# 7 МЕХАНИКА И МЕХАТРОНИКА

УДК 531.01+681.5.03+531.07

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕННЫХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ АППРОКСИМАЦИЙ ЧЕБЫШЕВА

**В.Г. Мельников**

Рассматривается процесс преобразований уравнений автономных механических систем многочленной структуры со многими степенями свободы, связанный с методом нормализации Пуанкаре–Дюлака. Вносится изменение в метод, состоящее в аппроксимации остаточных членов высоких степеней многочленами меньших степеней с сохранением их в уравнениях, обеспечивающее существенное повышение точности преобразованной системы. При этом используется свойство мономов высоких степеней содержать переменные в высоких степенях, допускающих применение метода экономизации Чебышева.

**Ключевые слова:** автономная система динамических уравнений, многочленное преобразование фазовых координат, нормальные формы Пуанкаре–Дюлака, экономизации Чебышева.

### Введение

Важным этапом исследования движения каждой динамической системы с сосредоточенными параметрами в конечной окрестности нуля фазового пространства является преобразование ее в систему уравнений с уменьшенным количеством параметров, символьных констант [1–3]. Минимизация количества существенных констант упрощает последующий аналитический и численный анализ. Вначале обычно выполняется преобразование подобия – изменение масштабов переменных, затем выполняется замена переменных, соответствующая структуре уравнений. Для автономных уравнений возмущенного движения широко используется метод нормализации Пуанкаре–Дюлака, формального многочленного преобразования дифференциальных уравнений с сохранением в преобразованной системе множества неустранимых «резонансных» или близких к резонансным констант – коэффициентов при мономах. При этом сходимость рядов гарантирована лишь при весьма жестких ограничениях, поэтому метод относят в основном к асимптотическим методам [4–6]. В случае сходимости рядов формальная эквивалентность преобразованной и исходной систем становится аналитической эквивалентностью в некоторой области сходимости, которая может оказаться весьма малой. При практическом применении асимптотического метода рекомендуется проверка идентичности существенных динамических свойств исходной и преобразованной систем [2]. В [5, 7] рассмотрены, в частности, автономные системы с правыми частями в виде многочленов высокой степени, для которых развит метод многочленного преобразования с сохранением в преобразованной системе мономов с резонансными и близкими к резонансным индексами во избежание появления малых делителей, в [8] метод применен к системе управления.

В настоящей работе предлагается существенное изменение метода многочленных преобразований в направлении уменьшения невязок, повышения точности преобразованной модели. Уточнение преобразованной модели достигается тем, что в процессе выполнения преобразований остаточные члены уравнений, составленные из мономов высоких степеней, не отбрасываются, они аппроксимируются многочленами меньших степеней по методу экономизации Чебышева [9–13] и включаются в преобразованные уравнения, а к пренебрегаемым членам отнесены лишь погрешности этих аппроксимаций. Данный прием основан на очевидном свойстве каждого монома достаточно высокой степени содержать фазовые координаты в степенях $s \geq 3$, допускающих приближение многочленами меньших степеней с небольшой относительной погрешностью. Расчетные алгебраические формулы для констант модифицированного метода преобразований не рекуррентны, поэтому константы вычисляются с применением метода малого параметра, причем за порождающие решения алгебраической системы принимаются решения по методу Пуанкаре–Дюлака. Модифицированный метод приводит, в общем случае, к некоторым изменениям собственных значений матрицы линейной части преобразованной системы.

### Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с правыми частями в виде сумм однородных многочленов степеней $1, 2, ..., m$ с малыми коэффициентами при нелинейных членах:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{|\nu|=1}^{m'} X_\nu a_i^\nu, \quad i = 1,...,n, \quad x \in D . \tag{1}$$

Здесь $a_i^\nu = a_i^{(\nu_1 ... \nu_n)} = O(\varepsilon)$ при $|\nu| \geq 2$; $\nu = (\nu_1 ... \nu_n)$ – векторные индексы суммирования; $X_\nu = x_1^{\nu_1} ... x_n^{\nu_n}$ – мономы степеней $|\nu| = \nu_1 + ... + \nu_n$; $D = \{x = [x_1,...,x_n] \subset R^n : |x_i| \leq r, \quad i = 1,...,n,\}$ – окрестность нуля фазового пространства. Однородные линейные многочлены в (1) вида

$\sum_{|\nu|=1} x_\nu a_i^\nu = x_1 a_i^{e1} + ... + x_n e_i^{en} \equiv x_1 a_i^1 + ... + x_n a_i^n$ записаны с применением единичных векторных индексов $ej = (0...010...0)$, собственные числа $\lambda = [\lambda_1, ..., \lambda_n]$ матрицы $A = [a_i^j]_1^n$ линейной части системы предполагаем существенно различными, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Считаем, что система (1) описывает движение некоторого класса механических систем с сосредоточенными параметрами с пренебрежимо малыми погрешностями.

Ставится задача о многочленном преобразовании степени $m$ фазовых переменных, где $m = \max(m', 2n)$, с измененными формулами для определения констант. Изменение состоит в том, что остаточными членами, составленными из мономов степеней больших, чем $m$, которые появляются в процессе преобразования, не пренебрегаем, сохраняем их приближенно в уравнениях в виде аппроксимирующих многочленов степени $m$, найденных методом экономизации Чебышева.

**Замечание**. Если система (1) получена из классических автономных уравнений возмущенного движения посредством приближения голоморфных функций частичными суммами в $O(\varepsilon)$ – окрестности нуля фазового пространства и масштабного преобразования окрестности в единичную область $D$, то в (1) можно считать $a_i^\nu = O(\varepsilon^{|\nu|-1})$ при $|\nu| \geq 2$, что не влияет на процесс преобразований.

Целесообразна проверка преобразованной модели с позиции сохранения существенных динамических свойств, например, методом функций Ляпунова [2, 7, 14].

**Многочленные преобразования со встроенными экономизациями Чебышева**

Введем в рассмотрение множество особых (резонансных) индексов $N_i = N_{i2} \cup N_{i3} \cup \ldots \cup N_{im}$, где подмножества $N_{ik}$ находятся как семейства целочисленных неотрицательных решений системы двух алгебраических уравнений:

$$N_{ik}(\lambda) = \left\{ \left( \mu_{1k}^i, ..., \mu_{nk}^i \right) : \mu_{1k}^i \lambda_1 + ... + \mu_{nk}^i \lambda_n - \lambda_i \approx 0, \quad \mu_{1k} + \ldots + \mu_{nk} = k \right\}, i = 1, ..., n. \quad (2)$$

Введем замену фазовых переменных в форме многочленов назначаемой степени $m$ с комплексными константами

$$y_i = \sum_{|\nu|=1}^{m} X_\nu b_i^\nu \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j b_i^j + \sum_{|k|=2}^{m} X_\nu b_i^k, \quad m \geq \max(m', 2n), \quad i = 1, ..., n, \quad (3)$$

с неособой матрицей $B = [b_i^j]_1^n$, с малыми коэффициентами $b_i^k = O(\varepsilon)$ при $|k| \geq 2$, $k = (k_1 ... k_n)$. Назовем невязками $\delta_i(x)$ следующие дифференциальные выражения, вычисляемые на решениях системы (1) с подлежащими определению комплексными константами $p_i^\mu$:

$$\delta_i = \frac{dy_i}{dt} - \lambda_i y_i - \sum_{\substack{|\mu|=2 \\ \mu \in N_i}}^{m} Y_\nu p_i^\mu \quad i = 1, ..., n. \quad (4)$$

Ставится задача выбора коэффициентов преобразования (3) и резонансных коэффициентов $p_i^\mu$ из условия минимизации невязок $\delta_i$.

В силу уравнений (1) и выражений (3) получаем невязки в виде разности двух многочленов степеней $(m' + m - 1)$ и $m^2$ вида

$$\delta_i = \sum_{j,\nu,\nu'} X_{\nu+\nu'-ej} b_i^\nu a_j^{\nu'} \nu_j - \sum_{\nu} \left( \sum_{\nu'} X_{\nu'} b_1^{\nu'} \right)^{\mu_1} ... \left( \sum_{\nu'} x_{\nu'} b_n^{\nu'} \right)^{\mu_n} p_i^\mu, \quad i = 1, ..., n. \quad (5)$$

Каждую функцию (5) представляем посредством приведения подобных членов в виде суммы однородных многочленов степеней $1, ..., m$ и дополнительных многочленов $\beta_i(x)$ со степенями мономов $m+1, m+2, ..., m^2$:

$$\delta_i(x) = \sum_{|\nu|=1}^{m} X_\nu h_i^\nu + \beta_i(x), \quad \text{при} \quad \beta_i = \sum_{|\nu|=m+1}^{m^2} X_\nu r_i^\nu, \quad \beta_i = O(\varepsilon^2). \quad (6)$$

Вносим изменение в классический метод преобразований. Вместо отбрасывания функций $\beta_i(x)$ аппроксимируем их многочленами степени $m$ и присоединяем эти многочлены к первой сумме выражения (6), пренебрегаем лишь погрешностями этих аппроксимаций. Здесь используем очевидное утверждение: любой моном $x_\nu = x_1^{\nu_1} ... x_n^{\nu_n}$ степени $|\nu| \geq m$ при $m \geq 2n+1$ содержит, по меньшей мере, один множитель $x_j^{\nu_j}$ в степени $\nu_j \geq 3$, в связи с чем его можно приблизить с небольшой погрешностью многочленом меньшей степени на единичном интервале по формулам экономизаций Чебышева [10–12]. Например, на интервалах $-r \le x_j \le r$ с оценками погрешностей $\Delta = 0,25r^3; 0,13r^4; 0,06r^5; 0,03r^6$ имеем аппроксимации

$$x_j^3 \approx \frac{3}{4}r^2 x_j, \qquad x_j^4 \approx r^2 x_j^2 - \frac{r^4}{8}, \qquad x_j^5 \approx \frac{5}{4}r^2 x_j^3 - \frac{5}{16}r^4 x_j,$$

$$x_j^6 \approx \frac{3}{2}r^2 x_j^4 - \frac{9}{16}r^4 x_j^2 + \frac{1}{32}r^6.$$

В аппроксимациях некоторых мономов четных степеней могут выделяться постоянные слагаемые. Для исключения таких случаев используем альтернативные аппроксимации, например, $x_j^4 = x_j x_j^3 \approx \frac{3}{4}x_j^2 r^2$, $x_j^6 \approx \frac{5}{4}x_j^4 r^2 - \frac{5}{16}x_j^2 r^4$. Процесс последовательных экономизаций можно заменить представлением мономов через функции Чебышева с отбрасыванием функций высоких степеней с малыми множителями [10–12]. В результате выполнения последовательности экономизаций все мономы степени $|\nu| > m$ аппроксимируются многочленами со степенями не превосходящими $m$.

Посредством выделения квадратичного множителя можно ценою некоторого понижения точности выполнить экономизации без линейных и свободных членов, например, $x_j^5 = x_j^2 x_j^3 \approx 3x_j^3/4$. При двукратном понижении степени получаем $x_j^5 \approx 5x_j/8$, $x_j^6 \approx 5x_j^2/8$.

Допустим, что в (6) дополнительные многочлены высоких степеней $\beta_i(x) = O(\varepsilon^2)$ аппроксимированы многочленами степени $m$ без выделения свободных членов:

$$\beta_i = \sum_{|\nu|=1}^{m} X_\nu c_i^\nu + \alpha_i(x), \quad i = 1,...,n, \quad x \in D. \tag{7}$$

Подставляя выражения (7) в (6), получаем невязки $\delta_i$ в форме многочленов от переменных $x_j$ степени $m$ с погрешностями $\alpha_i(x)$

$$\delta_i(x) = \sum_{|\nu|=1}^{m} X_\nu (h_i^\nu + c_i^\nu) + \alpha_i, \quad i = 1,...,n, \quad x \in D. \tag{8}$$

Константы $b_i^\nu, p_i^\nu$ будем определять из условий равенства нулю всех коэффициентов при $X_\nu$ в выражениях (8):

$$h_i^\nu + \gamma c_i^\nu = 0, \ \nu = (\nu_1,...,\nu_n): \ |\nu| = 1,...,m, \quad i = 1,...,n, \quad \gamma = 1, \tag{9}$$

где формальным множителем $\gamma = 1$ отмечены малые слагаемые $c_i^\nu = O(\varepsilon^2)$, выделенные из дополнительных многочленов высоких степеней.

Алгебраическую систему (9), содержащую неизвестные $b_i^\nu$, $p_i^\nu$, следует доопределить посредством назначения некоторых коэффициентов преобразования и преобразованной системы. Минимальное количество неустранимых констант $p_i^\mu$ преобразованной системы определяется по множеству резонансных индексов вида (2). Потребуем приведения линейной части преобразованной системы к диагональному виду и обнуления всех коэффициентов $p_i^\nu$ с нерезонансными индексами:

$$p_i^\nu = 0 \quad \forall \nu \notin N_i, \quad [p_i^{ej}]_1^n \equiv [p_i^j]_1^n = \mathrm{diag}[\lambda_1^*,...,\lambda_n^*], \quad \lambda_1^* = \lambda_1 + \varepsilon^2\theta_i, \quad i = 1,...,n. \tag{10}$$

Здесь слагаемые $\varepsilon^2\theta_i$, выделенные из $\beta_i$, считаем малыми, не изменяющими множества индексов (2), т.е. $\{N_i(\lambda)\} = \{N_i(\lambda^*)\}$, $i = 1,...,n$. Из (4) согласно (8), (9), получаем преобразованную систему вида

$$dy_i/dt = \lambda_i^* y_i + \sum_{\mu \in N_i} Y_\mu p_i^\mu + \alpha_i(x), \quad Y_\mu = y_1^{\mu_1} \dots y_n^{\mu_n}, \quad i = 1,...,n,$$

где $\alpha_i(x) = O(\varepsilon^3)$ – погрешности аппроксимаций функций $\beta_i(x) = O(\varepsilon^2)$ с измененными значениями собственных чисел $\lambda_i$ на $\lambda_i^*$. Итак, заменой фазовых переменных (3), при условии выполнения уравнений (9), (10), система (1) преобразуется в систему

$$dy_i/dt = \lambda_i^* y_i + \sum_{\mu \in N_i} Y_\mu p_i^\mu, \quad Y_\mu = y_1^{\mu_1} \dots y_n^{\mu_n}, \quad i = 1,...,n. \tag{11}$$

При этом предполагаем, что эти изменения малы и не меняют множества индексов (2).

Система (11) имеет невязки $\alpha_i(x)$ на решениях исходной системы (1), примерно на порядок меньшие по сравнению с невязками в виде остаточных сумм известного метода многочленных преобразований.

### Случай аппроксимации невязок без изменения линейных форм

Рассмотрим частный случай, когда применением альтернативных аппроксимаций остаточные члены не приводит к поправкам в линейную часть преобразованной системы. В таком случае аппроксимирующая алгебраическая система (9) не содержит поправок $c_i^{\nu}$ при $|\nu|=1$:

$$h_i^{\nu}+\gamma c_i^{\nu}=0,\quad |\nu|=2,3,\ldots,m,\quad c_i^{\nu}\,|_{|\nu|=1}=0,\quad i=1,...,n\,.$$

В этом случае систему (1) и выражения (3), (4) целесообразно привести к виду с диагональной матрицей. Тогда упрощается замена переменных, а невязка по-прежнему имеет вид (4):

$$\frac{dx_i}{dt}=\lambda_i x_i+\sum_{|\nu|=2}^{m'}X_{\nu}a_i^{\nu},\quad y_i=x_i+\sum_{|\nu|=2}^{m}X_{\nu}b_i^{\nu},\quad i=1,...,n,$$

$$\delta_i=\frac{dy_i}{dt}-\lambda_i y_i-\sum_{\substack{|\mu|=2\\ \mu\in N_i}}^{m}y_1^{\mu_1}\ldots y_n^{\mu_n}\,p_i^{(\mu_1\ldots\mu_n)}\quad,\quad i=1,...,n\,.$$

Получаем, временно опуская для краткости знаки суммирования:

$$\delta_i=(\dot{x}_i+X_{\nu-ej}\nu_j b_i^{\nu}\dot{x}_j)-\lambda_i(x_i+X_{\nu}b_i^{\nu})-(x_1+X_{\nu}b_1^{\nu})^{\mu_1}\ldots(x_n+X_{\nu}b_n^{\nu})p_i^{(\mu_1\ldots\mu_n)}=$$
$$=X_{\nu}(a_i^{\nu}+(\nu_j\lambda_j-\lambda_i)b_i^{\nu})-X_{\mu}p_i^{\mu}+X_{k-ej+\nu'}\nu_i b_i^k b_i^{\nu'}-\Phi_i^{(3,m)}-\Phi_i^{(m+1,m^2)}\,,$$

где $\Phi_i^{(3,m)},\Phi_i^{(m+1,m^2)}$ – многочлены со степенями мономов $(3,4,\ldots,m)$, $(m+1,m+2,\ldots,m^2)$ соответственно. Пусть методом экономизации Чебышева получены приближения

$$\Phi_i^{(m+1,m^2)}=\sum_{|\nu|=2}^{m}Xc_i^{\nu}+\alpha_i(x)\,.$$

Получаем выражения невязок

$$\delta_i=\sum_{|\nu|=2}^{m}X_{\nu}(a_i^{\nu}-(\lambda_i-\sum_{j=1}^{n}\nu_j\lambda_j)b_i^{\nu}-d_i^{\nu}-c_i^{\nu})-\sum_{\substack{|\mu|=2\\ \mu\in N_i}}^{m}X_{\mu}p_i^{\mu}+\alpha_i\,,$$

где $d_i^{\nu}$ – коэффициенты многочленов $\Phi_i^{(3,m)}$. Потребуем тождественного равенства нулю всех коэффициентов многочленов степени $m$, т.е. – выполнения условий $\delta_i=\alpha_i$. Получаем алгебраические уравнения, в которых формально введем параметр $\gamma=1$ перед малыми членами:

$$b_i^{\nu}=(a_i^{\nu}-d_i^{\nu}-\gamma c_i^{\nu})/(\lambda_i-\sum_{j=1}^{n}\nu_j\lambda_j),\quad \nu=2,3,\ldots,m,\quad \nu\notin N_i\,,$$

$$b_i^{\mu}=0,\quad p_i^{\mu}=a_i^{\mu}-d_i^{\mu}-\gamma c_i^{\mu},\quad \mu\in N_i,\quad i=1,\ldots,n.$$

Система нелинейных алгебраических уравнений решается методом итераций, причем за порождающее решение принимается решение классической системы, получаемой приравниванием к нулю всех поправок экономизации Чебышева $c_i^{\nu}=0$.

### Пример. Система уравнений второго порядка

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений с кубическими однородными формами и различными отрицательными корнями характеристического уравнения $\lambda_2<\lambda_1<0$:

$$\dot{x}_i=\lambda_i x_i+\varepsilon X_i,\quad X_i=\sum_{|\nu|=3}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}a_i^{(\nu_1\nu_2)},\quad x\in D,\quad i=1,2\,,$$

где $D=\{x=(x_1,x_2):|x_1|\le r,|x_2|\le r\}$. Предполагаем, что отсутствуют резонансные индексы третьей степени, определяемые из условий $\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_3-\lambda_i\neq 0,\quad \forall\,|\nu|=\nu_1+\nu_2=3,\quad i=1,2\;\Rightarrow\;3\lambda_1\neq\lambda_2$.

Нелинейной заменой переменных с кубическими формами

$$y_i=x_i+\varepsilon U_i\quad \text{при}\quad U_i=\sum_{|k|=3}x_1^{k_1}x_2^{k_2}b_i^{(k_1k_2)},\quad i=1,2\,,$$

приводим систему к линейному виду, с точностью до невязок $\delta_i$:

$$\dot{y}_i-\lambda_i y_i=\delta_i,\quad \text{при}\quad \delta_i=\varepsilon F_i+\varepsilon^2\beta_i,\quad i=1,2\,,\tag{12}$$

где

$$F_i=X_i+\frac{\partial U_i}{\partial x_1}\lambda_1 x_1+\frac{\partial U_i}{\partial x_2}\lambda_2 x_2-\lambda_i U_i=\sum_{|\nu|=3}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}[a_i^{(\nu_1\nu_2)}-\Lambda_i^{(\nu_1,\nu_2)}b_i^{(\nu_1,\nu_2)}],$$

$$\Lambda_i^{(\nu_1,\nu_2)}=\lambda_i-\nu_1\lambda_1-\nu_2\lambda_2,\quad \beta_i=\frac{\partial U_i}{\partial x_1}\lambda_1 X_1+\frac{\partial U_i}{\partial x_2}\lambda_2 X_2.$$

Имеем с переобозначениями индексов суммирования: $\nu_i \to \nu_i'$, и повторно – $\nu_1' \to \nu_1 - k_1 + 1$, $\nu_2' \to \nu_2 - k_2$, а в другой сумме $\nu_1' \to \nu_1 - k_1$, $\nu_2' \to \nu_2 - k_2 + 1$:

$$\beta_i = \sum_{|k|=3} b_i^{(k_1 k_2)} \sum_{\nu'} (x_1^{k_1 - 1 + \nu_1'} x_1^{k_2 + \nu_2'} k_1 a_1^{(\nu_1' \nu_2')} + x_1^{k_1 + \nu_1'} x_1^{k_2 + \nu_2' - 1} k_2 a_2^{(\nu_1' \nu_2')}) \equiv \sum_{|\nu|=5} x_1^{\nu_1} x_1^{\nu_2} h_i^{(\nu_1 \nu_2)} ,$$

$$h_i^{(\nu_1 \nu_2)} = \sum_{|k|=3} b_i^{(k_1 k_2)} \left( \sum_{\nu_1 + \nu_2 = 5} k_1 a_1^{(\nu_1 - k_1 + 1, \nu_2 - k_2)} + k_2 a_2^{(\nu_1 - k_1, \nu_2 - k_2)} \right) =$$

$$= 3 b_i^{(3,0)} a_1^{(\nu_1 - 2, \nu_2)} + b_i^{(2,1)} (2 a_1^{(\nu_1 - 1, \nu_2 - 1)} + a_2^{(\nu_1 - 2, \nu_2)}) + b_i^{(1,2)} (a_1^{(\nu_1, \nu_2 - 2)} + 2 a_1^{(\nu_1 - 1, \nu_2 - 1)}) + 3 b_i^{(0,3)} a_2^{(\nu_1, \nu_2 - 2)} .$$

Аппроксимируя в $D$ однородные формы $\beta_i$ кубическими формами, получим:

$$\beta_i = f_i + \alpha_i \quad \text{при} \quad f_i = \sum_{|\nu|=3} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} c_i^{(\nu_1 \nu_2)}, \quad i = 1,2 .$$

при $c_i^{(30)} = \frac{3}{4} h_i^{(50)}$, $c_i^{(03)} = \frac{3}{4} h_i^{(05)}$, $c_i^{(21)} = \frac{3}{4}\left( h_i^{(41)} + h_i^{(23)} \right)$, $c_i^{(13)} = \frac{3}{4}\left( h_i^{(32)} + h_i^{(14)} \right)$

Отметим, что коэффициенты $c_i^{(\nu_1 \nu_2)}$ линейно зависят от $b_i^{k_1 k_2}$. Потребуем выполнения условия $(\varepsilon F_i + \varepsilon^2 f) \equiv 0$ отсутствия в невязках кубических форм, тогда имеем $\delta_i = \varepsilon^2 \alpha_i$, получаем две алгебраических системы

$$a_i^{(\nu_1 \nu_2)} - \Lambda_i^{(\nu_1 \nu_2)} b_i^{(\nu_1 \nu_2)} + \varepsilon c_i^{(\nu_1 \nu_2)} = 0, \quad i = 1,2 . \tag{13}$$

Приближенное решение уравнений (13), определенное по методу малого параметра, имеет вид

$$\tilde{b}_i^{(\nu_1, \nu_2)} = a_i^{(\nu_1, \nu_2)} / \Lambda_i^{(\nu_1, \nu_2)}, \quad b_i^{(\nu_1, \nu_2)} = \tilde{b}_i^{(\nu_1, \nu_2)} + \varepsilon \tilde{c}_i^{(\nu_1, \nu_2)} / \Lambda_i^{(\nu_1, \nu_2)}, \quad i = 1,2,$$

где $\tilde{c}_i^{(\nu_1, \nu_2)}$ – результат подстановки в коэффициенты $c_i^{(\nu_1, \nu_2)}$ выражений $\tilde{b}_i^{(\nu_1, \nu_2)}$. Дифференциальные уравнения (12) с точностью до невязок $\varepsilon^2 \alpha_i$ имеют вид

$$\dot{y}_i - \lambda_i y_i = 0, \quad i = 1,2 .$$

## Заключение

Рассмотрена нелинейная автономная динамическая система с несколькими степенями свободы с правой частью в форме степенных многочленов в конечной окрестности положения равновесия. Методом нормализации в многочленном варианте выполнено преобразование. С целью повышения точности преобразованной модели остаточные члены высоких степеней включаются в преобразованную систему посредством аппроксимаций Чебышева многочленами меньших степеней. Метод продемонстрирован на примере.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-08-01046-а.

## Литература


1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. – М.: МЦНМО, 2005. – 464 с.
2. Васильев С.Н., Козлов Р.И. Ульянов С.А. Анализ координатных и других преобразований моделей динамических систем методом редукции // Труды Института математики и механики. – УрО РАН, 2009. – Т. 15. – № 3. – С. 1–18.
3. Мельников В.Г. Энергетический метод параметрической идентификации тензоров инерции тел // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 1 (65). – С. 59–63.
4. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. – М.: Наука, Физматлит, 1998. – 288 с.
5. Мельников Г.И. О приближенном интегрировании уравнений возмущенного движения // Вестник Ленинградского госуниверситета. – 1963. – № 19. – Вып. 14. – С. 112–123; 1964. – № 1. – Вып. 1. – С. 88–98.
6. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб: Лань, 2011. – 304 с.
7. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. – Л.: Машиностроение, 1975. – 198 с.
8. Мельников В.Г. Многочленные преобразования нелинейных систем управления // Изв. вузов. Приборостроение. – 2007. – Т. 5. – № 50. – С. 20–25.
9. Melnikov V.G. Chebyshev economization in Poincare-Dulac transformations of nonlinear systems // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – № (5–7). – P. 351–355.
10. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Издательство физико-математической литературы, 1961. – 524 с.
11. Hamming R.W. Numerical methods for scientists and engineers. – Dover, 1986. – 721 p.

12. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – СПб: Лань, 2010. – 400 с.
13. Мельников В.Г. Применение метода экономизации К. Ланцоша при исследовании нелинейных колебаний механических систем // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2004. – Т. 50. – № 15. – С. 16–18.
14. Матросов В.М., Румянцев В.В., Карапетян А.В. Нелинейная механика. – М.: Физматлит, 2001. – 432 с.

***Мельников Виталий Геннадьевич*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой, melnikov@mail.ifmo.ru