

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MODELING AND SIMULATION

doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-2-385-392

УДК 535.338.3; 513.6

Сфероидальные модели рудных месторождений в рамках гравитационной томографии

Валерий Сергеевич Сизиков¹✉, Николай Сергеевич Кармановский²,
Нина Геннадиевна Рущенко³, Александр Владимирович Белозубов⁴

^{1,2,3,4} Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

¹ sizikov2000@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-4618-8753>

² karmanov50@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0533-9893>

³ rushchenko@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1230-5410>

⁴ belozubov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7594-5020>

Аннотация

Введение. Представлено одно из решений задачи гравиметрии — определение рудных месторождений в мантии и коре Земли путем обработки гравитационного поля, измеренного на поверхности Земли. Предлагаемая методика предполагает решение этой формально технической задачи путем создания математической модели с возможностью компьютерного моделирования. Существующие подходы гравиметрии для отыскания месторождений требуют использования технических средств, в частности, бурильных установок. Предлагаемая методика дает возможность оценить залегание месторождений путем компьютерной обработки измеренного гравитационного поля на поверхности Земли. **Метод.** Суть решения прямой задачи гравиметрии состоит в расчете модельной (или измеренной) гравитационной напряженности на поверхности Земли с разбиением каждого тела месторождения на набор вертикальных стержней. При решении обратной задачи определения месторождения каждое тело моделируется однородным сфероидом. Известные расчетные соотношения для гравитационной напряженности сфероида преобразовываются в форму, удобную для реализации на компьютере путем нелинейного программирования. Определение параметров сфероида выполняется методом минимизации сглаживающего функционала Тихонова с ограничениями на параметры. Это позволяет сделать обратную некорректную (неустойчивую) задачу однозначной и устойчивой. **Основные результаты.** Предложенная методика проиллюстрирована численным модельным примером с месторождением в виде двух, а также пяти тел. Обратная задача гравиметрии трактуется как гравитационная томография, или «внутривидение» мантии и коры Земли, что позволяет визуализировать месторождение без погружения вглубь Земли. Описанный алгоритм дает возможность математико-компьютерным путем определить возможное наличие месторождения, оценить его параметры (тип, размер, глубина залегания, плотность и др.) при минимальных технических и финансовых затратах. Результаты гравитационной томографии могут служить начальным приближением при выборе мест и глубины бурения скважин. **Обсуждение.** В существующих подходах гравиметрии требуется использовать технические средства (бурильные установки и др.) для отыскания месторождений в Земле, а изложенная методика позволяет оценить залегание месторождений путем математико-компьютерной обработки измеренного гравитационного поля на поверхности Земли без применения дорогостоящих технических средств. Результаты гравитационной томографии могут служить начальным приближением при поиске месторождений техническими средствами при бурении скважин.

Ключевые слова

прямая и обратная задачи гравиметрии, стержни, сфероиды, параметры сфероидов, минимизация функционала с ограничениями, модельный пример месторождения, гравитационная томография (ГТ)

Ссылка для цитирования: Сизиков В.С., Кармановский Н.С., Рущенко Н.Г., Белозубов А.В. Сфероидальные модели рудных месторождений в рамках гравитационной томографии // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2026. Т. 26, № 2. С. 385–392. doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-2-385-392

Spheroidal models of ore deposits in the framework of gravity tomography

Valery S. Sizikov¹✉, Nikolay S. Karmanovskiy², Nina G. Rushchenko³, Alexander V. Belozubov⁴

ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

¹ sizikov2000@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-4618-8753>² karmanov50@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0533-9893>³ rushchenko@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1230-5410>⁴ belozubov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7594-5020>

Abstract

This paper presents a solution to the gravimetry problem of determining ore deposits in the Earth's mantle and crust by processing the gravitational field measured at the Earth's surface. The proposed method addresses this formally technical problem by creating a mathematical model capable of computer simulation. Existing gravimetry approaches to locating deposits require the use of technical means, particularly drilling rigs. The proposed method makes it possible to estimate the occurrence of deposits by computer processing of the measured gravitational field on the Earth's surface. The essence of solving the forward gravimetry problem consists of calculating the model (or measured) gravitational field at the Earth's surface by dividing each deposit body into a set of vertical rods. When solving the inverse problem of determining the deposit, each body is modeled by a homogeneous spheroid. Known calculation relationships for the gravitational field of a spheroid are transformed into a form convenient for computer implementation using nonlinear programming. The spheroid parameters are determined using the Tikhonov smoothing functional minimization method with parameter constraints. This makes the inverse ill-posed (unstable) problem unambiguous and stable. The proposed method is illustrated by a numerical model example with a two- and five-body deposit. The inverse gravimetry problem is treated as gravity tomography, or "inner vision" of the Earth's mantle and crust, allowing for deposit visualization without drilling into the Earth's interior. The described algorithm enables mathematical and computational methods to determine the possible presence of a deposit and estimate its parameters (type, size, depth, density, etc.) with minimal technical and financial investment. Gravity tomography results can serve as an initial approximation when selecting well locations and depths. Existing gravimetric approaches require the use of technical means (drilling rigs, etc.) to locate deposits in the Earth. The presented method, however, allows for the estimation of deposit locations through mathematical and computer processing of the measured gravitational field on the Earth's surface without the use of expensive technical means. Gravity tomography results can serve as an initial approximation when searching for deposits using technical means during well drilling.

Keywords

direct and inverse gravimetry problems, rods, spheroids, spheroid parameters, constrained functional minimization, deposit model example, gravity tomography (GT)

For citation: Sizikov V.S., Karmanovskiy N.S., Rushchenko N.G., Belozubov A.V. Spheroidal models of ore deposits in the framework of gravity tomography. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2026, vol. 26, no. 2, pp. 385–392 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-2-385-392

Введение

Моделирование месторождений является одним из основных приемов решения прямой и особенно обратной задач гравиметрии. Прямая задача — расчет гравитационного поля на поверхности Земли, создаваемого некоторым модельным месторождением (или выполнение практических измерений поля). Обратная задача — определение математико-компьютерным путем параметров месторождения по рассчитанному или измеренному полю на поверхности Земли.

В работах [1, 2] использованы упрощенные модели месторождений: в виде четырехугольных усеченных пирамид, призм, цилиндров, брусков, многогранников, параллелепипедов, пересекающихся стержней и т. д. Однако такие фигуры обладают негладкими поверхностями и порождают громоздкие формулы. Отметим также плоскостную модель [3]. В работе [4] использованы однородные (и неоднородные) сфероиды (или эллипсоиды вращения), применяемые в астрофизике для построения моделей галактик. В настоящей работе применены сфероиды для моделирования месторождений.

Отметим также сложные модели с использованием сеток дискретизации с тысячами и даже миллионами ячеек и решением больших матричных систем [1, 5].

Такой подход является более сложным и требующим больших компьютерных ресурсов. Однако использование упрощенных моделей месторождений (например, в виде сфероидов) является наглядным и удобным и может служить хорошим начальным приближением при построении более сложных моделей.

Для расчета месторождений обычно применяется следующая исходная информация: тензор гравитации [2], напряженности гравитационных полей [4, 6–8], сейсмические данные [9], удаленное считывание со спутников [6–8] и др. В настоящей работе использована только вертикальная компонента напряженности гравитационного поля V_z на поверхности Земли. В работах [10–12] применены гармонические функции и различные ограничения на плотность (бигармоническое ограничение, ограничение на плотность вида: $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$ и т. д.), которые могут обеспечить единственность и устойчивость решения.

В работе [8] развита F-аппроксимация обработки гравитационного поля (включающая систему СЛАУ, множители Лагранжа и производные порядков 1, 2, 3); в работе [11] дана фильтрационная гравитационная томография (ГТ) с глубинной привязкой объектов; в [13] приведены результаты теории и практики ГТ.

При решении прямой задачи (расчет гравитационного поля на поверхности Земли, создаваемого ме-

сторожением) будем рассматривать месторождение в виде нескольких тел произвольной формы и разбивать каждое тело на набор вертикальных стержней [4] (рис. 1). Такой расчет может быть выполнен в случае моделирования поля.

Предлагаемая методика

Расчет прямой задачи с использованием вертикальных стержней. Пусть плотность тела $\rho = \text{const}$. Представим его в виде набора стержней с сечениями и границами $z'_{\min} = z'_{\min}(x', y')$ и $z'_{\max} = z'_{\max}(x', y')$ (кровлей и подошвой) (рис. 1).

Напряженность V_z , создаваемая одним стержнем в точке $(x, y, 0)$, равна

$$dV_z(x, y, 0) = \gamma \rho \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_{\min}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_{\max}^2}} \right] dx' dy', \quad (1)$$

где γ — гравитационная постоянная.

При этом напряженность $V_z(x, y, 0)$, создаваемая всем телом в некоторой точке $(x, y, 0)$, равна интегралу от (1) по всем прилегающим друг к другу стержням в пределах от $z'_{\min} = z'_{\min}(x', y')$ до $z'_{\max} = z'_{\max}(x', y')$.

В случае реального (не модельного) эксперимента напряженность $V_z(x, y, 0)$ может быть непосредственно считана с поверхности каждого тела (без расчета).

Предположим, что дана напряженность $V_z(x, y, 0)$ на поверхности Земли.

При решении обратной задачи (определение параметров месторождения по измеренному полю на поверхности Земли) будем моделировать каждое тело месторождения сфероидом.

На рис. 2 — тела месторождений в виде сфероидов. Оси x и y направлены горизонтально, а ось z — вертикально вниз (вглубь поверхности Земли).

Сфероиды (эллипсоиды вращения) нашли широкое применение в небесной механике, астрофизике и геофизике [14, 15]. Однако формулы для полей сфероидов не доведены до формы, удобной для программирования на компьютере, данное упущение исправлено в настоящей работе.

Реальные тела рудного типа, являющиеся источниками гравитационного поля, имеют форму, близкую к сфероидам [4]. Сфероиды бывают однородные, выпуклые, звездные [4], обладающие средней плоскостью [8] и др., а для таких тел справедливы теоремы единственности [10].

В обратной задаче параметры тел определяем путем минимизации функционала Тихонова с ограничениями на параметры и с использованием сплайнов.

Предположим в прямой задаче, что геологические тела имеют произвольную форму (но близкую к сфероидам), а в обратной задаче выполним их моделирование сфероидами. При этом в число искомых неизвестных будем включать координаты центров сфероидов, их полуоси и плотности, а также их количество.

Сравнение с другими типами томографий. Часто обратная задача гравиметрии решается как набор двухмерных задач, а именно, в ряде сечений определяется плотность и затем составляется трехмерная картина.

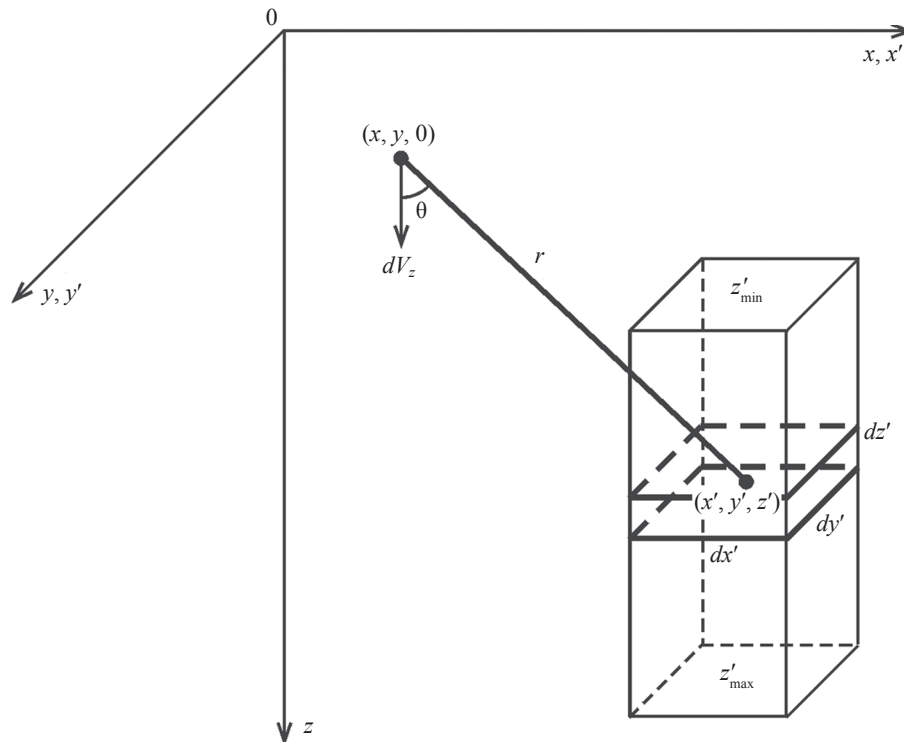


Рис. 1. Элементарная ячейка $dx' dy' dz'$ и элементарный вертикальный стержень тела

Fig. 1. Elementary cell $dx' dy' dz'$ and elementary vertical rod of the body

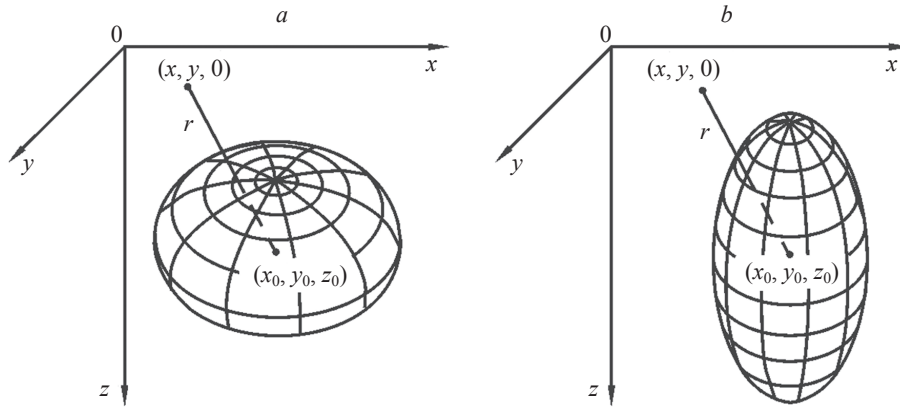


Рис. 2. Формы сфероидов: сжатый (а) и вытянутый (b)

Fig. 2. Shapes of spheroids: oblate (a) and prolate (b)

Эта процедура напоминает приемы, характерные для разных видов томографии [14–16]: рентгеновской компьютерной томографии (РКТ), инфракрасной томографии (ИКТ) и ЯМР-томографии [15, 16].

В настоящей работе, использующей сфероиды, решается трехмерная задача и это эквивалентно трехмерной томографии [16, 17]. В связи с этим предлагается относить обратную задачу гравиметрии к задачам томографии, как это уже сделано в работе [4], и называть обратную задачу гравиметрии задачей гравитационной томографии. Кроме того, особенностью данной задачи является то, что она позволяет без бурения скважин путем математической обработки поверхностных результатов «заглянуть» вглубь Земли, а это напоминает операцию внутривидения. Предлагается называть обратную задачу гравиметрии также задачей внутривидения Земли [4].

Моделирование обратной задачи с использованием сфероидов

Рассмотрим геологическое месторождение в виде нескольких ($m \geq 0$) однородных тел произвольной формы. Конкретно, рассмотрим месторождение в виде двух тел. Тело 1 будем ассоциировать с рудным телом, а тело 2 — с интрузией (магма-телом).

Определение. Эллипсоидом называется тело, ограниченное поверхностью

$$\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 + \zeta^2/c^2 = 1, \quad (2)$$

где оси ξ, η, ζ направлены вдоль осей x, y, z , причем a, b, c — полуоси эллипсоида, а начало системы координат — в центре тела (рис. 2).

Рассмотрим двухосный эллипсоид (2), или эллипсоид вращения вокруг оси z и для краткости называть его сфероидом. В работах [13, 18] выведены формулы для потенциала V и напряженностей V_x, V_y, V_z сфероида. Отметим, что в работах [13, 18] формулы не доведены до удобной формы, что будет сделано в текущей работе, но только для напряженности V_z .

Замечание. Будем называть эллипсоидом (сфероидом) как тело, ограниченное поверхностью, так и саму поверхность.

Рассмотрим сжатый сфероид, для которого $a = b > c$. Поместим начало координат x, y, z в некоторую точку на дневной поверхности Земли, причем ось z направим вертикально вниз. Пусть центр сфероида имеет координаты x_0, y_0, z_0 , а поле (напряженность V_z) сфероида рассчитываем или измеряем в точке $(x, y, 0)$ (рис. 1 и 2).

Формулы для z -напряженности сфероида

Лемма 1. z -напряженность сжатого сфероида (рис. 2, а) равна (вне сфероида) [4]:

$$V_z(x, y, 0) = 4\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} (p - \arctg p) z_0, \quad (3)$$

$$\varepsilon = c/a < 1, e = \sqrt{1 - \varepsilon^2} > 0, p = q/\sqrt{\tau}, q = ea/r,$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2},$$

$$\tau = \left[1 - q^2 + \sqrt{(1 - q^2)^2 + 4q^2 z_0^2 / r^2} \right] / 2. \quad (4)$$

Лемма 2. z -напряженность вытянутого сфероида (рис. 2, b) равна [4, 13]:

$$V_z(x, y, 0) = 4\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} \left[\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right] z_0, \quad (5)$$

$$\varepsilon = c/a > 1, e = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} > 0, p = q/\sqrt{t}, q = ea/r,$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}, \quad (6)$$

$$t = \left\{ 1 - q^2 + \sqrt{(1 - q^2)^2 + 4q^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] / r^2} \right\} / 2.$$

Доказательство. Подробный вывод формул (3)–(6) дан в [4].

Начальные оценки параметров месторождения. Пусть месторождение имеет $m \geq 0$ тел. Разместим на поверхности Земли N гравиметров (красные квадраты на рис. 3).

По z -напряженностям $V_z(x, y, 0)$, измеренным гравиметрами, получим изолинии z -напряженностей с помощью кубического сглаживающего сплайна на поверхности Земли (черные линии на рис. 3). По виду изолиний можно оценить количество тел m и их x, y -координаты $(x_0, y_0)_1, \dots, (x_0, y_0)_m$.

Выделение тел по изолиниям. Предлагается следующий способ выделения тел по изолиниям. Согласно этому способу, должны выполняться два условия:

- 1) провал напряженности V_z между некоторыми двумя максимумами (полюсами) изолиний составляет не менее 20 % от напряженности в полюсах (как в критерии Рэлея [16, С. 226]);
- 2) уровень шума δV_z не превосходит 20 % от напряженностей в полюсах.

Если оба условия выполнены, то это значит, что оба тела выделены по изолиниям. Однако данный способ дает приближенную оценку количества тел m и их x, y -координаты и требуется уточнить эти параметры.

Применение метода регуляризации Тихонова с ограничениями. Задача определения параметров месторождения является некорректной (неустойчивой с неединственным решением) [4, 14–20]. Даже если тело обладает средней плоскостью Сретенского [17], решение будет неединственным, если плотность тела ρ не задана. Один из эффективных способов устранения неединственности решения — использование метода регуляризации Тихонова с ограничениями на параметры решения.

Решим задачу определения параметров месторождения путем минимизации сглаживающего функционала Тихонова [1, 14, 21–23], задавая его в виде [4]:

$$F_1 \equiv \sum_{i=1}^N (\tilde{V}_{zi} - V_{zi})^2 + \alpha \sum_{j=1}^{mk} q_j (p_j - p_{midj})^2 = \min_{p_1, \dots, p_{mk}}, \quad (7)$$

где q_j — вес; p_j — искомые параметры каждого j -го тела-сфероида; $(\epsilon, \rho, x_0, y_0, z_0)$ — параметры; $k = 5$ — количество параметров, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

Функционал (7) содержит невязку $\sum_{i=1}^N (\tilde{V}_{zi} - V_{zi})^2$ и стабилизатор $\sum_{j=1}^{mk} q_j (p_j - p_{midj})^2$. Рассматриваются различные варианты стабилизатора применительно к задаче геофизической инверсии (обращения) с целью фокусирования зашумленных и недостаточно четких геофизических инверсных изображений [20, 23].

Для повышения устойчивости и устранения неединственности решения установим ограничения на решение в виде пределов изменения параметров (сравн. [22]):

$$p_{\min j} \leq p_j \leq p_{\max j}, j = 1, \dots, mk, \quad (8)$$

где ограничения $p_{\min j}, p_{\max j}$ оценим на основе априорной информации.

Для весов q предположим, что $q_j = 1/p_{midj}^2$, где $p_{midj} = (p_{\min j} + p_{\max j})/2$. Это задача нелинейного программирования [24, 25]. Введены веса q_j , так как искомые параметры p_j могут иметь различную физическую размерность и различный порядок величин, а также делает слагаемые $q_j (p_j - p_{midj})^2$ в (7) близкими и безразмерными.

Для минимизации функционала (7) использована модификация метода координатного спуска и сужающихся ограничений [17]. Специфика метода состоит

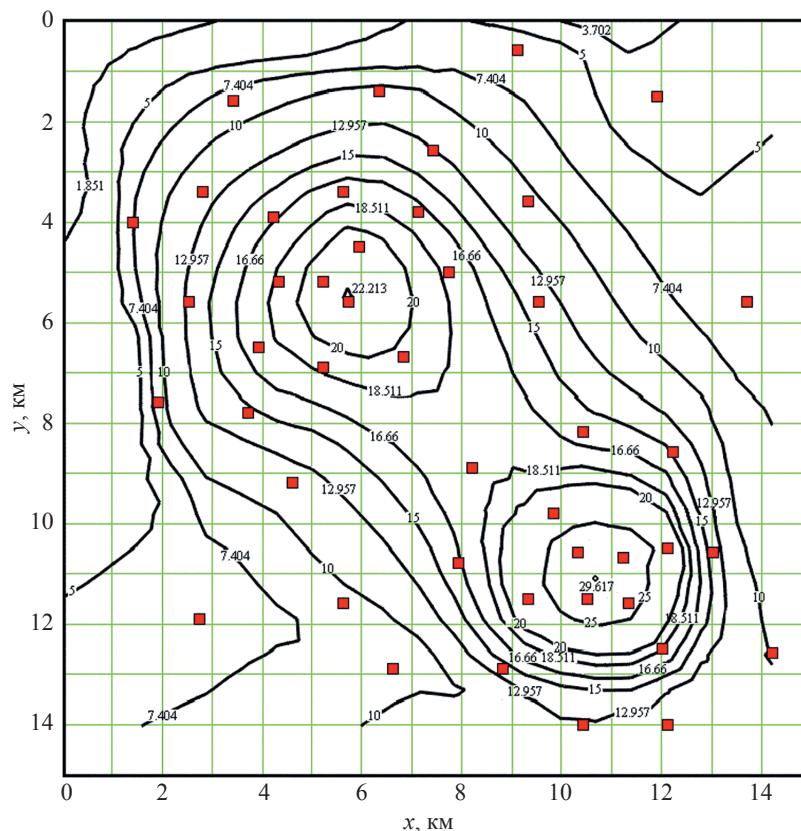


Рис. 3. Изолинии напряженности $\tilde{V}_z(x, y, 0)$ в миллигалах от двух тел

Fig. 3. Isolines of intensity $\tilde{V}_z(x, y, 0)$ in milligalah from two bodies

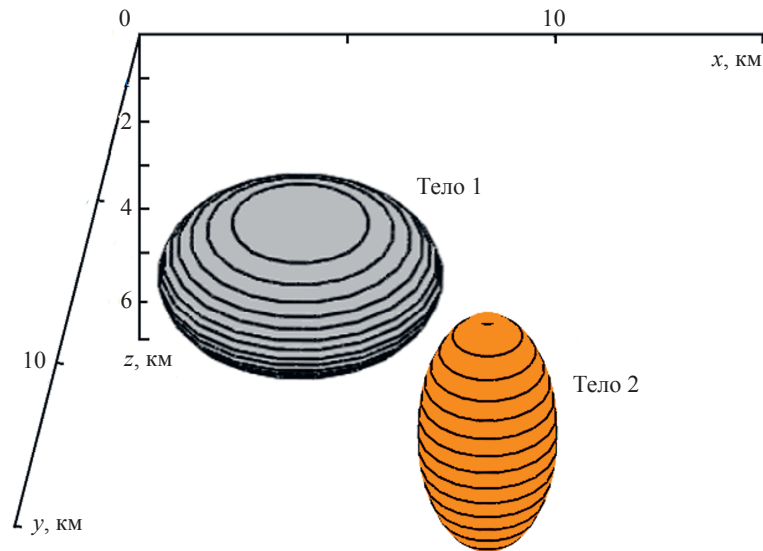


Рис. 4. Два сфероиды, имитирующие месторождение в примере

Fig. 4. Two spheroids simulating the deposit in the example

в том, что он не позволяет выходить решению за ограничения (8), обеспечивая устойчивость и сходимость решения в пределах интервала («коридора»), даваемого неравенствами (8).

Численный пример. Моделирование прямой и обратной задач гравиметрии

Для моделирования предложенной модели разработан пакет программ Inverse Gravimetry Problem 2 (IGP2) на MATLAB [4, 16] для прямой и обратной задач гравиметрии, когда месторождение состоит из двух или пяти тел ($m = 2$ или $m = 5$). Для выполнения расчетов был использован MATLAB с построением графиков в MathCAD.

Цель примера — определить количество тел m месторождения, параметры каждого тела ε , ρ , x_0 , y_0 , z_0 и их количество k .

Выполнялись следующие операции.

- Известны зашумленные отсчеты напряженности $\tilde{V}_z(x, y, 0)$ в миллигалах, полученные N гравиметрами, расположенными на поверхности Земли (рис. 3, красные квадраты).
- Используя напряженности в гравиметрах, проведен сглаживающий кубический сплайн. На рис. 3 с помощью сплайна построены изолинии напряженности V_z .
- По изолиниям определены (приблизительно): m и отсчеты V_{zi} (7).
- Путем минимизации функционала (7) рассчитаны более точно параметры каждого тела.

На рис. 3 приведены изолинии напряженности $\tilde{V}_z(x, y, 0)$. По ним можно оценить количество тел m , а остальные параметры ε , ρ , x_0 , y_0 , z_0 определить путем минимизации функционала Тихонова (7).

На рис. 4 приведено два рассчитанных сфероиды.

Из рис. 4 видно, что сфероиды хорошо смоделировали тела месторождения. В результате можно ре-

комендовать предложенную методику, основанную на сфероидах, для использования.

Помимо приведенного примера из двух тел был рассчитан также пример из пяти сфероидов. Они могут быть отождествлены с месторождением, состоящим из нескольких тел — с рудой, нефтью, интрузией, кварцитами, сланцами, гранитом, базальтом и др. Пример из пяти тел также показал эффективность предложенной в работе методики.

Заключение

Результаты, полученные в настоящей работе, а также в работе [4] и др., позволяют сделать следующие выводы.

Ограничения на решение (на параметры тел месторождения), например, в виде неравенств (8) помогают устранить неединственность обратной задачи гравиметрии и повышают ее устойчивость. Этому способствует также использование метода минимизации функционала Тихонова (7).

Решение обратной задачи гравиметрии может быть устойчивым (и единственным) и без регуляризации, но при использовании жестких ограничений на решение.

При компьютерной реализации задачи минимизации функционала F_1 (7) требуются только одномерные массивы (V_{zi} и др.) и не требуются матрицы. Время решения задачи минимизации функционала методом координатного спуска в рассмотренных примерах составляет порядка 1–10 с. До этого алгоритм реализовывался на Фортране и Алголе и по порядку величины давал 10 с. Таким образом, предложенная в работе методика не требует больших компьютерных ресурсов (памяти и времени).

Использование сфероидов для моделирования тел месторождений, а также минимизации функционала с ограничениями на искомые параметры позволяет решать обратную задачу гравиметрии достаточно точно и с малыми затратами компьютерной памяти и времени

даже при больших погрешностях исходных данных (рис. 3 и 4).

Результаты гравитационной томографии могут служить начальным приближением при бурении скважин с целью поиска месторождения техническими средствами.

К новым научным результатам можно отнести следующее. Для решения прямой задачи расчета гравитационной напряженности на поверхности Земли каждое тело месторождения разбивается на набор вертикальных стержней. Решение обратной некорректной задачи расчета тел выполнено путем представления тел сфероидом и минимизации сглаживающего функционала

Тихонова для определения параметров сфероидов с ограничениями на параметры.

В существующих подходах гравиметрии требуется использовать технические средства (бурильные установки и др.) для отыскания месторождений в мантии и коре Земли, а изложенная методика позволяет оценить залегание месторождений путем математико-компьютерной обработки измеренного гравитационного поля на поверхности Земли без применения дорогостоящих технических средств. Результаты гравитационной томографии могут служить начальным приближением при поиске месторождений техническими средствами при бурении скважин.

Литература

1. Commer M. Three-dimensional gravity modelling and focusing inversion using rectangular meshes // *Geophysical Prospecting*. 2011. V. 59. N 5. P. 966–979. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.00969.x>
2. Pilkington M. Evaluating the utility of gravity gradient tensor components // *Geophysics*. 2014. V. 79. N 1. P. G1–G14. <https://doi.org/10.1190/GEO2013-0130.1>
3. Salem A., Green C., Stewart M., De Lerma D. Inversion of gravity data with isostatic constraints // *Geophysics*. 2014. V. 79. N 6. P. A45–A50. <https://doi.org/10.1190/GEO2014-0220.1>
4. Сизиков В.С., Голов И.Н. Моделирование месторождений сфероидом // *Физика Земли*. 2009. № 3. С. 83–96.
5. Jahandari H., Farquharson C.G. Forward modeling of gravity data using finite-volume and finite-element methods on unstructured grids // *Geophysics*. 2013. V. 78. N 3. P. G69–G80. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0246.1>
6. Michel V., Wolf K. Numerical aspects of a spline-based multiresolution recovery of the harmonic mass density out of gravity functionals // *Geophysical Journal International*. 2008. V. 173. N 1. P. 1–16. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.2007.03700.x>
7. Salem A., Green C., Campbell S., Fairhead J.D., Cascone L., Moorhead L. Moho depth and sediment thickness estimation beneath the Red Sea derived from satellite and terrestrial gravity data // *Geophysics*. 2013. V. 78. N 5. P. G89–G101. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0150.1>
8. Керимов И.А. Методы гравитационной томографии на основе F-аппроксимации // *Геология и геофизика Юга России*. 2020. Т. 10. № 1. С. 55–67. <https://doi.org/10.23671/VNC.2020.1.59065>
9. Bosold A., Schwarzhans W., Julapour A., Ashrafzadeh A.R., Ehsani S.M. The structural geology of the High Central Zagros revisited (Iran) // *Petroleum Geoscience*. 2005. V. 11. N 3. P. 225–238. <https://doi.org/10.1144/1354-079304-646>
10. Michel V., Fokas A.S. A unified approach to various techniques for the non-uniqueness of the inverse gravimetric problem and wavelet-based methods // *Inverse Problems*. 2008. V. 24. N 4. P. 045019. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/24/4/045019>
11. Долгал А.С., Шархимуллин А.Ф. О гравитационной томографии и путях ее дальнейшего развития // *Вестник Пермского университета*. 2009. № 11. С. 114–120.
12. Hirt C., Rexer M., Scheinert M., Pail R., Claessens S., Holmes S. A new degree-2190 (10 km resolution) gravity field model for Antarctica developed from GRACE, GOCE and Bedmap2 data // *Journal of Geodesy*. 2016. V. 90. N 2. P. 105–127. <https://doi.org/10.1007/s00190-015-0857-6>
13. Zhdanov M.S., Ellis R., Mukherjee S. Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data // *Geophysics*. 2004. V. 69. N 4. P. 925–937. <https://doi.org/10.1190/1.1778236>
14. MacLennan K., Karaoulis M., Reil A. Complex conductivity tomography using low-frequency crosswell electromagnetic data // *Geophysics*. 2014. V. 79. N 1. P. E23–E38. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0531.1>
15. Марусина М.Я., Казначеева А.О. Современное состояние и перспективы развития томографии // *Научно-технический вестник*

References

1. Commer M. Three-dimensional gravity modelling and focusing inversion using rectangular meshes. *Geophysical Prospecting*, 2011, vol. 59, no. 5, pp. 966–979. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.00969.x>
2. Pilkington M. Evaluating the utility of gravity gradient tensor components. *Geophysics*, 2014, vol. 79, no. 1, pp. G1–G14. <https://doi.org/10.1190/GEO2013-0130.1>
3. Salem A., Green C., Stewart M., De Lerma D. Inversion of gravity data with isostatic constraints. *Geophysics*, 2014, vol. 79, no. 6, pp. A45–A50. <https://doi.org/10.1190/GEO2014-0220.1>
4. Golov I.N., Sizikov V.S. Modeling of deposits by spheroids. *Izvestiya Physics of the Solid Earth*, 2009, vol. 45, no. 3, pp. 258–271. <https://doi.org/10.1134/S1069351309030070>
5. Jahandari H., Farquharson C.G. Forward modeling of gravity data using finite-volume and finite-element methods on unstructured grids. *Geophysics*, 2013, vol. 78, no. 3, pp. G69–G80. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0246.1>
6. Michel V., Wolf K. Numerical aspects of a spline-based multiresolution recovery of the harmonic mass density out of gravity functionals. *Geophysical Journal International*, 2008, vol. 173, no. 1, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.2007.03700.x>
7. Salem A., Green C., Campbell S., Fairhead J.D., Cascone L., Moorhead L. Moho depth and sediment thickness estimation beneath the Red Sea derived from satellite and terrestrial gravity data. *Geophysics*, 2013, vol. 78, no. 5, pp. G89–G101. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0150.1>
8. Kerimov I.A. Methods of gravitational tomography based on F-approximation. *Geology and Geophysics of Russian South*, 2020, vol. 10, no. 1, pp. 55–67. (in Russian). <https://doi.org/10.23671/VNC.2020.1.59065>
9. Bosold A., Schwarzhans W., Julapour A., Ashrafzadeh A.R., Ehsani S.M. The structural geology of the High Central Zagros revisited (Iran). *Petroleum Geoscience*, 2005, vol. 11, no. 3, pp. 225–238. <https://doi.org/10.1144/1354-079304-646>
10. Michel V., Fokas A.S. A unified approach to various techniques for the non-uniqueness of the inverse gravimetric problem and wavelet-based methods. *Inverse Problems*, 2008, vol. 24, no. 4, pp. 045019. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/24/4/045019>
11. Dolgal A.S., Sharhimullin A.F. Gravitational tomography and the ways of its further development. *Bulletin of Perm University. Geology*, 2009, no. 11, pp. 114–120. (in Russian)
12. Hirt C., Rexer M., Scheinert M., Pail R., Claessens S., Holmes S. A new degree-2190 (10 km resolution) gravity field model for Antarctica developed from GRACE, GOCE and Bedmap2 data. *Journal of Geodesy*, 2016, vol. 90, no. 2, pp. 105–127. <https://doi.org/10.1007/s00190-015-0857-6>
13. Zhdanov M.S., Ellis R., Mukherjee S. Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data. *Geophysics*, 2004, vol. 69, no. 4, pp. 925–937. <https://doi.org/10.1190/1.1778236>
14. MacLennan K., Karaoulis M., Reil A. Complex conductivity tomography using low-frequency crosswell electromagnetic data. *Geophysics*, 2014, vol. 79, no. 1, pp. E23–E38. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0531.1>

- Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2007. № 42. С. 3–13.
16. Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab. СПб.: Лань, 2011. 256 с.
 17. Булах Е.Г., Маркова М.Н. Обратные задачи гравиметрии для совокупности тел класса Л.Н. Сретенского // Физика Земли. 2008. № 7. С. 21–27.
 18. Grafarend E.W., You Rey-Jer., Syffus R. Map Projections: Cartographic Information Systems. Springer. 2014. 961 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-36494-5>
 19. Chen Z., Ding S., Xu Y., Yang H. Multiscale collocation methods for ill-posed integral equations via a coupled system // Inverse Problems. 2012. V. 28. N 2. P. 025006. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/2/025006>
 20. Lahmer T. Optimal experimental design for nonlinear ill-posed problems applied to gravity dams // Inverse Problems. 2011. V. 27. N 12. P. 125005. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/12/125005>
 21. Fischer D., Michel V. Sparse regularization of inverse gravimetry—case study: spatial and temporal mass variations in South America // Inverse Problems. 2012. V. 28. N 6. P. 065012. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/6/065012>
 22. Frick K., Martinz P., Munk A. Shape-constrained regularization by statistical multiresolution for inverse problems: asymptotic analysis // Inverse Problems. 2012. V. 28. N 6. P. 065006. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/6/065006>
 23. Vatanhah S., Renaut R.A., Ardestani V.E. Regularization parameter estimation for underdetermined problems by the χ^2 principle with application to 2D focusing gravity inversion // Inverse Problems. 2014. V. 30. N 8. P. 085002. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/30/8/085002>
 24. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
 25. Mottl J., Mottlova L. The simultaneous solution of the inverse problem of gravimetry and magnetism by means of non-linear programming // Geophysical Journal International. 1984. V. 76. N 3. P. 563–579. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.1984.tb01910.x>
 15. Marusina M.Y., Kaznacheeva A.O. Current state and prospects of tomography. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2007, no. 42, pp. 3–13. (in Russian)
 16. Sizikov V.S. *Inverse Applied Problems and MatLab*. St. Petersburg, Lan Publ., 2011, 256 p. (in Russian)
 17. Bulakh E.G., Markova M.N. Inverse gravity problems for models composed of bodies of Sretenskii's class. *Izvestiya Physics of the Solid Earth*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 537–542. <https://doi.org/10.1134/s1069351308070033>
 18. Grafarend E.W., You Rey-Jer., Syffus R. *Map Projections: Cartographic Information Systems*. Springer, 2014, 961 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-36494-5>
 19. Chen Z., Ding S., Xu Y., Yang H. Multiscale collocation methods for ill-posed integral equations via a coupled system. *Inverse Problems*, 2012, vol. 28, no. 2, pp. 025006. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/2/025006>
 20. Lahmer T. Optimal experimental design for nonlinear ill-posed problems applied to gravity dams. *Inverse Problems*, 2011, vol. 27, no. 12, pp. 125005. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/12/125005>
 21. Fischer D., Michel V. Sparse regularization of inverse gravimetry—case study: spatial and temporal mass variations in South America. *Inverse Problems*, 2012, vol. 28, no. 6, pp. 065012. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/6/065012>
 22. Frick K., Martinz P., Munk A. Shape-constrained regularization by statistical multiresolution for inverse problems: asymptotic analysis. *Inverse Problems*, 2012, vol. 28, no. 6, pp. 065006. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/6/065006>
 23. Vatanhah S., Renaut R.A., Ardestani V.E. Regularization parameter estimation for underdetermined problems by the χ^2 principle with application to 2D focusing gravity inversion. *Inverse Problems*, 2014, vol. 30, no. 8, pp. 085002. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/30/8/085002>
 24. Himmelblau D.M. *Applied Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, 1972, 498 p.
 25. Mottl J., Mottlova L. The simultaneous solution of the inverse problem of gravimetry and magnetism by means of non-linear programming. *Geophysical Journal International*, 1984, vol. 76, no. 3, pp. 563–579. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.1984.tb01910.x>

Авторы

Сизиков Валерий Сергеевич — доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 6603236516](https://orcid.org/0000-0002-4618-8753), <https://orcid.org/0000-0002-4618-8753>, sizikov2000@mail.ru

Кармановский Николай Сергеевич — кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 57192385103](https://orcid.org/0000-0002-0533-9893), <https://orcid.org/0000-0002-0533-9893>, karmanov50@mail.ru

Рущенко Нина Геннадиевна — кандидат технических наук, старший преподаватель, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 57211288227](https://orcid.org/0000-0003-1230-5410), <https://orcid.org/0000-0003-1230-5410>, rushchenko@mail.ru

Белозубов Александр Владимирович — кандидат технических наук, старший преподаватель, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 57211288227](https://orcid.org/0000-0002-7594-5020), <https://orcid.org/0000-0002-7594-5020>, belozubov@itmo.ru

Authors

Valery S. Sizikov — D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 6603236516](https://orcid.org/0000-0002-4618-8753), <https://orcid.org/0000-0002-4618-8753>, sizikov2000@mail.ru

Nikolay S. Karmanovskiy — PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 57192385103](https://orcid.org/0000-0002-0533-9893), <https://orcid.org/0000-0002-0533-9893>, karmanov50@mail.ru

Nina G. Rushchenko — PhD, Senior Lecturer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 57211288227](https://orcid.org/0000-0003-1230-5410), <https://orcid.org/0000-0003-1230-5410>, rushchenko@mail.ru

Alexander V. Belozubov — PhD, Senior Lecturer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 57211288227](https://orcid.org/0000-0002-7594-5020), <https://orcid.org/0000-0002-7594-5020>, belozubov@itmo.ru

Статья поступила в редакцию 26.11.2025
Одобрена после рецензирования 09.01.2026
Принята к печати 17.03.2026

Received 26.11.2025
Approved after reviewing 09.01.2026
Accepted 17.03.2026



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»