие разработанного алгоритма — применение клеточного разбиения единицы, позволяющего строить многомерные зависимости максимально точно, быстро и на неограниченно больших компактах, если на них задано какое-то полигональное разбиение. Результаты исследования частично представлены в работах [17, 18].

Заключение

В работе представлен оригинальный подход к аналитическому представлению многомерных зависимостей в виде единой дважды дифференцируемой

функции на базе локальных полиномов, а также других легко определяемых функций, в том числе с помощью метода наименьших квадратов К.Ф. Гаусса, позволяющего получать результат быстро без использования алгоритмов пошаговой оптимизации. Локальные полиномы строятся на картах, принадлежащих атласу топологического покрытия компакта, клеточное разбиение которого позволяет в тех местах, где индекс покрытия превышает единицу, производить гладкое согласование локальных функций между собой. Тем самым предотвращая разрывы в значениях и производных функции, определенной на всем компакте. Наибольшая применимость метода на данный момент ожидается для аппроксимации больших одномерных временных рядов, что позволит эффективно обрабатывать данные по частям, при этом делая результат бесшовным. Это позволяет хранить и передавать по каналам обработанную информацию в виде набора коэффициентов локальных

функций вместо отсчетов, что может дать значительный выигрыш в экономии как места хранения, так и в производительности канала связи. Применимость метода для размерностей компакта от двух и выше осложняется тем, что мы с трудом себе представляем какие-либо многомерные гиперповерхности и не склонны доверять тому, на что не можем посмотреть, что не можем изобразить. Однако наличие надежного и, главное, апробированного метода бесшовной аппроксимации может дать толчок в развитии исследований в области многомерной аппроксимации. В данное время наиболее эффективно с многомерными данными работают нейронные сети. При этом их эффективность направлена в основном на задачи кластеризации и классификации, в то время как задачи многомерной регрессии данных в нейронных сетях не очень широко представлены. Из этого следует, что направление исследований, обозначенное в данной работе, имеет далекую перспективу.

Литература

1. Shapiari M.I., Ibrahim Z., Khalid M., Jau L.W., Pavlovic V., Watada J. Function and surface approximation based on enhanced kernel regression for small sample sets // *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 2011. V. 7. N 10. P. 5947–5960.
2. Méhauté A.L., Rabut Ch., Schumaker L.L. *Surface Fitting and Multiresolution Methods*. V. II. Vanderbilt University Press, 1997. 354 p.
3. Friedman B. *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. NY: Dover Publications Inc., 1990. 315 p.
4. Lancaster P., Šalkauskas K. *Curve and Surface Fitting. An Introduction*. London, Orlando: Academic Press, 1986. 280 p.
5. Wavelets, Images, and Surface Fitting / ed by P.-J. Laurent, A.L. Méhauté, L. Schumaker. CRC Press, 1994. 544 p.
6. Myers R.H., Montgomery D.C., Anderson-Cook Ch.M. *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments* / 4th ed. Wiley, 2016. 856 p.
7. Havil J. *Curves for the Mathematically Curious: An Anthology of the Unpredictable, Historical, Beautiful, and Romantic*. Princeton University Press, 2019. 280 p.
8. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.
9. Lawson J. Partitions of Unity and Smooth Functions [Электронный ресурс]. URL: <https://www.math.lsu.edu/~lawson/Chapter4.pdf>. (дата обращения: 15.02.2024).
10. Grangé P., Mathiot J.-F., Werner E. Taylor-lagrange renormalization scheme: Application to light-front dynamics // *Physical Review D*. 2009. V. 80. N 10. P. 105012. <https://doi.org/10.1103/physrevd.80.105012>
11. Cavoretto R. Adaptive radial basis function partition of unity interpolation: A bivariate algorithm for unstructured data // *Journal of Scientific Computing*. 2021. V. 87. N 2. P. 41. <https://doi.org/10.1007/s10915-021-01432-z>
12. Yasmin G., Muhui A., Araci S. Certain Results of q -Sheffer–Appell polynomials // *Symmetry*. 2019. V. 11. N 2. P. 159. <https://doi.org/10.3390/sym11020159>
13. Weierstrass K. *Mathematische Werke*. Bd.3. P.1.
14. Pasioti A. On the constrained solution of RBF surface approximation // *Mathematics*. 2022. V. 10. N 15. P. 2582. <https://doi.org/10.3390/math10152582>
15. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
16. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии: Геометрические главы. М.: Наука, 1977. 487 с.
17. Толстых В.Н. Нейронные сети для экстраполяции временных рядов // *Наукоёмкие технологии в космических исследованиях Земли*. 2023. Т. 15. № 6. С. 4–11. <https://doi.org/10.36724/2409-5419-2023-15-6-4-11>

References

1. Shapiari M.I., Ibrahim Z., Khalid M., Jau L.W., Pavlovic V., Watad J. Function and surface approximation based on enhanced kernel regression for small sample sets. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2011, vol. 7, no. 10, pp. 5947–5960.
2. Méhauté A.L., Rabut Ch., Schumaker L.L. *Surface Fitting and Multiresolution Methods*. V. II. Vanderbilt University Press, 1997, 354 p.
3. Friedman B. *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. NY, Dover Publications Inc., 1990, 315 p.
4. Lancaster P., Šalkauskas K. *Curve and Surface Fitting. An Introduction*. London, Orlando, Academic Press, 1986, 280 p.
5. *Wavelets, Images, and Surface Fitting*. Ed by P.-J. Laurent, A.L. Méhauté, L. Schumaker. CRC Press, 1994, 544 p.
6. Myers R.H., Montgomery D.C., Anderson-Cook Ch.M. *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. 4th ed. Wiley, 2016, 856 p.
7. Havil J. *Curves for the Mathematically Curious: An Anthology of the Unpredictable, Historical, Beautiful, and Romantic*. Princeton University Press, 2019, 280 p.
8. Rogers D., Adams J. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, 1989, 512 p.
9. Lawson J. *Partitions of Unity and Smooth Functions*. Available at: <https://www.math.lsu.edu/~lawson/Chapter4.pdf>. (accessed: 15.02.2024).
10. Grangé P., Mathiot J.-F., Werner E. Taylor-lagrange renormalization scheme: Application to light-front dynamics. *Physical Review D*, 2009, vol. 80, no. 10, pp. 105012. <https://doi.org/10.1103/physrevd.80.105012>
11. Cavoretto R. Adaptive radial basis function partition of unity interpolation: A bivariate algorithm for unstructured data. *Journal of Scientific Computing*, 2021, vol. 87, no. 2, pp. 41. <https://doi.org/10.1007/s10915-021-01432-z>
12. Yasmin G., Muhui A., Araci S. Certain Results of q -Sheffer–Appell polynomials. *Symmetry*, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 159. <https://doi.org/10.3390/sym11020159>
13. Weierstrass K. *Mathematische Werke*. Bd.3. P.1.
14. Pasioti A. On the constrained solution of RBF surface approximation. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 15, pp. 2582. <https://doi.org/10.3390/math10152582>
15. Engelking R. *General Topology*. Polish Scientific Publ., 1977, 626 p.
16. Fuks D.B., Rokhlin V.A. *Beginner's Course in Topology: Geometric Chapters*. Springer-Verlag, 1984. 519 p.
17. Tolstykh V.N. Neural networks for a time series extrapolation. *H&ES Research*, 2023, vol. 15, no. 6, pp. 4–11. (in Russian). <https://doi.org/10.36724/2409-5419-2023-15-6-4-11>

18. Толстых В.Н. О развитии методов классификации и регрессии // Волновая электроника и инфокоммуникационные системы: Материалы XXVI Международной научной конференции. В 3-х частях. Часть 1. СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2023. С. 113–117.

Автор

Толстых Виктор Николаевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 190000, Российская Федерация, <https://orcid.org/0009-0003-0202-5500>, victor.n.tolstykh@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 16.02.2024
Одобрена после рецензирования 01.03.2024
Принята к печати 26.03.2024*

18. Tolstykh V.N. On the development of classification and regression methods. *Wave Electronics and Infocommunication Systems. Proc. of the XXVI International Scientific Conference. In 3 parts. Part 1.* St. Petersburg, St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 2023, pp. 113–117. (in Russian)

Author

Victor N. Tolstykh — PhD, Associate Professor, St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, 190000, Russian Federation, <https://orcid.org/0009-0003-0202-5500>, victor.n.tolstykh@gmail.com

*Received 16.02.2024
Approved after reviewing 01.03.2024
Accepted 26.03.2024*



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»