doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-4-780-788
УДК 004.021

Построение оптимального плана дозаправок с использованием агрегированных сведений о значениях параметров маршрута из открытых источников

Максим Сергеевич Есин[1]✉, Максим Викторович Абрамов[2]

[1,2] Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация

[1] mse@dscs.pro✉, https://orcid.org/0000-0003-1011-9788
[2] mva@dscs.pro, https://orcid.org/0000-0002-5476-3025

Аннотация
Введение. Представлены результаты исследования подходов к решению задачи комбинаторной условной оптимизации плана дозаправок вдоль фиксированного автомобильного маршрута с учетом ограничений на объем бака, начального и конечного объема топлива, а также постоянного расхода топлива. Методы решения подобных задач основаны на применении алгоритмов поиска кратчайших путей, а также на методах линейного программирования. Их недостатком является недостаточная детализация состояний, получение нецелочисленных решений и высокая вычислительная сложность. Новизна представленного решения заключается в использовании расширенного пространства состояний и в разработке точного алгоритма, гарантирующего целочисленность планов и более низкую асимптотическую сложность. **Метод.** Предложенный алгоритм основан на применении двумерного динамического программирования, при котором для каждого узла маршрута и остатка топлива пересчитывается минимальная стоимость достижения состояния путем выбора между переходом без дозаправки и переходом с дозаправкой на одно деление бака. Алгоритм позволяет решать задачу оптимально за полиномиальное время при квадратичной сложности относительно числа узлов маршрута. **Основные результаты.** Апробация метода проводилась путем сравнения предложенного алгоритма с альтернативными подходами, основанными на графовых представлениях маршрута и методах линейного программирования. Для каждого подхода были построены алгоритмы решения поставленной задачи, после чего проведен сравнительный анализ их асимптотической сложности, а также точности и целочисленности получаемых решений. Предложенный алгоритм, в отличие от альтернативных вариантов, обеспечивает одновременно целочисленность компонент оптимального решения и имеет более низкую асимптотическую сложность. **Обсуждение.** Разработанные алгоритмы применимы для снижения затрат на топливо при транспортировке грузов, а также для повышения экономической эффективности туристических поездок по России. Дальнейшее направление исследования связано с учетом дополнительных факторов, влияющих на расход топлива, что потребует перехода к задачам большей размерности и разработке эвристических методов для их эффективного решения.

Ключевые слова
оценка стоимости поездки, динамическое программирование, комбинаторная оптимизация, алгоритм пересчета динамики, асимптотическая оценка сложности

Благодарности
Работа выполнена в рамках проекта по государственному заданию СПб ФИЦ РАН № FFZF-2025-0006.

Ссылка для цитирования: Есин М.С., Абрамов М.В. Построение оптимального плана дозаправок с использованием агрегированных сведений о значениях параметров маршрута из открытых источников // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 4. С. 780–788. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-4-780-788

Building an optimal refueling plan using aggregated information about route parameter values from open sources

Maxim S. Esin[1]✉, Maxim V. Abramov[2]

[1,2] St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation

[1] mse@dscs.pro✉, https://orcid.org/0000-0003-1011-9788
[2] mva@dscs.pro, https://orcid.org/0000-0002-5476-3025

Abstract
The paper presents the results of a study of approaches to solving the problem of combinatorial conditional optimization of the refueling plan along a fixed automobile route, taking into account restrictions on tank volume, initial and final fuel volumes as well as constant fuel consumption. Methods for solving such problems are based on the use of algorithms for finding the shortest paths as well as linear programming methods. Their disadvantage is the lack of granularity of states, obtaining non-integer solutions, and high computational complexity. The novelty of the solution lies in the use of an expanded state space and the development of an accurate algorithm that guarantees a high number of plans and a lower asymptotic complexity. The proposed algorithm is based on the application of two-dimensional dynamic programming in which for each node of the route and the remaining fuel, the minimum cost of reaching the state is recalculated by choosing between a transition without refueling and a transition with refueling by one tank division. The algorithm allows solving the problem optimally in polynomial time with quadratic complexity relative to the number of nodes on the route. The method was tested by comparing the proposed algorithm with alternative approaches based on graph representations of the route and linear programming methods. Algorithms for solving the problem were constructed for each approach after which a comparative analysis of their asymptotic complexity, as well as the accuracy and integers of the solutions obtained, was carried out. The proposed algorithm simultaneously ensures the integers of the components of the optimal solution and has a lower asymptotic complexity, unlike the alternative ones. The developed algorithms are applicable to reduce fuel costs during cargo transportation as well as to increase the economic efficiency of tourist trips in Russia. The further direction of the study is related to considering additional factors affecting fuel consumption which will require a transition to higher-dimensional tasks and the development of heuristic methods for their effective solution.

Keywords
calculation of trip cost, dynamic programming, combinatorial optimization, algorithm for recalculation of dynamics by layers, asymptotic complexity analysis

Acknowledgements
The work was carried out within the framework of the project under the State Assignment of SPC RAS No. FFZF-2025-0006.

For citation: Esin M.S., Abramov M.V. Building an optimal refueling plan using aggregated information about route parameter values from open sources. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 4, pp. 780–788 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-4-780-788

Введение

Минимизация расходов на топливо при следовании по заранее заданному автомобильному маршруту является одной из актуальных задач цифровизации в области автомобильной логистики и автотуризма как одного из наиболее перспективных видов развития туристической сферы в России[1]. Стоимость поездки на автомобиле во многом складывается из пройденного пути и стоимости на топливо. По результатам опроса одного автомобильного портала при следовании по маршруту 85 % опрошенных склонны останавливаться, когда топлива остается меньше трети от полного бака, а 29 % вовсе останавливаются только тогда, когда загорается индикатор пустого бака[2]. Такой подход позволяет получать локально оптимальные решения на отдельных участках пути, однако их комбинация не всегда приводит к глобально оптимальному решению.

При наличии агрегированных сведений о стоимости топлива на заправочных станциях, а также сведений о местоположении самих станций вдоль маршрута, становится возможным автоматическое построение плана дозаправок, минимизирующего общую стоимость топлива при соблюдении технических ограничений автомобиля, таких как объем бака и начальный и конечный объемы топлива. Подобная идея изложена в работе [1], в которой упоминается, что в Европе до 78 % грузовых перевозок осуществляется автомобильным транспортом, при этом снижение расходов на топливо может достигаться за счет выбора более дешевых заправочных станций. Для повышения доступности решения широкому кругу пользователей дополнительно рассматривается задача создания онлайн-сервиса, который позволит в реальном времени рассчитывать оптимальные планы дозаправок на основе актуальных данных о заправках.

Теоретически задача минимизации расходов топлива сводится к решению проблемы условной дискретной оптимизации: требуется определить, в каких станциях вдоль маршрута и на сколько надо заправиться, чтобы, пройдя весь путь от начальной до конечной точек, потратить на топливо минимально возможную сумму. При

[1] Автомобильный туризм в России является наиболее перспективным видом развития туристической сферы [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ac.gov.ru/news/page/avtomobilnyj-turizm-v-rossii-avlaetsa-naibolee-perspektivnym-vidom-razvitia-turisticeskoj-sfery-27813 (дата обращения: 17.07.2025).

[2] Опрос: где, как и чем заправляетесь? [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://auto.ru/mag/article/pollaboutfuelstations/ (дата обращения: 17.07.2025).

этом необходимо учитывать ограничения на максимальный объем бака и невозможность движения с пустым баком между узлами маршрута. Рассматриваемая в настоящей работе задача не гарантирует минимизацию расходов на преодоление пути между двумя точками, поскольку рассматривает только один фиксированный маршрут между ними, а не все возможные маршруты.

Однако данных о заправочных станциях и топливе может быть недостаточно для построения точной модели. Данные о загруженности и уклоне дорог, стиле вождения (который влияет на расход топлива), а также характеристики автомобиля и степень актуальности полученных цен на топливо и данных о погодных условиях могут влиять на оптимальность построенного плана дозаправок [2, 3]. Решение проблемы нехватки данных заключается в использовании открытых источников в реальном времени и расширении набора пользовательских параметров. Повышение размерности задачи и учет стохастических факторов в дальнейшем потребуют применения эвристик и обучения моделей на основе поэтапного добавления признаков. Поэтому в рамках данного исследования акцент сделан на разработке точных алгоритмов для задачи низкой размерности, необходимых для последующего построения сложных моделей.

В работе предложен точный полиномиальный алгоритм построения оптимального плана дозаправок, основанный на методах двумерного динамического программирования. Алгоритм реализует пошаговый пересчет таблицы состояний, в которой каждое новое состояние определяется минимизацией между переходом без дозаправки и заправкой на одно деление бака. Показано, что предлагаемый алгоритм строит решение уравнения Беллмана для рассматриваемой задачи, что гарантирует глобальную оптимальность найденного плана. Асимптотическая оценка предложенного алгоритма по времени — $O(N^2)$, где N — число узлов маршрута.

Существующие подходы к решению, рассматриваемые в обзоре релевантных работ, имеют ряд недостатков в контексте рассматриваемой задачи и работы онлайн-сервиса. Точные графовые методы, основанные на поиске кратчайших путей в сетевой структуре состояний, имеют сложность $O(N^2\log_2 N)$ в разреженном и $O(N^4)$ в плотном случае. Подходы на основе линейного программирования имеют сложность не ниже $O(N^3)$ на одну итерацию симплекс-метода. Более того, предложенный подход также обеспечивает целочисленность построенного плана дозаправок без необходимости последующего округления или модификации результата, в отличие от методов линейного программирования, которые формируют оптимальные планы с нецелочисленными значениями объема.

Практическая значимость работы заключается в том, что полученные результаты будут использованы при расширении функциональности логистического портала Cargotime.ru[1] путем создания сервиса по построению выгодного плана дозаправок вдоль дорожного маршрута.

Формализация задачи

Предположим, что при построении оптимального по стоимости плана известен фиксированный маршрут от начальной до конечной точек. Маршрут представлен в виде упорядоченного конечного множества из N равноотстоящих узлов. Расстояние между соседними узлами не превышает расстояния, которое может проехать автомобиль на полном баке. Поскольку работа алгоритма не зависит от стратегии построения маршрута, оптимальность общих расходов на преодоление пути от начальной до конечной точек не гарантируется. Алгоритм оптимизирует расходы на топливо только в рамках одного фиксированного маршрута.

В рамках поставленной задачи каждой заправочной станции сопоставляется единственный ближайший узел маршрута, находящийся в некоторой фиксированной ε-окрестности станции. Для каждого узла известна цена самого дешевого топлива подходящей пользователю марки за литр на сопоставленных узлу заправочных станциях. Не исключено наличие узлов, для которых не будет сопоставлено ни одной станции. Для таких узлов цена топлива полагается равной заведомо большому числу *inf*. Если алгоритм в качестве ответа возвращает число, превышающее *inf* или равное ему, то будем считать, что построение допустимого плана дозаправок по входным данным невозможно.

Помимо данных о маршруте, известны объем бака автомобиля $V_{\max}$, начальный объем топлива V_S, конечный объем топлива V_F, а также фиксированный расход топлива v на преодоление расстояния между двумя соседними узлами. Для упрощения постановки задачи примем, что v литров равно одному делению бака, при этом v делит $V_{\max}$, V_S и V_F нацело. В дальнейшем описании постановки задачи и работы алгоритма обозначение v использоваться не будет. Вместо этого будем говорить, что $V_{\max}$, V_S и V_F равны некоторому положительному целому числу делений, а $\mathbf{C}[i]$ (где $\mathbf{C}$ — N-мерный вектор) равно минимальной стоимости заправки одного деления подходящим топливом на сопоставленных i-ому узлу заправках.

Планом задачи будем называть N-мерный вектор $\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}[i]$ обозначает число делений, заправленных в i-ом узле. Тогда задача оптимизации сводится к минимизации значения линейной комбинации:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}[i] \times \mathbf{C}[i] \rightarrow \min.$$

При этом на вектор $\mathbf{F}$ накладываются несколько существенных ограничений.

Первая группа ограничений (неравенств), отвечает за возможное число заправленных в каждом узле делений. Бак вмещает ограниченное число делений, не большее $V_{\max}$ и не меньшее нуля. Правое неравенство является строгим из-за отсутствия возможности доехать до любой заправки на пустом баке.

Вторая и третья группы ограничений, исключают ситуации, когда автомобиль либо едет с пустым баком,

[1] Логистический портал Cargotime [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://cargotime.ru/ (дата обращения: 17.07.2025).

потратив в пути больше, чем суммарно заправив, либо когда едет с переполненным баком, суммарно заправив больше возможного объема бака даже с учетом потраченного в пути топлива.

Последнее равенство отвечает за то, что в конце маршрута число делений было равно требуемому, т. е. контролирует баланс имеющегося в начале, заправленного в пути и потраченного в пути топлива.

$$\begin{cases} 0 \leq \mathbf{F}[i] < V_{\max} \text{ для } 0 \leq i < N \\ V_S + \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbf{F}[i] \geq n + 1 \text{ для } 0 \leq n < N - 1 \\ V_S + \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbf{F}[i] - n \leq V_{\max} \text{ для } 0 \leq n < N \\ V_S + \sum\limits_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}[i] - N - 1 = V_F \end{cases}.$$

Как видно из постановки задачи, расход топлива при заезде на заправочную станцию не учитывается, поскольку сопоставленный узел находится в специально выбранной малой ε-окрестности станции.

Для приведенной постановки задачи построения оптимального плана дозаправок будет проведен анализ различных подходов к решению, а также предложен точный полиномиальный алгоритм, основанный на методах динамического программирования.

Обзор релевантных работ

В работе [4] сделан акцент на критику применения точных методов как альтернативы эвристическим методам для решения задач оптимизации маршрутов. Авторы заявили о нерелевантности применения точных методов для решения задач дистрибуции при высокой размерности или стохастической постановке задачи. В [5] приведено описание эвристического алгоритма для задачи маршрутизации и планирования с временными окнами, являющейся модификацией классической задачи о коммивояжере, оптимизационная постановка которой является NP-трудной. В перспективе развития онлайн-сервиса использование эвристических алгоритмов для решения задачи с учетом ряда стохастических факторов и степени доверия к данным очень вероятно. Однако в контексте решения текущей задачи оптимизации и создания синтетических данных для дальнейшего обучения моделей более высоких размерностей важную роль играют именно точные методы, обеспечивающие оптимальность результатов на имеющихся данных, поэтому они будут рассматриваться как основные.

Если принимать во внимание только точные методы решения, то задачу оптимизации плана дозаправок можно рассматривать как проблему линейного программирования, которая подразумевает полиномиальное по времени решение рандомизированным симплекс-методом [6, 7]. Однако, как в рамках работы разрабатываемого сервиса по оценке стоимости пути, так и сбора синтетических данных может потребоваться получить решения сразу для нескольких похожих входных данных, отличающихся объемом оставшегося топлива в баке в конце пути. При использовании методов линейного программирования потребуется пересчитывать решение нескольких «близких» задач, отличающихся только конечным объемом топлива, чего требуется избежать как минимум для эффективного сбора данных для последующего обучения новых моделей, как максимум — для текущей оперативной работы сервиса. Кроме того, решения, полученные с помощью методов линейного программирования, необязательно будут целочисленными. Требование целочисленности компонент вектора $\mathbf{F}$, который является планом задачи, позволит снизить шум в обучающих данных, а также повысить скорость обучения, снизив число операций, связанных с округлением или дробными значениями при вычислении, например, значения функции потерь.

Задачу оптимизации плана дозаправок возможно свести к рассмотрению взвешенного ориентированного графа, где весом ребра между двумя вершинами (узлами маршрута) является некоторая величина, зависящая от расстояния между узлами и стоимостью топлива на одном из концов пути [8]. Наличие ребра между двумя вершинами сигнализирует о том, что на преодоление расстояния между ними хватит не более чем одного полного бака. Так, в работе [8] приводится описание трехмерной оптимизации алгоритма Дейкстры, которая позволяет генерировать глобально оптимальный маршрут судна. При этом в оптимизацию заложена возможность настраивать расход топлива и реагировать на погодные условия. В [9] алгоритм Дейкстры используется для вычисления средней скорости потока для минимизации расходов на топливо. В [10] использован алгоритм Форда–Беллмана для графов с отрицательными весами ребер для энергоэффективной маршрутизации электромобилей с отрицательными затратами на торможение за счет применения рекуперативной системы торможения. В [11] для оптимизации маршрута при управлении интеллектуальной системой управления отходами используется алгоритм Дейкстры. Главным недостатком графовых методов в контексте рассмотренной задачи является простота структуры графа. Так, в работе [12] в качестве алгоритма оптимизации плана дозаправок планировалось использовать алгоритм Дейкстры, для которого весом направленного ребра между двумя узлами служила стоимость заправки до полного бака в конечном узле. В оптимальном решении, которое в контексте графовых методов будет являться простой цепью вершин, остаток топлива в посещенных вершинах может быть разным. Однако в вершинах графа заложена лишь информация о стоимости топлива, а уровень топлива всегда подразумевается одинаковым (равным начальному уровню топлива) для всех вершин. Таким образом, данный подход в общем случае не гарантирует оптимальности решения, поскольку не позволяет моделировать более сложные варианты дозаправок с помощью графов.

Методы динамического программирования тоже находят применение в задачах оптимизации маршрутов. В работе [13] метод динамического программирования используется для построения оптимального маршрута электромобилей, доставляющих электроэнергию до отдаленных регионов. В [14] использованы схожие методы для задачи оптимизации маршрута морского судна с учетом различных погодных факторов. Методы многомерной динамики позволяют решить проблему излишней простоты графовой структуры: для каждого узла маршрута можно рассматривать несколько состояний, отвечающих за разные объемы топлива, оставшиеся после перехода из предыдущего узла. Это позволит рассмотреть все возможные планы дозаправок с учетом разного объема топлива в промежуточных узлах и найти оптимальное решение в общем случае. Кроме того, применение методов динамического программирования выглядит предпочтительнее решения задачи линейного программирования, поскольку при сохранении и переиспользовании результатов промежуточных состояний (подзадач) можно получить оптимальные планы сразу для нескольких «близких» задач, что важно в контексте быстродействия разрабатываемого сервиса. Не менее важным преимуществом методов динамического программирования в контексте дальнейшей работы по обучению моделей является целочисленность компонентов оптимального плана задачи (в случае, если множество допустимых планов не пусто), которая будет показана в разработанном алгоритме.

Проведенный анализ релевантных работ и сервисов говорит об отсутствии готовых и общедоступных алгоритмов для задачи построения оптимального плана дозаправок вдоль фиксированного маршрута с подтвержденной оптимальностью решения. При этом методы многомерного динамического программирования выглядят предпочтительнее рассмотренных подходов, основанных на теории графов, эвристической оптимизации и линейном программировании, поскольку позволяют получать оптимальное решение за полиномиальное время от числа узлов маршрута, а также эффективно переиспользовать данные о ранее вычисленных планах дозаправок и гарантировать целочисленность компонент оптимального плана. Для решения поставленной задачи рассмотрим точный полиномиальный алгоритм, основанный на методе двумерного динамического программирования, позволяющий получить оптимум целевой функции, то есть минимальный объем средств, необходимых для преодоления заданного маршрута, а также полиномиальный алгоритм, позволяющий восстановить сам план дозаправок.

Алгоритм нахождения оптимума

На основе поставленной задачи построения оптимального плана дозаправок сформулируем рекурсивное уравнение Беллмана. Построим алгоритм восходящего динамического программирования, описывающий метод получения решений этого уравнения для дискретных состояний. В соответствии с принципом оптимальности Беллмана алгоритм будет гарантировать построение оптимального плана, если множество допустимых планов для входных данных не пусто.

Введем целевую вещественную функцию $\delta(i, j)$, определенную на дискретном множестве *состояний динамики* $\Omega = [0, N-1] \times [1, V_{\max}]$ и отвечающую за минимальную суммарную стоимость топлива для достижения i-ого узла маршрута с остатком j делений топлива в баке. Подразумевается, что состояния, при которых второе измерение равно нулю (бак пуст) не рассматриваются как достижимые из соображений безопасности: велик риск остаться без топлива, не доехав до ближайшей заправки.

Переходом между состояниями из Ω будем считать либо атомарное передвижение от одного узла к соседнему следующему, при котором расходуется ровно одно деление бака, либо дозаправку в одном из узлов на одно деление. При этом предположим, что переход первого вида бесплатный, поскольку деньги не тратятся на заправку, а второй будет равен стоимости заправки одного деления в этом узле. Таким образом, до состояния (i, j) можно добраться из состояния $(i-1, j+1)$ без дозаправки в i-ом узле, либо из состояния $(i, j-1)$, заправившись на одно дополнительное деление. Необходимо отметить, что любой допустимый способ достижения конечной точки маршрута, подразумевающий только целые значения компонент вектора $\mathbf{F}$, можно представить в виде конечной последовательности двух перечисленных переходов.

Искомое рекурсивное уравнение Беллмана имеет вид:

$$\delta(i, j) = \min\begin{cases} \delta(i-1, j+1) \\ \delta(i, j-1) + \mathbf{C}[i] \end{cases},$$

где $\mathbf{C}[i]$ — минимальная стоимость заправки одного деления подходящим топливом на сопоставленных i-ому узлу заправках. Для корректности записи уравнения примем значения функции δ на состояниях, не входящих в Ω, равными *inf*.

Построим алгоритм восходящего динамического программирования, описывающий метод нахождения решений уравнения Беллмана, т. е. саму функцию δ на всей области определения, и значение $\delta(N-1, V_F)$ в частности, которое является оптимумом задачи (либо говорит об отсутствии допустимых планов в случае равенства *inf*).

Пусть матрица $\mathbf{D}$ размером $N \times V_{\max}$ отвечает за значение $\delta(i, j)$ для каждого состояния (i, j) из Ω. Таким образом, $\mathbf{D}[i][j]$ отвечает за минимальную стоимость, за которую можно добраться до i-ого узла маршрута с заполненным ровно на $j/V_{\max}$ баком. Необходимые состояния и соответствующие им оптимальные значения целевой функции δ можно представить в виде матрицы:

$$\delta = \begin{pmatrix} \mathbf{D}[0][1] & \cdots & \mathbf{D}[N-1][1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}[0][V_{\max}] & \cdots & \mathbf{D}[N-1][V_{\max}] \end{pmatrix}.$$

Для вычисления значения $\mathbf{D}[i][j]$ требуется понять, по какому переходу из двух доступных выгоднее попасть в это состояние, т. е. найти:

$$\mathbf{D}[i][j] = \min(\mathbf{D}[i-1][j+1], \mathbf{D}[i][j-1] + \mathbf{C}[i]).$$

Пересчет матрицы оптимальных значений целевой функции $\mathbf{D}$ будет происходить сверху вниз для каждого столбца слева направо. Для вычисления оптимальных значений для всего набора состояний требуется в качестве входных данных задать значение $\mathbf{D}[0][V_S]$, равное нулю, поскольку автомобиль изначально находится в состоянии $(0, V_S)$, и за это не надо платить. Остальные значения матрицы **D** изначально будут равны *inf*, поскольку на момент начала расчета значений **D** они недостижимы. После расчета значений всех достижимых состояний в последнем столбце **D** будет указана информация о стоимости поездки для $V_{\max}$ возможных итоговых уровней топлива. Алгоритм пересчета можно представить на псевдокоде следующим образом:

```
for (i = 1; i < N; i + +){
   D[i][1] = D[i − 1][2];
   for (j = 2; j < Vmax; j + +){
      D[i][j] = min(D[i − 1][j + 1],
      D[i][j − 1] + C[i];
   }
   D[i][Vmax] = D[i][Vmax − 1] + C[i];
}
```

Алгоритм описывает поиск решений уравнения Беллмана, задающихся значением V_S числа делений бака в начале пути, поскольку полученные функции δ удовлетворяют уравнению в каждой точке Ω по построению. Таким образом, в случае достижимости состояния $(N - 1, V_F)$ при изначально заданных V_S и V_F можно говорить об оптимальности значения стоимости заправленного на протяжении всего пути топлива, хранящегося в $\mathbf{D}[N - 1][V_F]$.

Решение, полученное с помощью приведенного алгоритма, подразумевает только целые компоненты вектора **F**, поскольку имеющиеся переходы позволяют заправляться только на целое число делений. На самом деле, оптимальный план дозаправок может содержать нецелые компоненты, например, при равной стоимости топлива на всех заправках. Однако, можно строго показать, что среди множества оптимальных планов, если оно не пусто, должен быть план с исключительно целочисленными компонентами.

Предположим, что все оптимальные планы содержат хотя бы одну нецелую компоненту. Поскольку значения V_F и V_S целочисленные, исходя из последнего равенства в ограничениях сформулированной задачи, сумма нецелых компонент вектора **F** должна быть целой, значит, их не меньше двух. Рассмотрев две ближайшие к началу маршрута нецелые компоненты вектора **F**, можно убедиться, что полученный план либо не является оптимальным, поскольку можно без потери допустимости плана снизить итоговую стоимость, перегруппировав нецелые компоненты (в случае неравенства цен в соответствующих узлах), либо (в случае равенства цен) снизить количество нецелых компонент вектора **F** хотя бы на одну. Проведя подобную манипуляцию с двумя ближайшими к началу маршрута компонентами достаточное количество раз, можно получить план, состоящий из целочисленных координат (опровергнув изначальное предположение) или показать, что множество оптимальных планов пусто.

Асимптотическая сложность данного алгоритма — $O(N \times V_{\max})$, потому что на каждый из N столбцов уходит не более $O(V_{\max})$ операций сравнения. Поскольку объем одного деления топлива, который требуется для преодоления расстояния между соседними узлами, линейно зависит от числа узлов, на который разбивается заданный, фиксированный по длине маршрут, можно утверждать, что количество делений $V_{\max}$ линейно зависит от числа узлов N. Поэтому сложность предложенного алгоритма можно оценить как $O(N^2)$.

В случае достижения допустимого состояния оптимальный план дозаправок можно восстановить, используя вспомогательную таблицу переходов *prev*, которая параллельно заполняется в процессе пересчета динамики. При этом для каждого состояния динамики запоминается, был ли совершен переход без дозаправки или с заправкой на одно деление топлива. Обратным проходом по таблице *prev* с аналогичной оценкой сложности $O(N^2)$ восстанавливается последовательность заправок, соответствующая минимальной стоимости.

Итак, в зависимости от требуемого конечного объема топлива V_F, значение $\mathbf{D}[N - 1][V_F]$ является оптимумом для поставленной задачи или говорит о том, что требуемое состояние недостижимо. Таким образом, был разработан полиномиальный алгоритм вычисления оптимума для задачи поиска оптимального плана дозаправок, а также предложен полиномиальный алгоритм восстановления оптимального плана по вспомогательной таблице переходов *prev*. Была показана корректность алгоритма, оптимальность получаемых решений задачи оптимизации, а также целочисленность компонент оптимального плана.

Тестирование

В рамках исследования был проведен сравнительный анализ точных алгоритмов для решения задачи поиска оптимума на основе методов оптимизации, приведенных в разделе «Обзор релевантных работ». В частности, были получены оценки сложности алгоритмов по времени, на основе которых сделан вывод о превосходстве подхода динамического программирования при решении поставленной задачи.

Первые рассматриваемые алгоритмы опираются на применение алгоритмов поиска кратчайшего пути для сетевой структуры направленного взвешенного

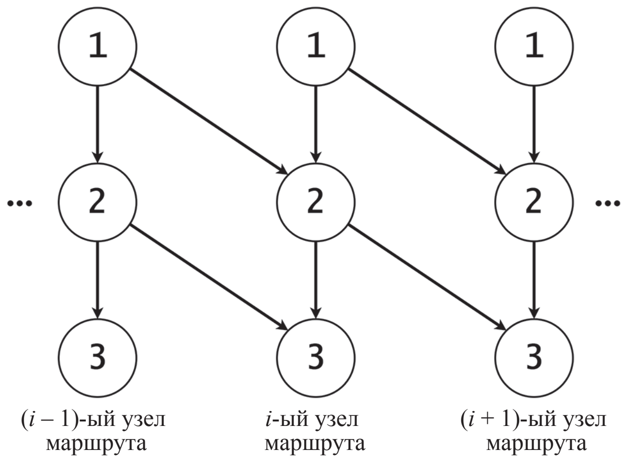

Рисунок. Сетевая структура графа для решения задачи оптимизации плана

Figure. Network graph structure for solving the plan optimization problem графа, где каждому узлу маршрута соответствует несколько состояний (вершин графа), отвечающих за уровень топлива в баке, расположенных на рисунке. Направленные взвешенные ребра отвечают за возможные переходы между состояниями, причем их веса соответствуют весам переходов, определенных в разделе «Алгоритм нахождения оптимума» (алгоритма восходящей динамики). Схожий подход с сетевой структурой графа применяется в исследованиях [8, 9].

Поскольку было показано, что число делений бака $V_{\max}$ линейно зависит от числа узлов маршрута N, то число вершин в подобной структуре будет составлять $O(N^2)$. Заметим, что число ребер не превышает удвоенного числа вершин, поэтому число ребер тоже можно оценить как $O(N^2)$. В связи с этим в зависимости от реализации алгоритма Дейкстры ($O(V\log_2(V) + E\log_2(V))$ для разреженных и $O(V^2 + E)$ для плотных графов, где V — число вершин, E — число ребер в графе, сложность полученных алгоритмов составит ($O(N^2\log_2(N))$ или $O(N^4)$ соответственно. Использование иных алгоритмов поиска кратчайшего пути взамен алгоритма Дейкстры, например, алгоритма Форда–Беллмана [10], избыточно, поскольку граф не содержит ребер отрицательного веса. Плюсом графового подхода является сохранение целочисленности компонент оптимального плана за счет дискретности состояний.

Другой подход заключается в решении задачи линейного программирования, целевая функция и ограничения которой были сформулированы в разделе «Обзор релевантных работ». И число ограничений d, и число переменных n для такой задачи можно оценить как $O(N)$, где N — число узлов маршрута. Тогда асимптотическая сложность одной итерации классического симплекс-метода составит $O(N^3)$ [15], не говоря о нарушении целочисленности компонент оптимального плана. Рандомизированный симплекс-метод [6, 7] позволит снизить оценку сложности, которая зависит от числа ограничений d, числа переменных n и стандартного отклонения случайных возмущений σ, применяемых к данным [7]. Однако он не гарантирует решение задачи целочисленного программирования без потери оптимальности за полиномиальное время [15].

В таблице приведены результаты сравнительного анализа известных подходов и предложенного алгоритма, по которым можно сделать вывод о превосходстве предложенного метода при решении поставленной задачи, так как рассмотренные аналоги либо не соблюдают требования целочисленности компонент оптимального решения, либо имеют более высокую асимптотическую сложность по времени.

Обсуждение

Число дозаправок вдоль маршрута в приведенной постановке задачи ограничивается сверху только минимумом из общего числа заправок и числа точек маршрута. Предполагается, что число дозаправок в реализуемом на практике маршруте не должно быть велико, даже если кажется, что так дешевле: частые отклонения от маршрута до ближайшей заправки подразумевают не столько дополнительный расход топлива, сколько потерю времени в очередях (особенно в час пик) и повышение вероятности мелких ДТП. В работе [16] был приведен алгоритм динамического программирования, позволяющий учитывать это ограничение. Однако на данный момент не проводились ни оценка того, насколько оптимум задачи с ограничением отличается от оптимума задачи без ограничения, ни сравнение числа дозаправок в оптимальном плане с минимально возможным числом дозаправок, необходимых для преодоления маршрута.

Другим важным направлением исследований является учет факторов, влияющих на расход топлива. Существующие исследования [2, 3] показывают, что подход с постоянным на всем протяжении пути расходом топлива, который использовался при постановке задачи оптимизации, не является точным. Например, в [3] показано, что внешние факторы повышают расход топлива у дизельного автобуса на 18–74 % относительно нормы. Кроме того, Минтранс России заявляет[1] о повышении расхода топлива вплоть до 35 % в зависимости от рассматриваемых факторов, включающих категорию используемой дороги, численность населения ближайших населенных пунктов, состояние автомобиля и даже высоту над уровнем моря.

Учет динамического расхода топлива, изменяющегося под воздействием внешних факторов, вероятно потребует повышения размерности задачи. Однако, как

[1] Нормы расхода топлив на автомобильном транспорте по данным Минтранса России [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_76009/82bf9cc78a60bfd08d52fecd2b37de9f9f844a9f/ (дата обращения: 17.07.2025).

Таблица. Сравнение известных подходов решения поставленной задачи оптимизации

Table. Comparison of known approaches to solving the optimization problem

Алгоритм	Средняя сложность по времени	Целочисленность компонент оптимального плана
Алгоритм Дейкстры для разреженных графов для сетевой структуры [12, 13]	$O(N^2\log_2(N))$	Сохраняется
Алгоритм Дейкстры для плотных графов для сетевой структуры [12, 13]	$O(N^4)$	Сохраняется
Классический симплекс-метод [15]	$O(N^3)$ для одной итерации	Не сохраняется
Рандомизированный симлекс-метод [10, 11]	$O(d, n, \sigma)$	Не сохраняется
Предложенный метод	$O(N^2)$	Сохраняется

показывают исследования [16], повышение размерности задачи, такое как ограничение на число дозаправок, не всегда связано с переходом на эвристические методы и последующей потерей оптимальности решений. В дальнейших исследованиях при решении подобных низкоразмерных задач точными методами можно использовать различные оптимизации пересчета динамики по слоям, включая дискретный метод Лагранжа [17], которые позволят снизить асимптотическую сложность алгоритма.

Возможно применение полученных оптимизационных алгоритмов в задаче построения многозвенных маршрутов транспортировки, которые позволяют минимизировать расходы на перевозку груза путем разбиения маршрута на несколько участков, за каждый из которых несут ответственность разные транспортные компании [18].

Заключение

В рамках исследования была сформулирована задача комбинаторной условной оптимизации, связанная с выбором оптимального с точки зрения стоимости плана дозаправок вдоль заданного маршрута, а также исследованы точные методы ее решения. Показано, что методы динамического программирования в сравнении с методами линейного программирования и графовыми методами лучше учитывают специфику разрабатываемого сервиса за счет переиспользования результатов промежуточных подзадач. Предложенные алгоритмы позволяют решать задачу поиска и восстановления оптимального плана дозаправок за время, полиномиальное от числа точек предварительно дискретизированного маршрута, которое оценивается как $O(N^2)$, где N равно числу узлов маршрута. Помимо корректности алгоритма динамического программирования приведены рассуждения, показывающие оптимальность получаемых решений и целочисленность их компонент.

В дальнейшем планируется продолжить исследования, связанные с влиянием ограничения на число остановок сверху на итоговую стоимость поездки, а также исследования, связанные с учетом динамического расхода топлива, зависящего от различных внешних факторов, с целью повысить точность модели. Также планируется осуществить запуск тестового прототипа сервиса оценки стоимости поездки на автомобиле в рамках логистического портала Cargotime.ru.

Литература

1. Kovács G. Optimization method and software for fuel cost reduction in case of road transport activity // Acta Polytechnica. 2017. N 57. N 3. P. 201–208. https://doi.org/10.14311/AP.2017.57.0201
2. Goryaev N.K., Khabibullozoda Kh.Kh., Faizalizoda F.H. Research of factors affecting yrucks fuel consumption: review // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2021. V. 666. P. 042056. https://doi.org/10.1088/1755-1315/666/4/042056
3. Chikishev E., Chainikov D. Assessment of external factors influence on the fuel consumption of a diesel bus operating on a city route // Transportation Research Procedia. 2022. V. 61. P. 354–360. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2022.01.057
4. Rizzoli A., Casagrande N., Donati A.V., Gambardella L.M., Lepori D., Montemanni R., Pina P., Zaffalon M. Planning and optimisation of vehicle routes for fuel oil distribution // Proc. of the MODSIM International Congress on Modelling and Simulation. 2003. P. 1–6.
5. Pérez M.A.J, Loaiza R.E.P., Flores P.M.Q, Ponce O.A., Peralta C.F. A heuristic algorithm for the routing and scheduling problem with time windows: a case study of the automotive industry in Mexico // Algorithms. 2019. V. 12. N 5. P. 111. https://doi.org/10.3390/a12050111
6. Kelner J.A., Spielman D.A. A randomized polynomial-time simplex algorithm for linear programming // Proc. of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 2006. P. 51–60. https://doi.org/10.1145/1132516.1132524
7. Spielman D.A., Teng S.-H. Smoothed analysis of algorithms: why the simplex algorithm usually takes polynomial time // Journal of the ACM. 2001. V. 51. N 3. P. 385–463. https://doi.org/10.1145/990308.990310
8. Wang H., Mao W., Eriksson L. A Three-Dimensional Dijkstra's algorithm for multi-objective ship voyage optimization // Ocean Engineering. 2019. V. 186. P. 106131. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106131
9. Xu B., Chen X., Li K., Hu M., Bian Y., Yu Q., Wang J. Double-layer speed optimization for reducing fuel consumption with vehicle-to-infrastructure communication // Journal of Intelligent Transportation Systems: Technology, Planning and Operations. 2019. V. 23. N 5. P. 513–524. http://doi.org/10.1080/15472450.2019.1578565
10. Abousleiman R., Rawashdeh O. A Bellman-Ford approach to energy efficient routing of electric vehicles // Proc. of the IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC). 2015. P. 1–4. https://doi.org/10.1109/ITEC.2015.7165772

References

1. Kovács G. Optimization method and software for fuel cost reduction in case of road transport activity. *Acta Polytechnica*, 2017, no. 57, no. 3, pp. 201–208. https://doi.org/10.14311/AP.2017.57.0201
2. Goryaev N.K., Khabibullozoda Kh.Kh., Faizalizoda F.H. Research of factors affecting yrucks fuel consumption: review. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2021, vol. 666, pp. 042056. https://doi.org/10.1088/1755-1315/666/4/042056
3. Chikishev E., Chainikov D. Assessment of external factors influence on the fuel consumption of a diesel bus operating on a city route. *Transportation Research Procedia*, 2022, vol. 61, pp. 354–360. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2022.01.057
4. Rizzoli A., Casagrande N., Donati A.V., Gambardella L.M., Lepori D., Montemanni R., Pina P., Zaffalon M. Planning and optimisation of vehicle routes for fuel oil distribution. *Proc. of the MODSIM International Congress on Modelling and Simulation*, 2003, pp. 1–6.
5. Pérez M.A.J, Loaiza R.E.P., Flores P.M.Q, Ponce O.A., Peralta C.F. A heuristic algorithm for the routing and scheduling problem with time windows: a case study of the automotive industry in Mexico. *Algorithms*, 2019, vol. 12, no. 5, pp. 111. https://doi.org/10.3390/a12050111
6. Kelner J.A., Spielman D.A. A randomized polynomial-time simplex algorithm for linear programming. *Proc. of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 2006, pp. 51–60. https://doi.org/10.1145/1132516.1132524
7. Spielman D.A., Teng S.-H. Smoothed analysis of algorithms: why the simplex algorithm usually takes polynomial time. *Journal of the ACM*, 2001, vol. 51, no. 3, pp. 385–463. https://doi.org/10.1145/990308.990310
8. Wang H., Mao W., Eriksson L. A Three-Dimensional Dijkstra's algorithm for multi-objective ship voyage optimization. *Ocean Engineering*, 2019, vol. 186, pp. 106131. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106131
9. Xu B., Chen X., Li K., Hu M., Bian Y., Yu Q., Wang J. Double-layer speed optimization for reducing fuel consumption with vehicle-to-infrastructure communication. *Journal of Intelligent Transportation Systems: Technology, Planning and Operations*. 2019, vol. 23, no. 5, pp. 513–524. http://doi.org/10.1080/15472450.2019.1578565
10. Abousleiman R., Rawashdeh O. A Bellman-Ford approach to energy efficient routing of electric vehicles. *Proc. of the IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC)*, 2015, pp. 1–4. https://doi.org/10.1109/ITEC.2015.7165772

11. Hossain M.A., Ahmedy I., Harith M.Z., Idris M., Soon T.K., Noor R.M., Yusoff S.B. Route optimization by using Dijkstra's algorithm for the waste management system // Proc. of the 3rd International Conference on Information Science and Systems. 2020. P. 110–114. https://doi.org/10.1145/3388176.3388186
12. Корепанова А.А., Есин М.С., Сабреков А.А. Подходы к разработке сервиса учета расходов на топливо и маршрутной адаптации с учетом пользовательских параметров // Региональная информатика и информационная безопасность: Сборник трудов. 2023. № 12. С. 294–297.
13. Zhang Y., Cao W., Zhao H., Gao S. Route planning algorithm based on dynamic programming for electric vehicles delivering electric power to a region isolated from power grid // Artificial Life and Robotics. 2023. V. 28. N 3. P. 583–590. https://doi.org/10.1007/s10015-023-00879-7
14. Choi G.-H., Lee W., Kim T. Voyage optimization using dynamic programming with initial quadtree based route // Journal of Computational Design and Engineering. 2023. V. 10. N 3. P. 1185–1203. https://doi.org/10.1093/jcde/qwad055
15. Bazaraa M., Jarvis J., Sherali H. Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, 2009. 768 p.
16. Zolotykh D.A., Sabrekov A.A., Esin M.S., Korepanova A.A. Automating the construction of an optimal refuelling plan along a car route taking into account the limit on the number of stops // Proc. of the 27th International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM). 2024. P. 389–392. https://doi.org/10.1109/SCM62608.2024.10554122
17. Hou J., Zhai Q., Zhou Y., Guan X. A fast solution method for large-scale unit commitment based on lagrangian relaxation and dynamic programming // IEEE Transactions on Power Systems. 2024. V. 39. N 2. P. 3130–3140. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2023.3287199
18. Есин М.С., Корепанова А.А., Сабреков А.А. Агрегация и анализ сведений логистических компаний для построения сложного маршрута перевозки груза // Программные продукты и системы. 2023. № 2. С. 309–319. https://doi.org/10.15827/0236-235X.142.309-319

11. Hossain M.A., Ahmedy I., Harith M.Z., Idris M., Soon T.K., Noor R.M., Yusoff S.B. Route optimization by using Dijkstra's algorithm for the waste management system. *Proc. of the 3rd International Conference on Information Science and Systems*, 2020, pp. 110–114. https://doi.org/10.1145/3388176.3388186
12. Korepanova A., Esin M., Sabrekov A. Approaches to the development of a fuel cost accounting and route adaptation service according to user parameters. *Proc. of the Regional Informatics and Information Security*, 2023, no. 12, pp. 294–297. (in Russian)
13. Zhang Y., Cao W., Zhao H., Gao S. Route planning algorithm based on dynamic programming for electric vehicles delivering electric power to a region isolated from power grid. *Artificial Life and Robotics*, 2023, vol. 28, no. 3, pp. 583–590. https://doi.org/10.1007/s10015-023-00879-7
14. Choi G.-H., Lee W., Kim T. Voyage optimization using dynamic programming with initial quadtree based route. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2023, vol. 10, no. 3, pp. 1185–1203. https://doi.org/10.1093/jcde/qwad055
15. Bazaraa M., Jarvis J., Sherali H. *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, 2009, 768 p.
16. Zolotykh D.A., Sabrekov A.A., Esin M.S., Korepanova A.A. Automating the construction of an optimal refuelling plan along a car route taking into account the limit on the number of stops. *Proc. of the 27th International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM)*, 2024, pp. 389–392. https://doi.org/10.1109/SCM62608.2024.10554122
17. Hou J., Zhai Q., Zhou Y., Guan X. A fast solution method for large-scale unit commitment based on lagrangian relaxation and dynamic programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2024, vol. 39, no. 2, pp. 3130–3140. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2023.3287199
18. Esin M.S., Korepanova A.A., Sabrekov A.A. Aggregation and analysis of information from logistics companies to build a complex cargo transportation route. *Software & Systems*, 2023, vol. 36, no. 2, pp. 309–319. (in Russian). https://doi.org/10.15827/0236-235X.142.309-319

Авторы

Есин Максим Сергеевич — младший научный сотрудник, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация, sc 58493347500, https://orcid.org/0000-0003-1011-9788, mse@dscs.pro

Абрамов Максим Викторович — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация, sc 56938320500, https://orcid.org/0000-0002-5476-3025, mva@dscs.pro

Authors

Maxim S. Esin — Junior Researcher, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation, sc 58493347500, https://orcid.org/0000-0003-1011-9788, mse@dscs.pro

Maxim V. Abramov — PhD, Leading Researcher, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation, sc 56938320500, https://orcid.org/0000-0002-5476-3025, mva@dscs.pro

Статья поступила в редакцию 11.12.2024
Одобрена после рецензирования 25.06.2025
Принята к печати 26.07.2025

Received 11.12.2024
Approved after reviewing 25.06.2025
Accepted 26.07.2025