

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-1-51-59

УДК 618.51

Управление линейными объектами по выходу при наличии запаздывания и возмущения в канале управления

Тхе Донг Данг¹, Ба Хю Нгуен²✉, Игорь Борисович Фуртат³, Павел Александрович Гушчин⁴

^{1,2,3,4} Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация

^{1,3} Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

¹ dangtd93@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0005-4733-7510>

² leningrat206@gmail.com✉, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>

³ cainenash@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>

⁴ guschin.p@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4788-9137>

Аннотация

Введение. Представлен алгоритм управления по выходу для линейных систем с запаздыванием во входном сигнале при наличии внешних возмущений. **Метод.** Предлагаемый закон управления включает два основных компонента. Первый компонент представляет собой предиктор выходного сигнала, используемый для синтеза управляющего воздействия, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы. Второй компонент основан на предсказании возмущений и предназначен для их компенсации. **Основные результаты.** Приведена процедура синтеза предикторов выходной переменной и возмущений, а также метод выбора вспомогательного контура для оценки возмущений. Полученные результаты строго обоснованы математически. **Обсуждение.** Ключевым преимуществом предложенного подхода является то, что предиктор выходного сигнала формируется непосредственно на основе измеряемого выхода системы, что позволяет осуществлять синтез закона управления без использования состояния объекта, в отличие от ряда традиционных методов. Эффективность разработанного алгоритма подтверждается результатами компьютерного моделирования в среде MATLAB/Simulink.

Ключевые слова

линейный объект с запаздыванием, управление по выходу, предиктор выходного сигнала, предиктор возмущения

Благодарности

Подраздел «Синтез алгоритма управления на базе предиктора» и раздел «Моделирование» выполнены в Университете ИТМО при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSER-2025-0002. Подраздел «Анализ устойчивости замкнутой системы» выполнен в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № FFNF-2024-0008 (№ 124041100006-1 в ЕГИСУ НИОКТР).

Ссылка для цитирования: Данг Т.Д., Нгуен Б.Х., Фуртат И.Б., Гушчин П.А. Управление линейными объектами по выходу при наличии запаздывания и возмущения в канале управления // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2026. Т. 26, № 1. С. 51–59. doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-1-51-59

Output tracking control of linear systems with input delays and disturbances

The Dong Dang¹, Ba Huy Nguyen²✉, Igor B. Furtat³, Pavel A. Gushchin⁴

^{1,2,3,4} Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation

^{1,3} ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

¹ dangtd93@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0005-4733-7510>

² leningrat206@gmail.com✉, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>

³ cainenash@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>

⁴ guschin.p@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4788-9137>

© Данг Т.Д., Нгуен Б.Х., Фуртат И.Б., Гушчин П.А., 2026

Abstract

This paper presents an output-feedback control algorithm for linear systems with input delays in the presence of external disturbances. The proposed control law consists of two main components. The first component is an output predictor employed for synthesizing the control input that guarantees the stability of the closed-loop system. The second component is based on disturbance prediction and is designed to compensate for external disturbances. A synthesis procedure for the output and disturbance predictors is provided, along with a method for selecting an auxiliary loop for disturbance estimation. The obtained results are validated through strict mathematical analysis. A key advantage of the proposed approach is that the output predictor is constructed directly from the measured system output, which enables controller synthesis without relying on the system state, unlike many traditional methods. The effectiveness of the developed algorithm is demonstrated through computer simulations in MATLAB/Simulink.

Keywords

linear time-delay systems, output-feedback control, output predictor, disturbance predictor

Acknowledgements

The sections “Synthesis of a Predictor-Based Control Algorithm” and “Modeling” were supported at ITMO University by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSER-2025-0002). The section “Analysis of Closed-Loop System Stability” was completed at the IPME RAS with the support of Goszadanie no. FFNF-2024-0008 (no. 124041100006-1 in EGISU NIOKTR).

For citation: Dang T.D., Nguyen B.H., Furtat I.B., Gushchin P.A. Output tracking control of linear systems with input delays and disturbances. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2026, vol. 26, no. 1, pp. 51–59 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-1-51-59

Введение

В последние годы управление системами с запаздыванием во входном сигнале стало важным направлением исследований в области автоматического управления. Наличие запаздывания во входном сигнале может снизить качество работы системы, привести к потере устойчивости и возникновению перерегулирования. Задача регулирования в условиях запаздывания усложняется при наличии возмущений и невозможности полного измерения состояния системы. На практике такую задачу можно встретить при управлении промышленными роботами, системами передачи энергии, сетями связи и мехатронными системами и т. д.

На данный момент существуют два основных подхода к управлению в условиях запаздывания: методы управления с обратной связью без использования предикторов и на основе предикторов.

Методы управления с обратной связью без предикторов обычно основаны на оптимизации параметров управления для достижения высокой робастности к влиянию небольшого запаздывания. Данные методы обычно основаны на прямом адаптивном методе, обеспечивающем высокую робастность к запаздыванию [1, 2]. Внешнее возмущение при этом представляется выходом автономной динамической системы, структура которой включается в алгоритм управления. Параметры закона управления настраиваются для достижения требуемых характеристик замкнутой системы без явной идентификации параметров возмущения. Основным ограничением метода является необходимость задания модели генератора возмущений и заранее известного числа гармоник сигнала.

В отличие от методов без предикторов, методы управления на основе предикторов направлены на разработку активной структуры управления для компенсации влияния существенного по величине запаздывания. В работах [3, 4] предложен первый метод управления с использованием предиктора, направленный на решение проблемы входного запаздывания в устойчивых линей-

ных системах без возмущений. Однако предиктор [3, 4] эффективен только для асимптотически устойчивых систем и требует точной модели объекта.

Для неустойчивых систем с запаздыванием [5] разработан метод управления со статической обратной связью, сочетающий пропорционально-интегральный предиктор. В работах [6, 7] данный метод применен для снижения возмущения путем корректировки распределения собственных значений замкнутой системы. Отметим, что согласно [8–12], такой подход на практике обеспечивает устойчивость для определенного класса систем с запаздыванием, а также не гарантирует полного подавления возмущения.

В работе [13] предложена модификация предиктора [3, 4] для неустойчивых систем. Основная идея заключается во введении корректирующего сигнала и периодического сброса вспомогательной переменной, что позволяет стабилизировать систему без использования сложных интегральных вычислений. Данный подход упрощает структуру регулятора и обеспечивает строго доказанную экспоненциальную устойчивость, что делает его практичным и перспективным для систем с большим входным запаздыванием.

В [14] представлен замкнутый предиктор состояния, включающий наблюдатель ошибки предсказания и механизм периодического сброса состояний. Такой подход обеспечивает строгую робастность по отношению к малым параметрическим возмущениям и демонстрирует высокую устойчивость к ошибкам численного интегрирования.

В [15] предложен метод управления, сочетающий предиктор и расширенный наблюдатель состояния для неустойчивых систем с запаздыванием, без использования предиктора [5]. Данный метод оценивает будущее состояние с помощью асимптотического предиктора, а возмущение — с помощью расширенного наблюдателя, где возмущения моделируются в виде ряда Тейлора. Однако использование наблюдателя для предиктора возмущений увеличивает сложность и чувствительность к его численной реализации, что ограничивает практическую применимость.

В отличие от [15], в [16] рассмотрена схема компенсации возмущений с ограниченными производными, основанная на [5]. Метод [16] использует теорему Лагранжа о среднем для предиктора возмущения вместо разложения в ряд Тейлора, как в [15], что устраняет необходимость оценивания производных. Однако интегральная составляющая в предикторе [3] увеличивает вычислительную сложность, ограничивая практическое применение.

В работе [17] предложен новый предиктор для неустойчивых систем, не содержащий интегральной составляющей, что упрощает его реализацию по сравнению с [16]. Недостатком данного подхода является высокая чувствительность к возмущениям. В [18] разработан метод, использующий предиктор для прогноза состояния и неизвестных возмущений. Однако метод [18], а также методы [13–17] применимы только к линейным системам с измеряемым состоянием, что ограничивает их практическое применение в случаях, когда доступен лишь выходной сигнал.

В настоящей работе предлагается развитие метода [18] для линейных объектов по выходному сигналу, что расширяет возможности применения во многих практических системах с ненаблюдаемым состоянием.

Математические предварительные результаты

Наблюдатель производных измеряемых сигналов. Рассмотрим сигнал $\varphi(t)$, ограниченный вместе со своими $v + 1$ производными, где $v \geq 1$ — целое число. Необходимо получить оценки производных сигнала вплоть до порядка v на основе измерений самого сигнала. Для решения данной задачи используется наблюдатель, известный как наблюдатель с высоким коэффициентом усиления [19, 20]. Его математическая модель описывается следующими уравнениями:

$$\dot{\hat{z}}(t) = \mathbf{G}_0 \mathbf{z}(t) + \mathbf{I}_0(\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)), \quad \hat{\varphi}(t) = \mathbf{L}_1 \mathbf{z}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_v \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(v+1) \times (v+1)}$; $\mathbf{I}_0 = \text{col} \left\{ \frac{l_1}{\mu}, \dots, \frac{l_{v+1}}{\mu^{v+1}} \right\}$; $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{v+1}$, $\mathbf{L}_1^T = \text{col} \{1, 0, \dots, 0\}$; $\text{col} \{ \cdot \}$ — вектор-столбец. Коэффициенты l_1, \dots, l_{v+1} выбираются так, чтобы многочлен $L(s) = s^{v+1} + l_1 s^v + \dots + l_v s + l_{v+1}$ был гурвицевым; s — комплексная переменная; $\mu > 0$ — достаточно малое число. Можно показать, что при $\mu \rightarrow 0$ наблюдатель (1) функционирует как дифференциатор [20].

Лемма 1. Обозначим через $\varphi_0(t) \triangleq \text{col} \{ \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(v)}(t) \}$ вектор, состоящий из сигнала $\varphi(t)$ и его производных до порядка v включительно. Для любого $\delta > 0$ существуют такие константы $T_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, что при $\mu < \mu_0$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{z}(t) - \varphi_0(t)\| < \delta, \quad \forall t > T_0, \quad (2)$$

где $\mathbf{z}(t)$ — вектор состояния наблюдателя (1).

Доказательство леммы 1 приведено в работе [19].

Условия устойчивости линейных систем с запаздыванием. Рассмотрим линейную систему с запаздыванием в управляющем сигнале

$$\begin{aligned} Q(p)\chi(t) + M(p)\chi(t-h) &= 0, \\ \chi(\kappa) &= \rho(\kappa) = 0, \quad \forall \kappa \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (3)$$

где $t \geq 0$; $\chi(t) \in \mathbb{R}$ — скалярная переменная; $h > 0$ — постоянное время запаздывания; $\rho(\kappa)$ — функция начального условия, определенная на интервале $[-h, 0]$; $p \triangleq \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования; $Q(p)$, $M(p)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, $\deg(Q) > \deg(M)$.

Из-за наличия запаздывания характеристическое уравнение $D_h(s) := Q(s) + R(s)e^{-sh} = 0$ имеет бесконечное число корней. В результате классические методы анализа устойчивости линейных систем, такие как алгебраические критерии Рауса или Гурвица, становятся неприменимыми. Для оценки устойчивости системы (3) обычно используется частотный критерий устойчивости Михайлова [21]. В частности, данный критерий основан на анализе характеристического уравнения при подстановке $s = j\omega$.

Лемма 2. Система является устойчивой, если запаздывание h меньше минимального критического значения h_{cr} , которое вычисляется по формуле

$$h_{cr} = \frac{\pi + \varphi(\omega_{cr})}{\omega_{cr}}, \quad (4)$$

где $\varphi(\omega)$ — фаза частотной характеристики передаточной функции $W(j\omega) := \frac{M(j\omega)}{Q(j\omega)}$; ω_{cr} — критическая частота, при которой модуль удовлетворяет условию $|W(j\omega)| = 1$, т. е.

$$|W(j\omega_{cr})| = 1. \quad (5)$$

Доказательство леммы 2 приведено в работе [21].

Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему с запаздыванием в управляющем сигнале

$$\begin{aligned} Q(p)y(t) &= R(p)[u(t-h) + f(t)], \\ t \geq 0, \quad u(\kappa) &= 0, \quad \kappa < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ — выходной сигнал; $u(t) \in \mathbb{R}$ — управляющий сигнал; $f(t) \in \mathbb{R}$ — внешнее неизвестное ограниченное возмущение. Многочлены $Q(p)$, $R(p)$ имеют степени n , $m < n$ соответственно. Полином $Q(s)$ может не быть гурвицевым, в то время как $R(s)$ является гурвицевым.

Рассмотрим задачу слежения за неизвестным ограниченным командным сигналом $y_m(t)$. Обозначим ошибку слежения как $e := y - y_m$. С учетом уравнения (6) можно записать следующую модель ошибки:

$$Q(p)e(t) = R(p)[u(t-h) + \varphi(t)], \quad (7)$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $R(p)\varphi(t) = R(p)f(t) - Q(p)y_m(t)$.

Рассмотрим следующее предложение.

Предложение 1. Возмущение $f(t)$ и командный сигнал $y_m(t)$ являются неизвестными функциями, но имеют ограниченные производные до порядка $(r + 1)$ включительно, где r — параметр, используемый при разработке закона управления, и $r + 1 \geq v := n - m$. Производные сигналов $f(t)$ и $y_m(t)$ недоступны для измерения. Кроме того, возмущение $f(t)$ и сигнал $y_m(t)$ удовлетворяют условиям $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f^{(r+1)}(t)| < \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f(t)|$ и $|\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} y_m(t)| > \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_m^{(r+1)}(t)|$, где $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f(t)| \triangleq \limsup_{t \rightarrow \infty} |f(s)|$; $f^{(r)}(t)$ — r -я производная сигнала $f(t)$.

Цель предложения 1 заключается в синтезе закона управления, обеспечивающего выполнение следующего условия:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e(t)| \leq \delta, \quad (8)$$

где $\delta = O(h^{r+1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi^{(r+1)}(t)|)$, $O(h)$ означает, что $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} = \text{const}$.

Замечание 1. Ограниченность производных функции $f(t)$ и командного сигнала $y_m(t)$, указанная в предложении 1, необходима для построения предиктора возмущений, предложенного в работе [18].

Основные результаты

Предлагается закон управления:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad (9)$$

включающий сигнал $u_1(t)$, предназначенный для обеспечения устойчивости модели ошибки (7) в случае $f(t) \equiv 0$, и сигнал $u_2(t)$, предназначенный для компенсации возмущений.

Синтез алгоритма управления на базе предиктора. Введем следующий предиктор выходного сигнала:

$$Q(p)\bar{e}(t) = R(p)u_1(t) + M(p)(e(t) - \bar{e}(t - h)), \quad (10)$$

где $\bar{e}(t) \in \mathbb{R}$; $M(p)$ — многочлен, имеющий степень $\gamma < n$. Полином $M(s)$ выбирается так, что квазиполином $M_h(s) := Q(s) + M(s)e^{-hs}$ был гурвицев. Учитывая системы (7) и (10), запишем следующую динамическую модель ошибки предиктора:

$$Q(p)\varepsilon(t) + M(p)\varepsilon(t - h) = R(p)[u_2(t - h) + \varphi(t)], \quad (11)$$

где $\varepsilon(t) := e(t) - \bar{e}(t - h)$ — ошибка прогноза.

Из уравнения (11) видно, почему полином $M(s)$ должен быть выбран так, чтобы $M_h(s)$ был гурвицевым. Однако возникает вопрос о том, как выбрать $M(s)$, чтобы $M_h(s)$ являлся гурвицевым. Случайный выбор коэффициентов недопустим, поскольку такой подход может оказаться слишком трудоемким при большой размерности системы. Альтернативным решением является рассмотрение обратной задачи по отношению к исследованию устойчивости по критерию Михайлова, которое представлено в лемме 2, следуя которой для нахождения $M(s)$ выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Выбрать произвольные значения $h_{cr} = h_{cr}^* > h$ и $\omega_{cr} = \omega_{cr}^* > 0$ (например, $\omega_{cr}^* \in [\omega_1, \omega_2]$ из заданного заранее интервала).

Шаг 2. Предположим, что $M(s)$ может быть представлено в виде произведения

$$M(s) = (s + k_1) \dots (s + k_\gamma),$$

или, в случае $\gamma = 1$, $M(s) = k_0(s + k_1)$. Вычислим значения $|W(j\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ при $\omega = \omega_{cr}^*$. Тогда из условий (4) и (5) получим следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} h_{cr}(k_1, \dots, k_\gamma) = h_{cr}^*, \\ (h_{cr}(k_0, k_1) = h_{cr}^* \text{ при } \gamma = 1), \\ |W(j\omega_{cr}^*)|(k_1, \dots, k_\gamma) = 1, \\ (|W(j\omega_{cr}^*)|(k_0, k_1) = 1 \text{ при } \gamma = 1). \end{cases} \quad (12)$$

Шаг 3. Решить систему уравнений (12) для нахождения k_1, \dots, k_γ (для $\gamma = 1$ — коэффициентов k_0, k_1).

Шаг 4. Проверить устойчивость системы (1) при $h = 0$. Если система устойчива, то найденное значение $M(s)$ принимается. В противном случае выбрать другое значение ω_{cr}^* и процедуру повторить, начиная с шага 2.

Замечание 2. Процедура нахождения $M(s)$ применима только при $\gamma \geq 1$. Если $\gamma = 1$, то для системы уравнения (12) существуют два различных корня k_0, k_1 . Если $\gamma \geq 2$, то (12) имеет бесконечное число решений; выбирая произвольные $\gamma - 2$ корня из множества $\{k_1, \dots, k_\gamma\}$ можно решить (12), чтобы найти два оставшихся корня. В случае скалярной системы, когда $\deg(Q) = 1$, пусть $Q(s) = s + \alpha$, α — известная константа. Тогда $M(s)$ становится константой, т. е. $M(s) = k$, $k \in \mathbb{R}$. В этом случае условия (4) и (5) из леммы 2 могут быть переписаны в виде:

$$h_{cr} = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{\omega_{cr}}{\alpha}\right) - \arg(k)}{\omega_{cr}}, \quad (13)$$

$$\alpha^2 + \omega_{cr}^2 = k^2,$$

где $\arg(k) = \begin{cases} 0, & k > 0, \\ \pi, & k < 0. \end{cases}$

Таким образом, для нахождения k достаточно решить систему уравнений (13) с двумя неизвестными относительно ω_{cr} и k при условии, что $h_{cr} = h$ и α известно.

Замечание 3. На шаге 4 необходимо проверить условие устойчивости системы (3) при $h = 0$. Поскольку при $h = 0$ $M_h(s)$ перестает быть квазиполиномом, то в этом случае устойчивость проверяется с помощью классического критерия Гурвица, а не по лемме 2.

Введем новую переменную $y_1 := e - \varepsilon$. Учитывая уравнение (11) и применяя оператор $Q(p)$ к функции $y_1(t)$, получим

$$\begin{aligned} Q(p)y_1(t) &= Q(p)e(t) - Q(p)\varepsilon(t) = \\ &= R(p)u_1(t - h) + M(p)\varepsilon(t - h). \end{aligned} \quad (14)$$

Выберем закон управления u_1 в следующем виде:

$$u_1(t) = -K(p)\bar{\varepsilon}(t), \quad (15)$$

где $K(s)$ — многочлен степени $\deg(K) = k$.

Учитывая, что $\bar{\varepsilon}(t-h) = y_1(t)$, и подставляя u_1 в уравнение (14), получим

$$[Q(p) + R(p)K(p)]y_1(t) = M(p)\varepsilon(t-h). \quad (16)$$

Из (16) следует, что многочлен $K(s)$ должен быть выбран так, чтобы полином $G(s) := Q(s) + R(s)K(s)$ был гурвицевым. Для выделения сигнала, содержащего информацию о возмущении $\varphi(t)$, введем следующий вспомогательный контур:

$$Q(p)\varepsilon_v(t) + M(p)\varepsilon_v(t-h) = R(p)u_2(t-h), \quad (17)$$

где $\varepsilon_v(t) \in \mathbb{R}$ — скалярный выход вспомогательного контура.

Обозначим $\xi := \varepsilon - \varepsilon_v$. Применяя оператор $Q(p)$ к функции $\xi(t)$ в соответствии с (11) и (17), получим

$$\begin{aligned} Q(p)\xi(t) &= Q(p)\varepsilon(t) - Q(p)\varepsilon_v(t) = \\ &= -M(p)\xi(t-h) + R(p)\varphi(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку $M_h(s)$ является гурвицевым, а функция $\varphi(t)$ — ограниченной, то следует, что и $\xi(t)$ также ограничена. В результате, из уравнения (18) возмущение $\varphi(t)$ может быть выделено как

$$\varphi(t) = \frac{Q(p)}{R(p)}\xi(t) + \frac{M(p)}{R(p)}\xi(t-h). \quad (19)$$

Поскольку $\deg(Q) > \deg(R)$ и $\deg(M) \geq \deg(R)$, то уравнение (19) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left[Q_v(p) + \frac{\Delta Q(p)}{R(p)} \right] \xi(t) + \\ &+ \left[M_{\gamma-m}(p) + \frac{\Delta M(p)}{R(p)} \right] \xi(t-h), \end{aligned} \quad (20)$$

где $Q(s) = Q_v(s)R(s) + \Delta Q(s)$, $\deg(\Delta Q) = m-1$; $M(s) = M_{\gamma-m}(s)R(s) + \Delta M(s)$, $\deg(\Delta M) = m-1$.

Для оценки возмущения $\varphi(t)$ предлагается использовать оценку:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t) &= \mathbf{q}_{\gamma+1}^\top \mathbf{z}(t) + \frac{\Delta Q(p)}{R(p)} \xi(t) + \\ &+ \mathbf{m}_{\gamma-m+1}^\top \mathbf{E} \mathbf{z}(t-h) + \frac{\Delta M(p)}{R(p)} \xi(t-h), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\mathbf{q}_{\gamma+1} \in \mathbb{R}^{\gamma+1}$ и $\mathbf{m}_{\gamma-m+1} \in \mathbb{R}^{\gamma-m+1}$ — векторы, компоненты которых представляют собой коэффициенты операторов $Q_\gamma(p)$ и $M_{\gamma-m}(p)$, расположенные в обратном порядке соответственно; матрица $\mathbf{E} := [\mathbf{I}_{\gamma-m+1} \quad \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{(\gamma-m+1) \times (\gamma+1)}$, получен с использованием наблюдателя с высоким коэффициентом усиления (1):

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{G}_0 \mathbf{z}(t) + \mathbf{I}_0 (\xi(t) - \hat{\xi}(t)), \quad \hat{\xi}(t) = \mathbf{L}_1 \mathbf{z}(t), \quad (22)$$

где $\mathbf{z}(t)$ — оценка вектора $\mathbf{z}_0 = \text{col}\{\xi(t), \xi^{(1)}(t), \dots, \xi^{(\nu)}(t)\}$.

Обозначим ошибку оценки возмущения как $\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$. Из (20) и (21), имеем

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= \mathbf{q}_{\gamma+1}^\top [\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_0(t)] + \\ &+ \mathbf{m}_{\gamma-m+1}^\top \mathbf{E} [\mathbf{z}(t-h) - \mathbf{z}_0(t-h)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно (2) (см. лемму 1), величина $\Delta\varphi(t)$ является ограниченной. Далее предлагается схема построения предиктора возмущений для формирования управляющего сигнала $u_2(t)$ с использованием оценки $\hat{\varphi}(t)$, полученной из уравнения (21). Для прогноза возмущения $\hat{\varphi}(t+h)$ применяется алгоритм прогноза, описанный в работе [18] и представленный в виде:

$$\hat{\varphi}(t+h) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{\varphi}(t-h(j-1)) + R(t), \quad (24)$$

где $R(t) = h^{r+1} \hat{\varphi}^{(r+1)}(t - [(r+1)\theta - 1]h)$ — остаточный член разложения, $\theta \in (0, 1)$.

Поскольку $R(t)$ недоступен для измерения, то из (24) управляющий сигнал $u_2(t)$ можно выбрать:

$$u_2(t) = -\tilde{\varphi}(t+h), \quad (25)$$

где $\tilde{\varphi}(t+h) := \hat{\varphi}(t+h) - R(t)$ — так называемый предиктор возмущений, который определяется следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(t+h) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{\varphi}(t-h(j-1)). \quad (26)$$

Обозначим $\lambda(t) := u_2(t-h) + \varphi(t)$ как ошибку компенсации возмущения. Подставляя в (11), получим:

$$Q(p)e(t) + M(p)e(t-h) = R(p)\lambda(t). \quad (27)$$

Замечание 4. Если $Q(s)$ не является гурвицевым, то предиктор (10) и вспомогательный контур (17) могут быть записаны в виде:

$$\Gamma(p)\bar{\varepsilon}(t) = [\Gamma(p) - Q(p)]\bar{\varepsilon}(t) + R(p)u_1(t) + M(p)\varepsilon(t), \quad (28)$$

$$\Gamma(p)\varepsilon_v(t) = [\Gamma(p) - Q(p)]\varepsilon_v(t) + R(p)u_1(t), \quad (29)$$

где $\Gamma(s)$ — произвольно выбранный гурвицев полином степени n .

В результате предлагаемый алгоритм состоит из предиктора выходного сигнала (10), вспомогательного контура (17), предиктора возмущений (26), а также управляющих сигналов, определенных в (15) и (25). Замкнутая система описывается уравнениями (16) и (27).

Анализ устойчивости замкнутой системы. Выполним анализ устойчивости замкнутой системы для ограниченного входа-выхода [22].

Покажем, что ошибка $\lambda(t)$ является ограниченной. Перепишем $\lambda(t)$ в виде:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \hat{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t) + \varphi(t) - \hat{\varphi}(t) = \\ &= R(t-h) + \Delta\varphi(t) = \\ &= h^{r+1} [\varphi^{(r+1)}(t - (r+1)\theta h) - \Delta\varphi^{(r+1)}(t - (r+1)\theta h)] + \Delta\varphi(t). \end{aligned} \quad (30)$$

В силу предложения 1 и уравнения (23), функции $\varphi^{(r+1)}(t)$ и $\Delta\varphi(t)$ являются ограниченными. Для уста-

новления ограниченности величины $\lambda(t)$ достаточно показать, что $\Delta\varphi^{(r+1)}(t)$ также ограничена. Введем новую переменную $\boldsymbol{\vartheta}(t) := \mathbf{z}^{(r+1)}(t)$. Продифференцировав обе части первого уравнения из (22) и уравнения (18) по времени $(r+1)$ раз, получим

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(t) &= (\mathbf{G}_0 - \mathbf{I}_0 \mathbf{L}_1) \boldsymbol{\vartheta}(t) + \mathbf{I}_0 \xi^{(r+1)}(t), \\ Q(p)\eta(t) &= -M(p)\eta(t-h) + R(p)\varphi^{(r+1)}(t), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\eta(t) = p^{r+1}\xi(t) = \xi^{(r+1)}(t)$.

Поскольку $\varphi^{(r+1)}(t)$ является ограниченной функцией, а матрица $(\mathbf{G}_0 - \mathbf{I}_0 \mathbf{L}_1)$ — гурвицева, то из (31) следует, что функция $\boldsymbol{\vartheta}(t) = \mathbf{z}^{(r+1)}(t)$ также ограничена.

Согласно (21), сигнал $\Delta\varphi^{(r+1)}(t)$ может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^{(r+1)}(t) &= \varphi^{(r+1)}(t) - \hat{\varphi}^{(r+1)}(t) = \\ &= \varphi^{(r+1)}(t) - \mathbf{q}_{v+1}^\top \mathbf{z}^{(r+1)}(t) + \frac{\Delta Q(p)}{R(p)} \eta(t) + \\ &+ \mathbf{m}_{\gamma-m+1}^\top \mathbf{E} \mathbf{z}^{(r+1)}(t-h) + \frac{\Delta M(p)}{R(p)} \eta(t-h). \end{aligned} \quad (32)$$

Так как функции $\varphi^{(r+1)}(t)$, $\mathbf{z}^{(r+1)}(t)$ и $\eta(t)$ являются ограниченными, то $\Delta\varphi^{(r+1)}(t)$ также ограничена. Следовательно, ошибка компенсации возмущения $\lambda(t)$ является ограниченной функцией.

Теорема 1. Пусть выполняется предложение 1. Закон управления (9), включающий управляющие сигналы (15) и (25), построенные на основе предикторов (10) и (26), обеспечивает ограниченность всех сигналов в замкнутой системе (16), (27), и гарантирует достижение цели (8) с точностью

$$\delta = O\left(h^{r+1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi^{(r+1)}(t)|\right)$$

при достаточно малом значении параметра μ .

Доказательство. Поскольку сигнал $\lambda(t)$ является ограниченным, а $M_h(s)$ и $G(s)$ — гурвицевы, системы (16) и (27) устойчивы для ограниченного входа-выхода. Следовательно, все сигналы в замкнутой системе являются ограниченными. Обозначим $\Delta(\mu) := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\lambda(t)|$. Согласно (30) и (32), имеем

$$\delta = O\left(\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Delta(\mu)\right) = O\left(h^{r+1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi^{(r+1)}(t)|\right) \quad (33)$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 5. Из (33) и согласно предложению 1 следует, что величину δ можно уменьшить за счет уменьшения параметра μ и увеличения параметра r .

Моделирование

Пример 1. Рассмотрим устойчивую систему (1) со следующими операторами:

$$Q(p) = p^2 + 4,636p + 2,323, R(p) = 0,095.$$

Такая модель может быть получена из передаточной функции, связывающей входное напряжение с угловой скоростью ротора вибрационного стенда [23].

Пусть время запаздывания в канале управления $h = 0,5$ с. Внешнее возмущение $f(t)$ и командный сигнал y_m заданы соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + \sin(0,2t) + \cos(0,1t) + \sin\left(0,5t + \frac{\pi}{4}\right), \\ y_m &= 10 \sin(0,2t) \end{aligned}$$

Для заданной системы $M(p)$ найден в виде:

$$M(p) = -1,03(p - 4,65).$$

Рассматриваемая система имеет относительный порядок $\gamma = 2$. Для оценки возмущения (21) найдем $\mathbf{q}_{v+1} = \text{col}\{24,4526; 48,8; 10,5263\}$, $\mathbf{m}_{\gamma-m+1} = \text{col}\{-13,9263; 2,3997\}$, $\Delta Q(p) = 0$, $\Delta M(p) = 0$. Коэффициенты наблюдателя производных (22) выбираются как $l_1 = 0,3$, $l_2 = 0,03$, $l_3 = 0,001$, $\mu = 0,001$ (или $\mu = 0,1$ для сравнения). Зададим $K(p) = -10$.

Результаты моделирования в среде MATLAB/Simulink приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показаны графики внешнего возмущения $f(t)$ и командного сигнала $y(t)$. На рис. 2 представлена ошибка слежения $e(t)$ при различных значениях параметров μ и r .

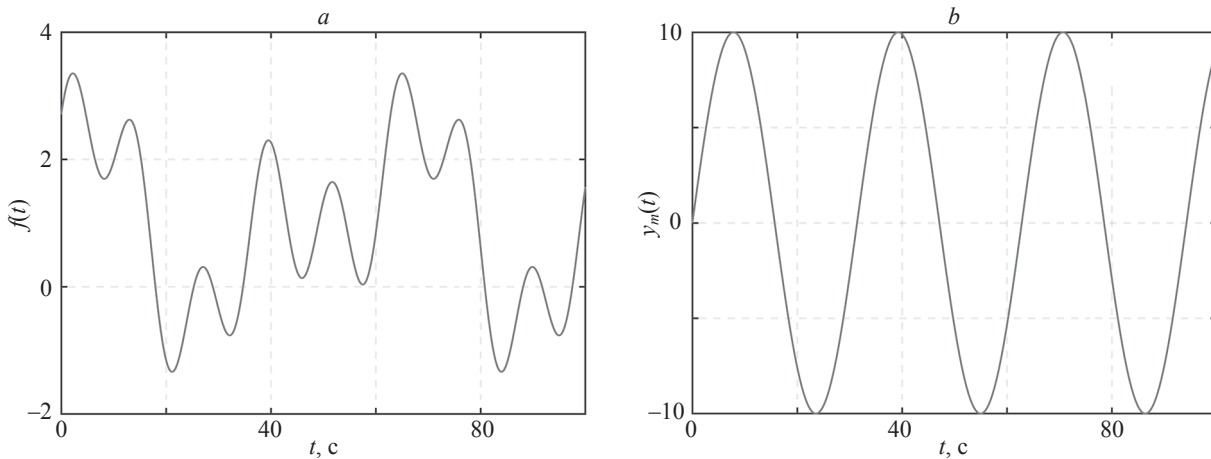


Рис. 1. Графики возмущения $f(t)$ (a) и командного сигнала $y_m(t)$ (b)

Fig. 1. Plots of: the disturbance $f(t)$ (a); the reference signal $y_m(t)$ (b)

Из рис. 2 можно сделать следующие замечания и выводы:

- ошибка слежения $e(t)$ предельно ограничена некоторой величиной δ ;
- выбор меньшего значения μ приводит к улучшению качества управления по сравнению с большими значениями μ (рис. 2, а). Это объясняется тем, что при достаточно малом μ наблюдатель производных (22) функционирует почти как идеальный дифференциатор, обеспечивая более точную оценку производных;
- помимо уменьшения значения μ , увеличение параметра r также приводит к уменьшению величины δ (рис. 2, б).

Пример 2. Рассмотрим неустойчивую систему (1) со следующими операторами:

$$Q(p) = p^3 + 3p^2 + 2p - 1, R(p) = p + 1.$$

Время запаздывания h , возмущение $f(t)$ и командный сигнал $y_m(t)$ заданы как в примере 1. Для заданной системы $M(p)$ найден в виде:

$$M(p) = (p + 0,711)(p + 3,208).$$

Рассматриваемая система имеет относительный порядок $\gamma = 2$. Для оценки возмущения (21) найдем $\mathbf{q}_{v+1} = \text{col}\{0; 2; 1\}$; $\mathbf{m}_{\gamma-m+1} = \text{col}\{2,919; 1\}$; $\Delta Q(p) = -1$, $\Delta M(p) = -0,6381$. Коэффициенты наблюдателя производных (22) выбираются как $l_1 = 0,3$, $l_2 = 0,03$, $l_3 = 0,001$, $\mu = 0,001$. Зададим $K(p) = -10$.

На рис. 3, а представлена ошибка слежения $e(t)$ при реализации предиктора (10) и вспомогательного контура (17). Из графика видно, что после $t \approx 70$ с система теряет устойчивость, хотя на начальном этапе регулируемая переменная уже сходится к требуемой окрестности нуля. На рис. 3, б показана ошибка слежения $e(t)$ при реализации предиктора (28) и вспомогательного контура (29). В данном случае моделирование предиктора и вспомогательного контура позволяет избежать ошибок численной реализации, наблюдаемых на рис. 3, а. Возможно, алгоритм управления по уравнениям (10) и (17) недостаточно робастен для неустойчивых систем из-за накопления ошибки моделирования. Эта гипотеза

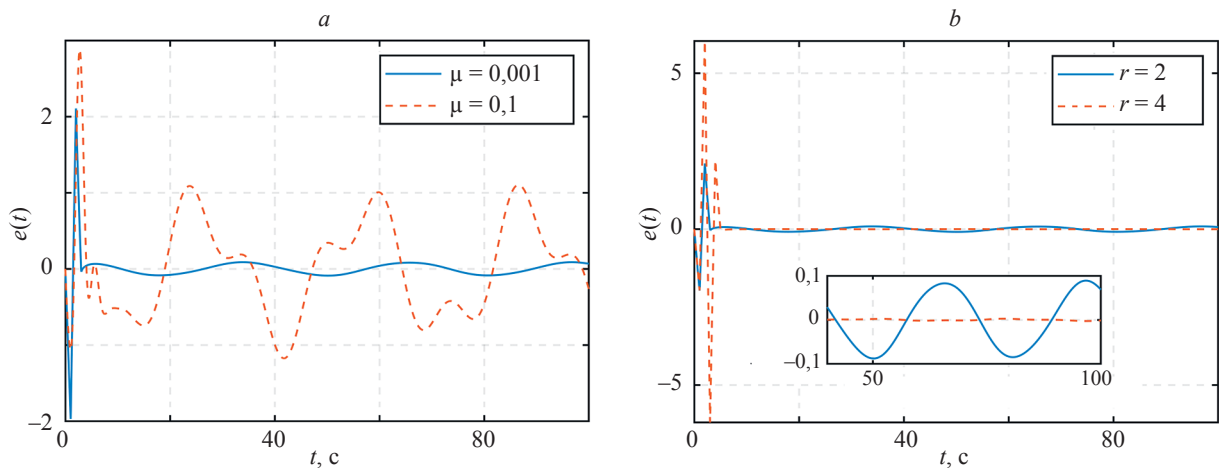


Рис. 2. Ошибки слежения $e(t)$ при различных значениях параметров μ (а) и r (б)
 Fig. 2. Tracking error $e(t)$ for different values of parameter: μ (а); and r (б)

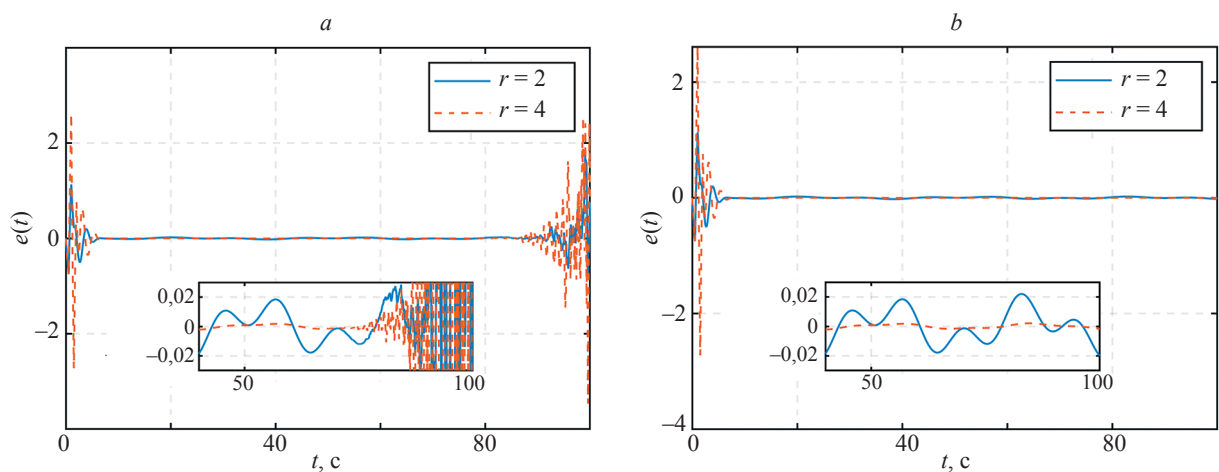


Рис. 3. Ошибки слежения при реализациях предиктора и вспомогательного контура по уравнениям (10) и (17) (а) и по (28) и (29) (б)

Fig. 3. Tracking error when implementing the predictor and auxiliary loop in forms: (10) and (17) (а); (28) and (29) (б)

также рассматривается в работе [14] при реализации алгоритма управления для неустойчивых систем.

Заключение

Предложен алгоритм управления по выходу для синтеза следящей системы по неизвестному командному сигналу при наличии запаздывания и внешнего неизвестного возмущения в канале управления. Алгоритм основан на использовании предикторов выхода системы и возмущения. Эффективность разрабо-

танного подхода подтверждена результатами компьютерного моделирования в среде MATLAB/Simulink. Показано, что ошибка слежения может быть уменьшена за счет увеличения параметра r и выбора меньшего значения μ .

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку метода проектирования регулятора на основе суб-предиктора, что позволит компенсировать большие значения запаздывания и осуществлять предсказание возмущений на меньших шагах времени, аналогично подходам, рассмотренным в работе [17].

Литература

1. Gerasimov D.N., Paramonov A.V., Nikiforov V.O. Algorithms of fast adaptive compensation of disturbance in linear systems with arbitrary input delay // *IFAC-PapersOnLine*. 2017. V. 50. N 1. P. 12892–12897. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1942>
2. Nikiforov V.O., Paramonov A.V., Gerasimov D.N. Adaptive compensation of unmatched disturbances in unstable MIMO LTI plants with distinct input delays // *IFAC-PapersOnLine*. 2023. V. 56. N 2. P. 9179–9184. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.159>
3. Smith O.J. A controller to overcome dead time // *ISA Journal*. 1959. V. 6. P. 28–33.
4. Smith O.J. Closer control of loops with dead time // *Chemical Engineering Progress*. 1957. V. 53. N 5. P. 217–219.
5. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1979. V. 24. N 4. P. 541–552. <https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124>
6. Krstic M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser, 2009. 480 p.
7. Mazenc F., Niculescu S.-I., Krstic M. Lyapunov–Krasovskii functionals and application to input delay compensation for linear time-invariant systems // *Automatica*. 2012. V. 48. N 7. P. 1317–1323. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.04.002>
8. Mondie S., Michiels W. Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems With a Safe Implementation // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2003. V. 48. N 12. P. 2207–2212. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147>
9. Van Assche V., Dambrine M., Lafay J.F., Richard J.-P. Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws // *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304)*. 1999. P. 4668–4672. <https://doi.org/10.1109/cdc.1999.833279>
10. Engelborghs K., Dambrine M., Rose D. Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2001. V. 46. N 2. P. 336–339. <https://doi.org/10.1109/9.905705>
11. Mondie S., Dambrine M., Santos O. Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability // *Kybernetika*. 2002. V. 38. N 5. P. 541–551.
12. Molnar T.G., Hajdu D., Insperger T. The Smith predictor, the modified Smith predictor, and the finite spectrum assignment: A comparative study // *Stability, Control and Application of Time-delay Systems*. 2019. P. 209–226. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-814928-7.00010-x>
13. Пыркин А.А., Калинин К.Ю. Модифицированный предиктор Смита для неустойчивых линейных систем // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2025. Т. 68. № 9. С. 753–761. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2025-68-9-753-761>
14. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. Robust closed-loop state predictor for unstable systems with input delay // *Proc. of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2023. P. 5708–5713. <https://doi.org/10.1109/cdc49753.2023.10383221>
15. Sanz R., Garcia P., Albertos P. Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of LTI systems with input delay // *Automatica*. 2016. V. 72. P. 205–208. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.05.019>
16. Furtat I., Fridman E., Fradkov A. Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay // *IEEE*

References

1. Gerasimov D.N., Paramonov A.V., Nikiforov V.O. Algorithms of fast adaptive compensation of disturbance in linear systems with arbitrary input delay. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 12892–12897. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1942>
2. Nikiforov V.O., Paramonov A.V., Gerasimov D.N. Adaptive compensation of unmatched disturbances in unstable MIMO LTI plants with distinct input delays. *IFAC-PapersOnLine*, 2023, vol. 56, no. 2, pp. 9179–9184. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.159>
3. Smith O.J. A controller to overcome dead time. *ISA Journal*, 1959, vol. 6, pp. 28–33.
4. Smith O.J. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, 1957, vol. 53, no. 5, pp. 217–219.
5. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, no. 4, pp. 541–552. <https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124>
6. Krstic M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser, 2009, 480 p.
7. Mazenc F., Niculescu S.-I., Krstic M. Lyapunov–Krasovskii functionals and application to input delay compensation for linear time-invariant systems. *Automatica*, 2012, vol. 48, no. 7, pp. 1317–1323. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.04.002>
8. Mondie S., Michiels W. Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems With a Safe Implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 12, pp. 2207–2212. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147>
9. Van Assche V., Dambrine M., Lafay J.F., Richard J.-P. Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws. *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304)*, 1999, pp. 4668–4672. <https://doi.org/10.1109/cdc.1999.833279>
10. Engelborghs K., Dambrine M., Rose D. Limitations of a class of stabilization methods for delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, vol. 46, no. 2, pp. 336–339. <https://doi.org/10.1109/9.905705>
11. Mondie S., Dambrine M., Santos O. Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability. *Kybernetika*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 541–551.
12. Molnar T.G., Hajdu D., Insperger T. The Smith predictor, the modified Smith predictor, and the finite spectrum assignment: A comparative study. *Stability, Control and Application of Time-delay Systems*, 2019, pp. 209–226. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-814928-7.00010-x>
13. Pyrkin A.A., Kalinin K.Yu. Modified Smith Predictor for Unstable Linear Systems. *Journal of Instrument Engineering*. 2025, vol. 68, no. 9, pp. 753–761. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2025-68-9-753-761>
14. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. Robust closed-loop state predictor for unstable systems with input delay. *Proc. of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2023, pp. 5708–5713. <https://doi.org/10.1109/cdc49753.2023.10383221>
15. Sanz R., Garcia P., Albertos P. Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of LTI systems with input delay. *Automatica*, 2016, vol. 72, pp. 205–208. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.05.019>
16. Furtat I., Fridman E., Fradkov A. Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay. *IEEE*

- Transactions on Automatic Control. 2018. V. 63. N 1. P. 298–305. <https://doi.org/10.1109/tac.2017.2732279>
17. Dugard L., Verriet E. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Springer, 1998. 321 p.
 18. Furtat I., Gushchin P. Tracking control algorithms for plants with input time-delays based on state and disturbance predictors and sub-predictors // *Journal of the Franklin Institute*. 2019. V. 356. N 8. P. 4496–4512. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.03.013>
 19. Цыкунов А.М. *Робастное управление с компенсацией возмущений*. М.: Физматлит, 2012. 300 с.
 20. Vasiljevic L.K., Khalil H.K. Differentiation with high-gain observers the presence of measurement noise // *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. 2006. P. 4717–4722. <https://doi.org/10.1109/cdc.2006.377230>
 21. Воронов А.А. *Теория автоматического управления: в 2 ч. Ч. 1: Теория линейных систем автоматического управления*. М.: Высшая школа, 1986. 367 с.
 22. Ioannou P.A., Sun J. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, 1996. 825 p.
 23. Andrievsky B., Boikov V. Bidirectional controlled multiple synchronization of unbalanced rotors and its experimental evaluation // *Cybernetics and Physics*. 2021. V. 10. N 2. P. 63–74. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-2-63-74>
- Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 63, no. 1, pp. 298–305. <https://doi.org/10.1109/tac.2017.2732279>
17. Dugard L., Verriet E. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Springer, 1998, 321 p.
 18. Furtat I., Gushchin P. Tracking control algorithms for plants with input time-delays based on state and disturbance predictors and sub-predictors. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, vol. 356, no. 8, pp. 4496–4512. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.03.013>
 19. Tsykunov A.M. *Robust Control with Disturbance Variable Compensation*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 300 p. (in Russian)
 20. Vasiljevic L.K., Khalil H.K. Differentiation with high-gain observers the presence of measurement noise. *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, pp. 4717–4722. <https://doi.org/10.1109/cdc.2006.377230>
 21. Voronov A.A. *Automatic Control Theory. Part I: Theory of the Linear Automatic Control Systems*. Moscow, Vysshaja Shkola Publ., 1986, 367 p. (in Russian)
 22. Ioannou P.A., Sun J. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, 1996, 825 p.
 23. Andrievsky B., Boikov V. Bidirectional controlled multiple synchronization of unbalanced rotors and its experimental evaluation. *Cybernetics and Physics*, 2021, vol. 10, no. 2, pp. 63–74. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-2-63-74>

Авторы

Данг Тхе Донг — стажер-исследователь, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация; аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, <https://orcid.org/0009-0005-4733-7510>, Dangtd93@gmail.com

Нгуен Ба Хю — младший научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>, Leningrat206@gmail.com

Фуртат Игорь Борисович — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация; профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [scid 36349158600](https://orcid.org/0000-0003-4679-5884), <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>, cainenash@mail.ru

Гущин Павел Александрович — доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0003-4788-9137>, guschin.p@mail.ru

Authors

The Dong Dang — Research Intern, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation; PhD Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, <https://orcid.org/0009-0005-4733-7510>, Dangtd93@gmail.com

Ba Huy Nguyen — Junior Researcher, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>, Leningrat206@gmail.com

Igor B. Furtat — D.Sc., Professor, Chief Researcher, Head of Laboratory, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation; Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [scid 36349158600](https://orcid.org/0000-0003-4679-5884), <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>, cainenash@mail.ru

Pavel A. Gushchin — D.Sc., Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0003-4788-9137>, guschin.p@mail.ru

Статья поступила в редакцию 28.09.2025
Одобрена после рецензирования 04.12.2025
Принята к печати 23.01.2026

Received 28.09.2025
Approved after reviewing 04.12.2025
Accepted 23.01.2026



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»