

УДК 517.521:004.046

## ДЕКОМПОЗИЦИЯ $n$ -МЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ ПО БАЗИСУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВ

А.Ю. Гришенцев, А.Г. Коробейников

В работе рассмотрен способ декомпозиции  $n$ -мерных цифровых сигналов, полученный на базе вейвлет-преобразования, при этом  $n$ -мерные цифровые сигналы рассматриваются как суперпозиция вейвлетов. Практическое применение способа возможно для преобразования и обработки статических и динамических изображений, стеганографии, спектрального анализа многомерных дискретных полевых структур, решения задач математической физики.  
**Ключевые слова:** декомпозиция  $n$ -мерных сигналов, спектральный анализ, цифровая обработка сигналов.

### Введение

Задача получения спектра  $n$ -мерных неразделимых цифровых сигналов очень часто возникает в современных системах обработки, преобразования и передачи информации. Под неразделимым сигналом в настоящей работе понимается такой сигнал, который нельзя задать в виде прямого произведения одномерных функций. Для разделимого сигнала частотная или временная (пространственная) характеристика факторизуема в произведение одномерных характеристик, в то время как для неразделимого сигнала такое разложение невозможно [1].

В настоящее время разработаны методы получения спектра одномерных и многомерных сигналов путем вейвлет-преобразования (ВП) [2]. Для получения спектра неразделимых сигналов при ВП размерность материнского вейвлета должна совпадать с размерностью разделяемого сигнала. ВП предоставляет свободу в выборе материнского вейвлета, позволяя выбрать оптимальную базисную функцию для разложения анализируемого сигнала. С другой стороны, недостатком является трудоемкость формирования библиотек вейвлетов и принципиальная невозможность выбора универсального базиса даже для сходных цифровых сигналов, например, изображений. Отдельно отметим, что декомпозиция цифровых сигналов находит широкое применение в современной практике решения обратных задач математической физики [3, 4].

### Формальное описание способа

Основной задачей предлагаемого способа является получение спектра  $n$ -мерного неразделимого цифрового сигнала и его локализация в пространстве и (или) времени [5]. Эта задача решается путем последовательных итеративных вычислений в ходе прямого одномерного ВП (декомпозиции) в соответствии с выражением

$$f_{k-1} = f_k - S_k, \quad (1)$$

где  $k$  – номер спектральной компоненты по масштабному признаку. Значение индекса  $k$  соответствует длине (периоду) взаимно перпендикулярных и параллельных элементов спектральных компонент;  $f_k$  – остаточный сигнал (исходный сигнал  $f_k$ , где  $k = K$  – максимальное (исходное) значение индекса  $k$ );  $S_k$  – элементы исходного сигнала, отобранные по масштабному признаку. Сумма всех полученных в ходе прямого преобразования спектральных компонент  $S_k$  является обратным преобразованием (синтезом), и равна:

$$f_K = \sum_{k=1}^K S_k.$$

Таким образом, разложение  $n$ -мерного сигнала на спектральные компоненты происходит не по выбранному заранее  $n$ -мерному базису (базисной функции), а по взаимно параллельным и перпендикулярным элементам исходного сигнала, которые образуют уникальный для данного сигнала  $n$ -мерный базис. В работе используются следующие обозначения: для функции одномерного сигнала –  $f[x_1]$ , для двумерного –  $f[x_1, x_2]$ , для  $n$ -мерного –  $f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ . Координаты вектора поля в указанной точке: для одномерного –  $\{v_1\}$ , для двухмерного –  $\{v_1, v_2\}$ , для  $p$ -мерного –  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ .

В практике обработки цифровых сигналов координаты положения и направлений вектора поля часто имеют различную размерность. Например, если в качестве сигнала рассматривать сигнал, отображаемый на дисплее осциллографа, то координата времени будет соответствовать координате положения ( $f(t)$  – одномерное), координате вектора поля будет соответствовать амплитуда ( $\{v_1\}$  – одномерное). В данном случае координаты положения и координаты вектора поля имеют одинаковую размерность, но различные единицы измерения. Рассмотрим примеры, когда размерности положения и вектора поля различны.

Положение каждого пикселя цифрового изображения, сформированного на двумерной плоскости, характеризуется двумя координатами  $f[x_1, x_2]$ . В случае представления изображения в виде оттенков

серого цвета мы будем иметь одномерное пространство для вектора поля  $\{v_1\}$ . В цветном изображении можно разделить спектр по базису цветового пространства, например, трехкомпонентному RGB-пространству цветов, получив трехмерное пространство для вектора поля  $\{R, G, B\}$ .

Каждая компонента (элемент) сигнала является тензором, который можно рассматривать в пространстве, отличном от пространства, в котором существует породившее его поле. Таким образом, цифровые сигналы образуют тензорные поля. В настоящей работе, с определенными допущениями, ограничимся рассмотрением  $n$ -мерных сигналов как векторных полей.

Дискретную структуру, имеющую размерность, равную размерности исходного сигнала с отличной от нуля амплитудой (высотой), будем называть элементарным всплеском. В направлении выделения элементарного всплеска, его протяженность может иметь любое отличное от нуля значение, но не более размера исходного сигнала в данном направлении. По другим направлениям размеры элементарного всплеска равны единице дискретизации соответствующих направлений.

Разделение исходного сигнала  $f_k$  на спектральные компоненты происходит последовательно по всем направлениям размерности сигнала, начиная с самых протяженных (долгопериодических) элементарных всплесков. В каждой последующей итерации в соответствии с (1) протяженность элементарного всплеска имеет значение на единицу меньше, чем в предыдущей. При выделении из исходного сигнала взаимно перпендикулярных всплесков учитывается принцип суперпозиции волн, т.е. сложения их амплитуд в месте пересечения. По этой причине последовательность обхода направлений для выполнения условия однозначности разложения должна быть одинаковой для каждой спектральной компоненты  $S_k$ , являющейся суммой элементарных всплесков протяженностью  $k$ , выделенных в остаточном сигнале  $f_k$  по всем направлениям.

#### **Алгоритм реализации**

Алгоритм реализации предлагаемого способа определяется форматом исходного  $n$ -мерного сигнала и для формирования спектральных компонент в  $N$ -мерном пространстве  $x_1, x_2, \dots, x_N$  при одномерном векторе поля представлен на рис. 1.

Результатом вычислений по алгоритму является совокупность спектральных составляющих, образованных суммами перпендикулярных и параллельных элементарных всплесков в направлениях  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Таким образом, разложение исходного сигнала осуществляется по функциям «суммы элементарных всплесков», содержащихся в самом исходном сигнале.

Полученные спектральные компоненты имеют размерность исходного сигнала  $p[x_1, x_2, \dots, x_N]$  и одномерного вектора поля  $\{v_1\}$ , т.е. являются скалярным полем. При разложении в спектр предлагаемым способом для многомерных полевых структур с размерностью поля  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  расчет спектральных составляющих необходимо производить отдельно для каждого направления  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_p$ . Полученные наборы спектральных компонент можно рассматривать как векторные составляющие спектра поля и объединять их путем сложения векторных компонент, перенося в пространство, имеющее соответствующую размерность.

Однозначность разложения определяется соблюдением условий последовательности действий. В случае пересечения при сложении взаимно перпендикулярных всплесков, в силу суперпозиции, значение в области пересечения является суммой пересекающихся всплесков. В связи с этим при последовательном вычитании перпендикулярных всплесков без соблюдения выбранной заранее по координатной последовательности может возникнуть неоднозначность разложения. Таким образом, необходимо строго выполнять по координатной последовательности вычитания перпендикулярных всплесков, т.е. придерживаться заранее выбранной последовательности.

#### **Иллюстрация способа**

Рассмотрим спектр двумерного сигнала с одномерным вектором поля (рис. 2). Вектор поля направлен вверх от плоскости, образуемой осями  $x_1, x_2$ . В соответствии с выражением (1) исходный сигнал есть  $f_{10}$ , а остаточные составляющие сигнала –  $f_4, f_1, f_0$ , причем  $f_0$  – нулевой остаток. Выделение спектральных компонент  $S_5, S_2, S_1$  осуществляется по протяженности всплесков, причем сначала выделяются всплески в направлении  $x_1$ , затем – в направлении  $x_2$ . Следует обратить внимание, что максимальная протяженность всплеска соответствует максимальному размеру (числу элементов дискретизации) разделяемой на спектр области из направлений положения. Для рассматриваемого случая максимальный размер соответствует оси  $x_1$  с числом дискретов 10; по оси  $x_2$  максимальная длина всплесков ограничена размером 5.



Рис. 1. Блок-схема алгоритма декомпозиции  $N$ -мерного сигнала по базису ортогональных всплесков.

(\*) Условия выделения элементарных всплесков:

- границами всплеска считаются элементы, имеющие либо нулевое, либо отличное по знаку (в случае знакопеременного сигнала) значение от значений всплеска;
- элементарный всплеск имеет амплитуду, которая определяется как минимальное значение амплитуды на всем протяжении между его границами;
- у элементарного всплеска единичная протяженность по всем направлениям положения, кроме  $x_n$

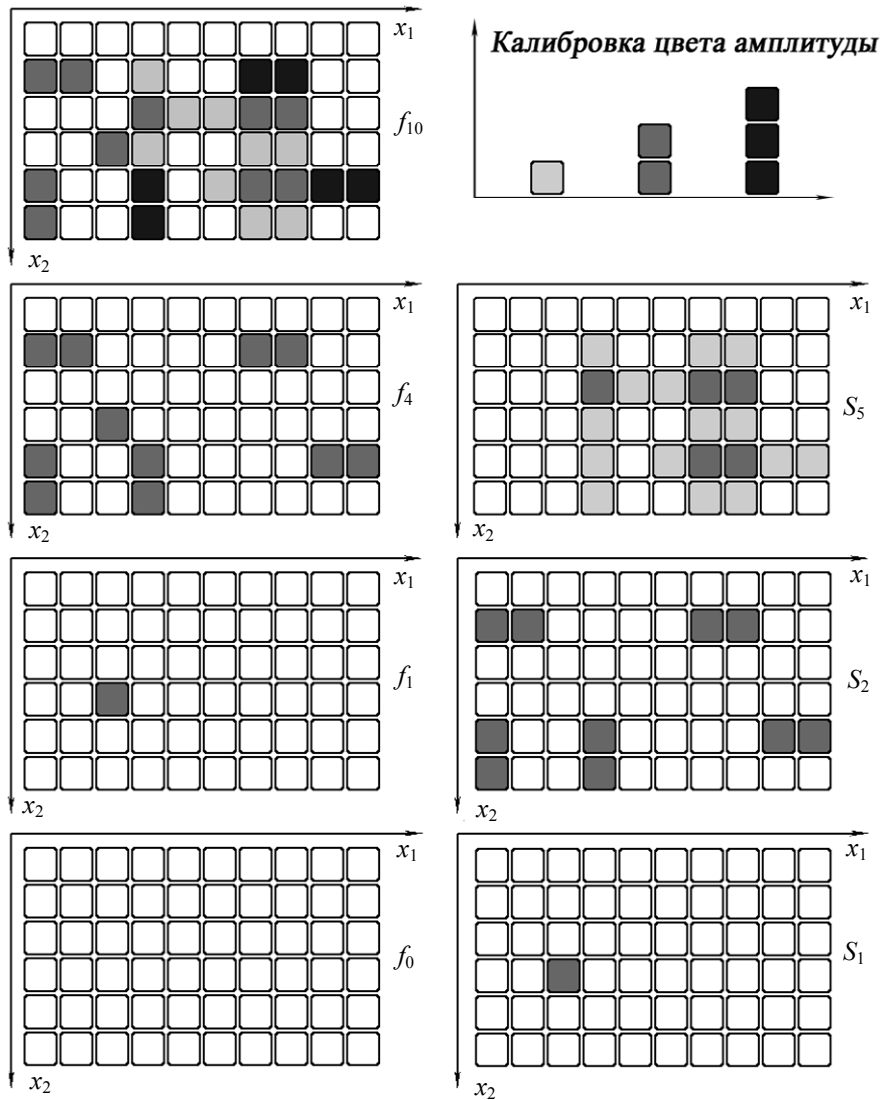


Рис. 2. Декомпозиция двумерного сигнала по базису ортогональных всплесков

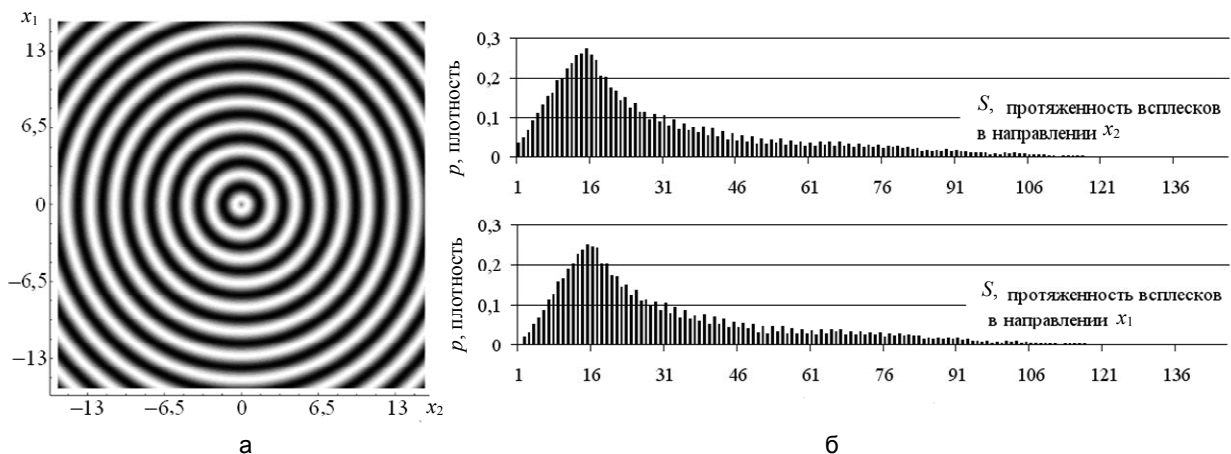


Рис. 3. Двумерный сигнал (а) и распределение плотности ненулевых элементов в спектральных компонентах (б)

Рассмотрим пример разложения по базису ортогональных всплесков двумерного поля (рис. 3, а), заданного функцией  $f[x_1, x_2] = \sin(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ , где  $x_1, x_2 \in [-15\pi, 15\pi]$ .

На графиках (рис. 3, б) показано распределение плотности  $p$  ненулевых элементов в спектральных составляющих (в элементах декомпозиции) в зависимости от протяженности всплеска вдоль оси  $x_1$ . Плотность ненулевых элементов в спектральных компонентах рассчитывалась как число ненулевых элементов в поле спектральных компонент, отнесенное к полному числу (площади) всех спектральных компонент. Очевидно значительное повышение плотности, соответствующее выделению всплесками радиальных волн определенной частоты.

### **Заключение**

В случае многомерного сигнала предлагаемый способ отличается от вейвлет-преобразования отсутствием заранее выбранной многомерной функции разложения. Базис выбирается из элементов исходного сигнала путем вычислений для каждой спектральной компоненты, совокупность которых образует спектр. Каждую спектральную компоненту  $n$ -мерного сигнала можно считать суперпозицией одномерного вейвлет-преобразования векторов, образующих исходный сигнал по каждому из  $n$ -измерений, на базе функции типа меандр, с определенным масштабным коэффициентом по протяженности. Амплитуда элементов, соответствующих спектральной компоненте, может принимать дискретные положительные или отрицательные значения.

Предлагаемый способ позволяет получить отображение сигнала в фазовое пространство и, следовательно, получить четкую привязку спектральных особенностей сигнала к пространству и (или) времени. Стоит заметить, что отобразить одномерный сигнал на фазовую плоскость позволяет оконное преобразование Фурье.

Предложенный способ декомпозиции  $n$ -мерных сигналов может быть выполнен в целочисленной арифметике (без потери точности), что позволяет считать его достаточно быстрым и сравнительно легко реализуемым с помощью аппаратных средств.

### **Литература**

1. Чобану М. Многомерные многоскоростные системы обработки сигналов. – М.: Техносфера, 2009. – 480 с.
2. Шарк Г.Г. Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.
3. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Разработка модели решения обратной задачи вертикального зондирования ионосферы // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 2 (72). – С. 109–113.
4. Сизиков В.С., Кривых А.В. Применение способа эталонных примеров при решении обратной задачи спектроскопии методом регуляризации // Изв. вузов. Приборостроение. – 2011. – Т. 54. – № 9. – С. 44–51.
5. Заявка на изобретение. Способ построения спектра  $n$ -мерных неразделимых цифровых сигналов. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. №2011126856, от 29.06.2011.

*Гришенцев Алексей Юрьевич*

– Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, tigerpost@ya.ru

*Коробейников Анатолий Григорьевич*

– Санкт-Петербургский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, доктор технических наук, профессор, зам. директора, Korobeynikov\_A\_G@mail.ru