

doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-1-218-221

УДК 519.63

Решение задачи образования антисимметричных форм потери устойчивости высокоупругой CF CF-пластинки

Анна Анатольевна Сосновская✉

Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация

sosnovskayaaa@gumrf.ru✉, <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>

Аннотация

Исследованы антисимметричные (А-А) формы потери устойчивости высокоупругой прямоугольной пластинки, у которой две параллельные грани защемлены, а две другие свободны (CF CF, С — clamped, F — free), под действием сжимающей нагрузки на зажатых гранях. Искомые формы представлены двумя нечетными гиперболическо-тригонометрическими рядами с коэффициентами, которые должны обеспечить точное выполнение всех условий задачи. Предложено решение однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности коэффициентов, содержащей в качестве параметра искомую критическую нагрузку, которая находилась методом «стрельбы» в ходе итерационного процесса. Найдены первые три критические нагрузки для квадратной пластинки и представлены их 3D-изображения. Полученные результаты могут быть использованы в расчетах чувствительных элементов различных датчиков в микроэлектронике, биологии и медицине.

Ключевые слова

CF CF-пластинка, критические нагрузки, антисимметричные формы, гиперболическо-тригонометрические ряды, итерационный метод

Ссылка для цитирования: Сосновская А.А. Решение задачи образования антисимметричных форм потери устойчивости высокоупругой CF CF-пластинки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2026. Т. 26, № 1. С. 218–221. doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-1-218-221

Solution of the formation problem of the antisymmetric forms stability loss for a highly elastic CF CF-plate

Anna A. Sosnovskaya✉

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint Petersburg, 198035, Russian Federation

sosnovskayaaa@gumrf.ru✉, <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>

Abstract

Antisymmetric forms (A-A) of the stability loss of a highly elastic rectangular plate in which two parallel faces are pinched, and the other two are free (CF CF), under the influence of a compressive load on the pinched faces, are investigated. The desired shapes are represented by two odd hyperbolic-trigonometric series with coefficients which should ensure the exact fulfillment of all the conditions of the problem. The problem was reduced to solving a homogeneous infinite system of linear algebraic equations with respect to a single sequence of coefficients containing as a parameter the desired critical load which was found by “firing” during the iterative process. The first three critical loads for a square plate are found and their 3D images are presented. The results obtained can be used in calculations of sensitive elements of various sensors in microelectronics, biology, and medicine.

Keywords

CF CF-plate, critical loads, antisymmetric forms, hyperbolic-trigonometric series, iterative method

For citation: Sosnovskaya A.A. Solution of the formation problem of the antisymmetric forms stability loss for a highly elastic CF CF-plate. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2026, vol. 26, no. 1, pp. 218–221 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-1-218-221.

© Сосновская А.А., 2026

Исследование образования антисимметричных форм (А-А) потери устойчивости высокоупругих прямоугольных CFCF-пластинок (С — clamped, F — free) при критических сжимающих нагрузках на защемленных гранях в настоящее время является важной задачей. Для симметричных (S-S) форм потери устойчивости первые четыре критические значения были изучены в работе [1]. Микро- и нанопластинки данного вида широко используются в микроэлектронике, smart-конструкциях в качестве чувствительных элементов различных датчиков. Пластинки могут находиться под действием в их плоскости переменных внешних электрических или магнитных полей и терять неоднократно (с ростом нагрузки) устойчивость, меняя форму равновесия, не разрушаясь при этом. Изменение формы через актуаторы вызывает соответствующую реакцию управляющего сигнала в следящей системе. По этой причине важно знать некоторый начальный спектр критических нагрузок, который соответствует в общем случае S-S, А-А, S-А и А-S формам закритического равновесия. Имея набор таких форм равновесия, можно решать и обратную задачу: по формам реальной пластинки определять нагрузки, которые вызвали эти формы.

Обычно исследователи находят только первую критическую нагрузку, считая ее разрушающей, поэтому известно не так много работ [2–9], где определены последующие критические нагрузки и формы потери устойчивости.

В [2, 3] получены спектры критических нагрузок для СССС-пластинки, а в [4] рассмотрены СССС-, СССС- и СССС-пластинки (S — свободно опертый край, «supported») при одноосном сжатии. Работы [5, 6] посвящены изучению устойчивости консольных пластинок (CFFF). В [7, 8] исследована устойчивость прямоугольных нанопластинок в рамках нелокальной теории Эрингена, которая рассматривает более сложное уравнение равновесия, чем в классической теории Кирхгофа. В [7] методом конечных полос для ортотропных пластинок с различным опиранием сторон (в том числе и для CFCF-пластинок) получены первые шесть критических нагрузок при двухосном сжатии. В работе [8] для CFFF-нанопластинок на упругом основании под действием плоского магнитного поля методом симплектической суперпозиции получены шесть критических нагрузок и соответствующих форм равновесия.

Пусть к защемленным граням $X = \pm a/2$ CFCF-пластинки приложена равномерная сжимающая нагрузка интенсивностью T_X . Грани $Y = \pm b/2$ не закреплены и свободны от нагрузки. Требуется найти первые несколько критических нагрузок и соответствующих А-А форм потери устойчивости.

Дифференциальное уравнение равновесного состояния в безразмерных координатах $x = X/b$, $y = Y/b$ имеет вид [9]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + Tw''_{xx} = 0, \quad (1)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа; $w(x, y)$ — функция прогибов; $T = T_X b^2/D$ — безразмерная сжимающая нагрузка; $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; h — постоянная толщина пластинки; ν — коэффициент Пуассона.

На гранях $x = \pm \gamma/2$ ($\gamma = a/b$) равны нулю прогибы и углы поворота [9]:

$$w = 0, w'_x = 0, \quad (2)$$

а на свободных гранях $y = \pm 1/2$ — изгибающие моменты M_y и перерезывающие силы V_y :

$$M_y = w''_{yy} + \nu w''_{xx} = 0, V_y = w'''_{yy} + (2 - \nu)w'''_{xy} = 0. \quad (3)$$

Искомая функция прогибов $w = w_1 + w_2$ должна быть нечетной:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k [A_k \text{sh}(\alpha_k x) + B_k \text{sh}(\beta_k x)] \sin(\lambda_k y),$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s [(C_s \text{sh}(\xi_s y) + D_s \text{sh}(\eta_s y)] \sin(\mu_s x), \quad (4)$$

где $A_k, B_k, C_s, D_s, \alpha_k, \beta_k, \xi_s, \eta_s$ — неопределенные коэффициенты; $\lambda_k = \pi k$; $\mu_s = 2\pi s/\gamma$, $k = 1, 3, \dots$; $s = 1, 2, \dots$, $\tilde{k} = (k + 1)/2$.

Подчиним каждый гипербола-тригонометрический ряд (4) уравнению (1), тогда

$$\alpha_k, \beta_k = \sqrt{0,5[2\lambda_k^2 - T \pm \sqrt{T^2 - 4\lambda_k^2 T}]},$$

$$\xi_s, \eta_s = \sqrt{\mu_s^2 \pm \mu_s \sqrt{T}}.$$

При выполнении граничных условий уравнений (2) и (3) получена система четырех уравнений смешанного типа, содержащая тригонометрические и гиперболические функции; последние разлагались в ряды Фурье. Меняя знаки суммирования в двойных рядах и исключив знак внешней суммы, после некоторых преобразований получена разрешающая бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно одной базовой последовательности коэффициентов A_k^* :

$$A_k^* = -4 \frac{\sum_{s=1}^{\infty} \mu_s \xi_s \left(\frac{1}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} - \frac{\delta_s}{\eta_s^2 + \lambda_k^2} \right) C_s^*}{\alpha_k \text{cth} \alpha_k^* - \beta_k \text{cth} \beta_k^*} \quad (k = 1, 3, \dots), \quad (5)$$

в которой

$$C_s^* = \frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(-\frac{\nu \alpha_k^2 - \lambda_k^2}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} + \frac{\nu \beta_k^2 - \lambda_k^2}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \right) A_k^*$$

$$\left((\xi_s^2 - \nu \mu_s^2) \text{th} \xi_s^* - \delta_s \frac{\xi_s}{\eta_s} (\eta_s^2 - \nu \mu_s^2) \text{th} \eta_s^* \right) \quad (6)$$

Здесь $A_k^* = A_k \text{sh} \alpha_k^*$; $C_s^* = C_s \text{ch} \xi_s^*$; $\alpha_k^* = \alpha_k \gamma/2$; $\beta_k^* = \beta_k \gamma/2$; $\xi_s^* = \xi_s/2$; $\eta_s^* = \eta_s/2$; $\delta_s = [\xi_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]/[\eta_s^2 - (2 - \nu)\mu_s^2]$.

Полученное выражение (5) содержит в качестве параметра искомую критическую нагрузку T (в коэффициентах $\alpha_k, \beta_k, \xi_s, \eta_s$). Множество (фактически, бесконечное) собственных чисел (критических нагрузок) можно найти из условия равенства нулю определителя, если его составить для системы (5). В настоящей работе использован более простой итерационный метод, описанный в работах [5, 6], в сочетании с перебором параметра нагрузки (метод «стрельбы»).

При выполнении вычислений начальные значения коэффициентов C_{s0}^* были приняты в виде последовательности $1/\mu_s^2$, и далее подставлены в выражение (5), из которого получены коэффициенты A_{k1}^* . Далее коэффициенты A_{k1}^* , добавлены в уравнение (6) и найдены новые коэффициенты C_{s1}^* для следующей итерации и т. д. Если перебором была определена нагрузка T , при которой соответствующие коэффициенты соседних итераций $A_{kn}^*, A_{k(n+1)}^*$ (и $C_{sn}^*, C_{s(n+1)}^*$) не отличались друг от друга (нетривиальное решение), то эта нагрузка считалась критической $T_{кр}$.

Рассмотрим в качестве примера квадратную пластинку при $\nu = 0,3$. Число членов в рядах принято 69; число итераций 20; число значащих цифр при вычислениях в среде Maple равно 30. Дальнейшее увеличение числа членов и итераций не изменяло пятую значащую цифру при вычислении соответствующих коэффициентов $A_{kn}^*, A_{k(n+1)}^*$ уравнения (5). В результате вычисле-

Таблица. Критические безразмерные нагрузки $T_x = T_x b^2/D$ в квадратной пластинке для S-S и A-A форм
Table. Critical dimensionless loads $T_x = T_x b^2/D$ in a square plate for S-S and A-A forms

$T_{кр}$	A-A форма (настоящая работа)	S-S форма [1]
1	96,110	38,675
2	330,334	150,468
3	438,950	246,800

ний были найдены первые три критические нагрузки для антисимметричных форм потери устойчивости: $T_{1кр} = 96,110$; $T_{2кр} = 330,334$; $T_{3кр} = 438,950$. В таблице приведены найденные критические нагрузки для A-A форм, а также в дополнении для S-S форм из работы [1]. Первые две A-A формы приведены на рисунке.

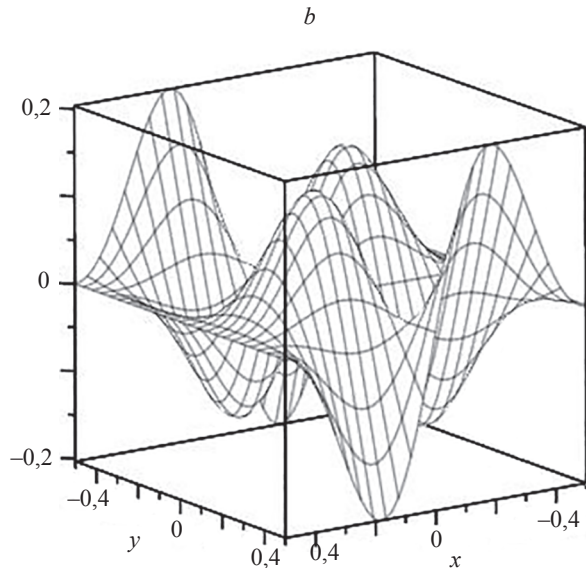
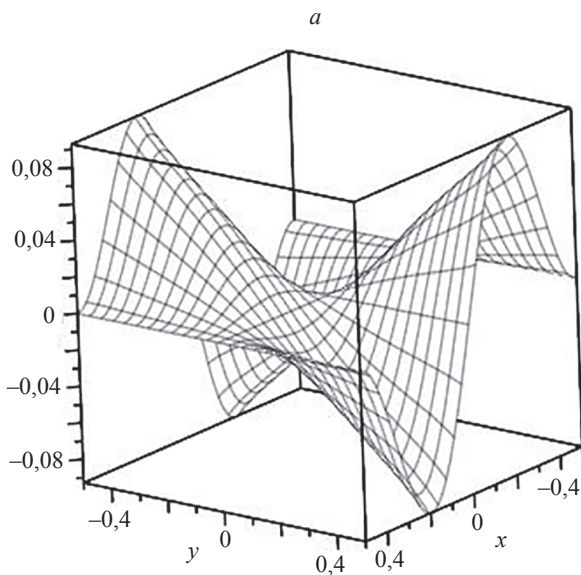


Рисунок. A-A формы равновесия при: $T_{1кр} = 96,110$ (a); $T_{2кр} = 330,334$ (b)
Figure. A-A forms of equilibrium at: $T_{1cr} = 96.110$ (a); $T_{2cr} = 330.334$ (b)

Полученные результаты могут быть использованы в микроэлектронике и нанотехнике при проектировании и эксплуатации чувствительных элементов различных датчиков схемы «мостик».

В дальнейшем будут исследованы смешанные A-S и S-A формы при соответствующих сочетаниях четных и нечетных функций прогибов.

Литература

1. Сухотерин М.В., Сосновская А.А. Устойчивость высокоупругой прямоугольной пластинки с защемленно-свободными краями при одноосном сжатии // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24. № 2. С. 276–283. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-2-276-283>
2. Анненков Л.В. Исследование устойчивости защемленной прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 48–53. <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2015-7-3-48-53>
3. Onwuka D.O., Iwuoha S.E. Elastic instability analysis of biaxially compressed flat rectangular isotropic all-round clamped (CCCC) plates // MedCrave Online Journal of Civil Engineering. 2017. V. 2. N 2. P. 52–56. <https://doi.org/10.15406/mojce.2017.02.00027>

References

1. Sukhoterin M.V., Sosnovskaya A.A. Stability of a highly elastic rectangular plate with clamped-free edges under uniaxial compression. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 276–283. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-2-276-283>
2. Annenkov L.V. Explore of stability of clamped rectangular plate, compressed in one direction. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova*, 2015, no. 3 (31), pp. 48–53. (in Russian). <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2015-7-3-48-53>
3. Onwuka D.O., Iwuoha S.E. Elastic instability analysis of biaxially compressed flat rectangular isotropic all-round clamped (CCCC) plates. *MedCrave Online Journal of Civil Engineering*, 2017, vol. 2, no. 2, pp. 52–56. <https://doi.org/10.15406/mojce.2017.02.00027>

4. Wang B., Li P., Li R. Symplectic superposition method for new analytic buckling solutions of rectangular thin plates // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016. V. 119. P. 432–441. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.11.006>
5. Сухотерин М.В., Кныш Т.П., Пастушок Е.М., Абдикаримов Р.А. Устойчивость упругой ортотропной консольной пластинки // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 38–52. <https://doi.org/10.18721/JPM.14204>
6. Sukhoterin M., Baryshnikov S., Knysh T., Rasputina E. Stability of rectangular cantilever plates with high elasticity // *E3S Web of Conferences*. 2021. V. 244. P. 04004. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202124404004>
7. Analooei H.R., Azhari M., Heidarpour A. Elastic buckling and vibration analyses of orthotropic nanoplates using nonlocal continuum mechanics and spline finite strip method. *Applied Mathematical Modelling*. 2013. V. 37. N 10-11. P. 6703–6717 <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.051>
8. Wang W., Rong D., Xu C., Zhang J., Xu X., Zhou Z. Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields // *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2020. V. 8. N 4. P. 505–515. <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00106-3>
9. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959. 580 p.

Автор

Сосновская Анна Анатольевна — старший преподаватель, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, [sc 59171016800](https://orcid.org/0009-0000-6476-6783), <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 23.11.2025
Одобрена после рецензирования 19.12.2025
Принята к печати 19.01.2026

Author

Anna A. Sosnovskaya — Senior Lecturer, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint Petersburg, 198035, Russian Federation, [sc 59171016800](https://orcid.org/0009-0000-6476-6783), <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Received 23.11.2025
Approved after reviewing 19.12.2025
Accepted 19.01.2026



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»