УДК 681.5.01

СТРУКТУРА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦ СОСТОЯНИЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ КАК ВЫРОЖДАЮЩИЙ ФАКТОР[1]

Н.А. Дударенко, А.В. Ушаков

Рассматривается задача системного вырождения динамических многоканальных систем, порождаемого структурой собственных векторов матриц состояния. Задача решается применительно к ситуациям контроля управляемости, его идентифицируемости и оценке качества по норме вектора состояния.

Ключевые слова: многоканальные системы, управляемость, вырождение, идентифицируемость.

Введение. Постановка задачи

Парадигма физического вырождения в ее системной интерпретации предполагает существование матрицы, которая характеризуется близостью к математическому вырождению. Если физическое вырождение некоторой системы или процесса хорошо коррелирует с математическим вырождением некоторой матрицы, то правомерно назвать эту матрицу критериальной. Термин «критериальная матрица» авторы позаимствовали из работ [1–3]. Известно [4–7], что развитие инструментария контроля вырождения критериальных матриц идет по пути «контроль изменения ранга этой матрицы – контроль изменения числа обусловленности матрицы – контроль изменения спектра функционалов вырождения этой матрицы». Каждый из перечисленных инструментов решает свою задачу, характеризуется различным уровнем функциональной связи используемого критерия вырождения с параметрами критериальной матрицы, вычислительным удобством и степенью полноты описания такого явления как вырождение. Авторы в своих исследованиях [6–11] затронули проблемы, связанные с аппаратом функционалов вырождения, которые представляют собой отношение i -го сингулярного числа критериальной матрицы системы к ее максимальному сингулярному числу. Возможности данного аппарата описаны в работах авторов [6, 7].

Основные усилия современной теории управления в задачах конструирования объектов управления и их идентификации в основном тратятся пока на формирование структуры собственных значений матриц состояния, в то время как потеря контроля над структурой собственных векторов может привести к неожиданным системным эффектам, одним из которых является вырождение. Важно повысить внимание разработчиков и исследователей к структуре собственных векторов с тем, чтобы их конкретная реализация не приводила к вырожденным системным ситуациям. В работе приводятся решения как в классе дискретных, так и непрерывных систем.

Структура собственных векторов матрицы состояния объекта и проблема управляемости

Проблему управляемости применительно к структуре собственных векторов матрицы состояния объекта будем решать для случая дискретного объекта, имеющего векторно-матричного описание процессов по вектору состояния в форме

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение №14.B37.21.0406)

$$\mathbf{x}(k+1)=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k)+\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k)\ ;\ \mathbf{x}(0)\ , \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ – вектора состояния и управления соответственно, $\mathbf{x}\in R^n$, $\mathbf{u}\in R^r$; $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ – матрицы состояния и управления соответственно, такие, что $\bar{\mathbf{A}}\in R^{n\times n}$, $\bar{\mathbf{B}}\in R^{n\times r}$; k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности Δt, так что описание (1.1) оказывается справедливым для точек $t=k\Delta t$ непрерывного времени t.

Сделаем следующие системные предположения:

1. $rang\bar{\mathbf{A}}=n$,

2. $r=\arg\{1\le r\le n\}$, $rang\bar{\mathbf{B}}=\arg\{1\le rang\bar{\mathbf{B}}\le r\}$. (1.2)

Введем следующее определение.

Определение 1.1. Матрицей управляемости индекса v объекта управления (1.1) будем называть матрицу, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\bar{\mathbf{W}}_{yv}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} & \dots & \bar{\mathbf{A}}^{v-1}\bar{\mathbf{B}}\end{bmatrix},\ \dim(\bar{\mathbf{W}}_{yv}=n\times vn)\ .$$

Примечание 1.1. Очевидно, что:

1. $v=n$ в случае, когда $r=1$;

2. $v=1$ в случае, когда $r=n$.

Таким образом, v удовлетворяет неравенству $1\le v\le n$.

Определение 1.2. Объект (1.1) с парой матриц ($\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$) обладает управляемостью индекса v, если выполняется условие

$$rang\bar{\mathbf{W}}_{yv}=n=\dim(\mathbf{x})\ . \qquad (1.3)$$

Примечание 1.2. Если условие (1.3) выполняется при $v=n$, то матрица управляемости с индексом n не сопровождается этим индексом, и выполняется соотношение

$$\bar{\mathbf{W}}_{yv|v=n}=\bar{\mathbf{W}}_{y}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} & \dots & \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}\end{bmatrix}. \qquad (1.4)$$

Рассмотрим структуру собственных векторов матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ на предмет принадлежности столбцов матрицы $\bar{\mathbf{B}}$ линейным оболочкам, натянутым на собственные векторы матрицы $\bar{\mathbf{A}}$. В связи с этим сформулируем следующие утверждения.

Утверждение 1.1. Пусть $r=1$, а матрица $\bar{\mathbf{B}}$ есть собственный вектор матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, тогда становятся справедливыми следующие положения:

1. $rang\bar{\mathbf{W}}_{y}=1$.

2. Пара матриц ($\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$) оказывается не полностью управляемой, при этом подпространство управляемости совпадает с линейной оболочкой, натянутой на матрицу $\bar{\mathbf{B}}$.

Доказательство. В соответствие с определением собственного вектора матрицы, если $\bar{\mathbf{B}}$ есть собственный вектор матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, то существует такое $\bar{\lambda}:\det(\bar{\lambda}\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})=0$, что

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\lambda}\bar{\mathbf{B}}\ . \qquad (1.5)$$

Соотношение (1.5) порождает следующую систему равенств:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\bar{\lambda}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\lambda}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\lambda}^2\bar{\mathbf{B}}\\
&\bar{\mathbf{A}}^3\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\bar{\lambda}^2\bar{\mathbf{B}}=\bar{\lambda}^2\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\lambda}^3\bar{\mathbf{B}}\\
&\vdots\\
&\bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\bar{\lambda}^{n-2}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\lambda}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}.
\end{aligned}\right. \qquad (1.6)$$

Подстановка (1.6) в выражение (1.4) дает

$$\bar{\mathbf{W}}_{y}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\lambda}\bar{\mathbf{B}} & \dots & \bar{\lambda}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}\end{bmatrix}. \qquad (1.7)$$

Таким образом, $rang\bar{\mathbf{W}}_{y}=rang\bar{\mathbf{B}}=1$, и подпространство управляемости совпало с линейной оболочкой, натянутой на собственный вектор.

Примечание 1.3. $n\times n$– матрица управляемости (1.7), обладая рангом $rang\bar{\mathbf{W}}_{y}=1$, оказалась вырожденной, она характеризуется бесконечным значением числа обусловленности и только одним ненулевым функционалом вырождения.

Утверждение 1.2. Пусть $rang\bar{\mathbf{B}}=r<n$, при этом столбцы матрицы $\bar{\mathbf{B}}_j$, $j=\overline{1,r}$ есть собственные вектора матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, тогда становятся справедливыми следующие положения:

1. $rang\bar{\mathbf{W}}_{y}=r<n$.

2. Пара матриц ($\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$) оказывается не полностью управляемой, при этом подпространство управляемости совпадает с линейной оболочкой, натянутой на столбцы матрицы $\bar{\mathbf{B}}$.

Доказательство. Доказательство сформулированного утверждения опирается на доказательство утверждения 1.1, в соответствии с которым и положениями рассматриваемого случая матрица управляемости (1.4) по аналогии с (1.7) принимает вид

$$\bar{\mathbf{W}}_y = \left[\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}\right] = row\left\{\left[\bar{\lambda}_1^i\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \bar{\lambda}_2^i\bar{\mathbf{B}}_2 \quad \dots \quad \bar{\lambda}_j^i\bar{\mathbf{B}}_j \quad \dots \quad \bar{\lambda}_r^i\bar{\mathbf{B}}_r\right], i=\overline{0,n-1}\right\} \qquad (1.8)$$

Примечание 1.4. $n\times n$ – матрица управляемости (1.8), обладая рангом $rang\bar{\mathbf{W}}_y = r < n$, оказалась вырожденной, она характеризуется бесконечным значением числа обусловленности и r ненулевыми функционалами вырождения.

Ситуация коренным образом меняется, когда ранг матрицы управления $\bar{\mathbf{B}}$ удовлетворяет условию $rang(\bar{\mathbf{B}}) = r = n$, при этом все столбцы его являются собственными векторами матрицы $\bar{\mathbf{A}}$. В этом случае становится справедливым утверждение 1.3, которое приводится без доказательства.

Утверждение 1.3. Пусть $rang\bar{\mathbf{B}} = n$, при этом столбцы матрицы $\bar{\mathbf{B}}_j, j=\overline{1,n}$ суть собственные вектора матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, тогда становятся справедливыми следующие положения:

1. $\bar{\mathbf{W}}_y = \left[\bar{\mathbf{B}}\right]$. (1.9)

2. $rang\bar{\mathbf{W}}_y = n$.

3. Пара матриц ($\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$) оказывается полностью управляемой, при этом подпространство управляемости, совпадая с линейной оболочкой, натянутой на столбцы матрицы $\bar{\mathbf{B}}$, совпадает с пространством состояния объекта.

Примечание 1.5. $n\times n$ – матрица управляемости (1.9), обладая рангом $rang\bar{\mathbf{W}}_y = n$, оказалась невырожденной, она характеризуется n ненулевыми функционалами вырождения.

Нетрудно видеть, что ключевым моментом в исследовании влияния фактора структуры собственных векторов матрицы состояния объекта $\bar{\mathbf{A}}$ на его управляемость являются положения утверждения 1.1. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 1.1. Покажем, что дискретный объект (1.1) с матрицами $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & 1 \end{bmatrix}$; $\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ может быть переведен в состояние $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, а $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ – нет.

Нетрудно видеть, что матрица $\bar{\mathbf{B}}$ есть собственный вектор матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 0{,}2$. Действительно,

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}12 \end{bmatrix} = 0{,}2\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Как следствие, матрица управляемости $\bar{\mathbf{W}}_y = \left[\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 0{,}6 = 3\cdot 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}12 = 0{,}6\cdot 0{,}2 \end{bmatrix}$. Таким образом, подпространство управляемости есть линейная оболочка $L\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}\right\}$, натянутая на собственный вектор $\bar{\xi}_1 = \bar{\mathbf{B}}$. Нетрудно видеть, что вектор $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ принадлежит линейной оболочке $L\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}\right\}$. Действительно, вектор $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}\cdot\frac{5}{3}$.

Воспользуемся теперь рекуррентной процедурой (1.1) для вычисления управления $\mathbf{u}(k)$, переводящего объект из состояния $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ в состояние $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. В силу рекуррентной процедуры оказывается справедливым соотношение

$$\mathbf{x}(1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(0) + \bar{\mathbf{B}}u(0) = \bar{\mathbf{B}}u(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}u(0).$$

Нетрудно видеть, что при любом $u(0)$ вектор $\mathbf{x}(1)$ будет принадлежать векторной оболочке $L\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}\right\}$, которой принадлежит и вектор $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, что позволяет приравнять его к вектору $\mathbf{x}(1)$.

Соотношение $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0,6\end{bmatrix}u(0)$ выполняется при $u(0)=\frac{5}{3}$. Таким образом, объект может быть переведен из нулевого состояния в состояние $\mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$ за один такт управлением $u(0)=\frac{5}{3}$.

Рассмотрим теперь возможность перевода объекта управления из состояния $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ в состояние $\mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\notin L\left\{\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3\\0,6\end{bmatrix}\right\}$. Для вычисления управления, которое должно осуществлять этот перевод, воспользуемся рекуррентной процедурой (1.1), тогда получим

$$\mathbf{x}(1)=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(0)+\bar{\mathbf{B}}u(0)=\bar{\mathbf{B}}u(0)=\begin{bmatrix}3\\0,6\end{bmatrix}u(0).$$

Нетрудно видеть, что не существует такое $u(0)$, которое бы удовлетворяло условию $u(0)=\arg\left\{\begin{bmatrix}3\\0,6\end{bmatrix}u(0)=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right\}$. За один такт перевод из состояния $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ в состояние $\mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$ невозможен.

Перейдем в рекуррентной процедуре (1.1) ко второму такту, тогда получим

$$\mathbf{x}(2)=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(1)+\bar{\mathbf{B}}u(1)=\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}u(0)+\bar{\mathbf{B}}u(1)=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{B}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,6 & 3\\0,12 & 0,6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}.$$

Из полученного выражения следует, что не существует такое $\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}$, которое бы удовлетворяло условию $\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}=\arg\left\{\begin{bmatrix}0,6 & 3\\0,12 & 0,6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right\}$ в силу необратимости матрицы управляемости $\begin{bmatrix}0,6 & 3\\0,12 & 0,6\end{bmatrix}$, которая является матрицей управляемости исходного объекта.

Объект оказался вырожденным с подпространством управляемости в виде линейной оболочки $L\left\{\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3\\0,6\end{bmatrix}\right\}$.

Примечание 1.6. В силу того, что матричные компоненты непрерывного и дискретного объектов связаны преобразованием вида «матричная функция от матрицы», относительно которого структура собственных векторов матрицы состояния является инвариантной, полученные результаты в полной мере переносимы на случай непрерывных объектов, так что для непрерывного объекта с парой матриц $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ матрица управляемости принимает вид (1.4) с точностью до замены матриц $(\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}})$ на $(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Структура собственных векторов матрицы состояния системы и проблема качества сходящихся процессов

Проблему, вынесенную в заголовок раздела, будем решать для случая многоканальной непрерывной системы. Для исследования влияния структуры собственных векторов матрицы состояния системы на качество сходящихся процессов свободного движения рассмотрим замкнутую многоканальную непрерывную систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x}(0), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{F}\in R^{n\times n}$ – гурвицева матрица системы. Свободная составляющая системы (2.1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0). \tag{2.2}$$

Переход в (2.2) к согласованным матричным и векторным нормам позволяет записать:

$$\|\mathbf{x}(t)\|=\|e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0)\|\le\|e^{\mathbf{F}t}\|\|\mathbf{x}(0)\|. \tag{2.3}$$

Для дальнейших исследований воспользуемся условием преобразования подобия матриц [11] и представим матрицу $\mathbf{F}$ посредством диагональной $n\times n$ – матрицы Λ на основе соотношения

$$\mathbf{F}=\mathbf{M}\Lambda\mathbf{M}^{-1}. \tag{2.4}$$

С учетом соотношения (2.4) и свойства матричной функции от матрицы [11] компонент $e^{\mathbf{F}t}$ неравенства (2.3) может быть представлен в виде

$$\left\| e^{\mathbf{F}t} \right\| = \left\| \mathbf{M} e^{\Lambda t} \mathbf{M}^{-1} \right\| \le \left\| \mathbf{M} \right\| \left\| e^{\Lambda t} \right\| \left\| \mathbf{M}^{-1} \right\| \le \left\| \mathbf{M} \right\| \left\| \mathbf{M}^{-1} \right\| \left\| e^{\Lambda t} \right\|. \quad (2.5)$$

Согласно определению [5], число обусловленности $C\{*\}$ матрицы (*) задается соотношением

$C\{*\} \stackrel{\Delta}{=} \|(*)\| \|(*)^{-1}\|$.

Тогда соотношение (2.5) может быть представлено в форме

$$\left\| e^{\mathbf{F}t} \right\| \le C\{\mathbf{M}\} \left\| e^{\Lambda t} \right\| = C\{\mathbf{M}\} \left\| e^{\Lambda t} = diag\left\{ e^{\lambda_i t}, i = \overline{1,n} \right\} \right\| = C\{\mathbf{M}\} e^{\lambda_M t}, \quad (2.6)$$

где λ_M – собственное значение матрицы $\mathbf{F}$ с отрицательной вещественной частью, максимально приближенное к началу координат комплексной плоскости. Подстановка (2.6) в (2.3) позволяет записать:

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \left\| e^{\mathbf{F}t} \mathbf{x}(0) \right\| \le C\{\mathbf{M}\} e^{\lambda_M t} \|\mathbf{x}(0)\|. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (2.7) представляет собой экспоненциальное покрытие свободного движения системы по вектору состояния, представленного его нормой. Таким образом, оценка качества сходящихся процессов в системе при фиксированной структуре собственных значений может быть получена с помощью числа $C\{\mathbf{M}\}$ обусловленности матрицы $\mathbf{M}$ приведения подобия или ее глобального функционала $J_G = J_G\{\mathbf{M}\}$ вырождения [6, 7], связанных соотношением $J_G\{\mathbf{M}\} = C^{-1}\{\mathbf{M}\}$, при этом следует иметь в виду, что число обусловленности произвольной матрицы (*) в силу его свойств удовлетворяет неравенству

$$1 \le C\{\mathbf{M}\} \le \infty. \quad (2.8)$$

Известно [11], что матрица $\mathbf{M}$ преобразования подобия (2.4) имеет своими столбцами собственные вектора диагонализируемой матрицы $\mathbf{F}$. Следовательно, качество процессов в системе напрямую связано со структурой собственных векторов матрицы состояния этой системы: в силу (2.8), если собственные вектора близки к коллинеарности, то в апериодической системе, т.е. системе с вещественными некратными собственными значениями ее матрицы состояния, возможны выбросы движения по норме ее вектора состояния, достигающей сколь угодно больших значений.

Пример 2.1. Рассмотрим две системы вида (2.1) с подобными матрицами состояния $\mathbf{F}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$, имеющие одинаковый спектр собственных значений: $\sigma\{\mathbf{F}\} = \{\lambda = \arg\{\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}) = 0\} : \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -9\}$ и $\tilde{\sigma}\{\tilde{\mathbf{F}}\} = \{\tilde{\lambda} = \arg\{\det(\tilde{\lambda}\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{F}}) = 0\} : \tilde{\lambda}_1 = -2, \tilde{\lambda}_2 = -9\}$. Матрицы $\mathbf{F}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$, характеризуются соответственно спектрами собственных векторов

$$\left\{ \xi_i = \arg\left\{ \mathbf{F}\xi_i = \lambda_i \xi_i : \xi_1 = [0,707 \quad 0,707]^T, \xi_2 = [-0,707 \quad 0,707]^T \right\} \right\},$$

$$\left\{ \tilde{\xi}_i = \arg\left\{ \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\xi}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{\xi}_i : \tilde{\xi}_1 = [1 \quad 0]^T, \tilde{\xi}_2 = [-1 \quad 0,05]^T \right\} \right\}.$$

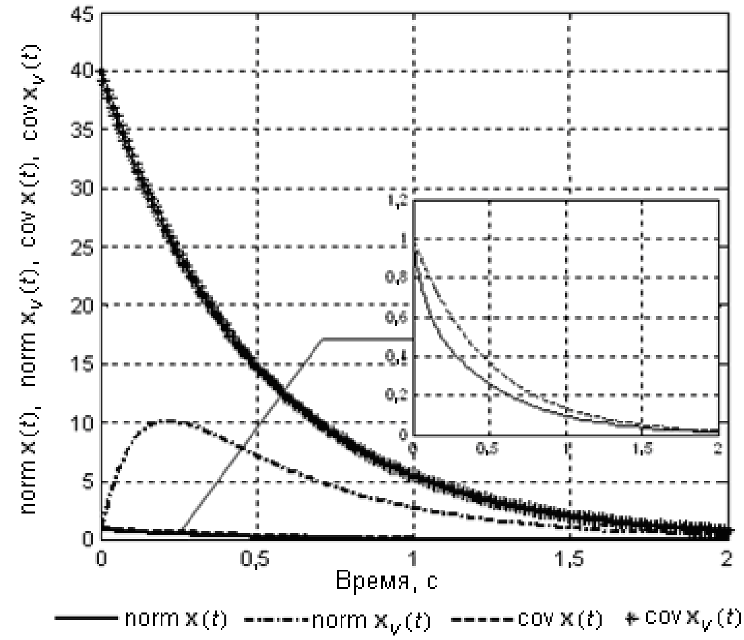

Рисунок. Кривые процессов по нормам $\|\mathbf{x}(t)\|$ и $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ при $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(0) = [0 \quad 1]^T$ и их экспоненциальные покрытия

Нетрудно видеть, что матрицы диагонализации $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$, приводящие $\mathbf{F}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$ к диагональному виду $\mathbf{\Lambda} = diag\{-2;-9\}$, сконструированные на спектре собственных векторов, принимают вид $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 \\ 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$; $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}$. Также вычислим матрицы $\mathbf{F}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$ согласно (2.4): $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -5,5 & 3,5 \\ 3,5 & -5,5 \end{bmatrix}$; $\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -2 & 140 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$. Матрицы $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ характеризуются соответственно числами обусловленности $C\{\mathbf{M}\} = 1$; $C\{\tilde{\mathbf{M}}\} = 40,025$. В силу (2.7) экспоненциальные покрытия процессов по норме вектора состояния в системе с матрицей $\mathbf{F}$ и матрицей $\tilde{\mathbf{F}}$ будут существенно различаться. Проиллюстрируем это прямым вычислением норм $\|\mathbf{x}(t)\|$ и $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ в силу соотношений $\|\mathbf{x}(t)\| = \|e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0)\|$ и $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \|e^{\tilde{\mathbf{F}}t}\tilde{\mathbf{x}}(0)\|$ соответственно, положив в них $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, и их экспоненциальных покрытий вида (2.7). Графики полученных процессов (рисунок) наглядно иллюстрируют тот факт, что отсутствие контроля за назначением структуры собственных векторов может приблизить систему к вырождению.

Структура собственных векторов матрицы состояния объекта и проблема идентифицируемости

Проблему идентифицируемости объекта управления будем решать, пользуясь определением идентифицируемого объекта [12].

Определение 3.1. Объект

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t);\ \mathbf{x}(0) \tag{3.1}$$

называется идентифицируемым, если по измерениям координат состояния объекта можно определить матрицу системы $\mathbf{A}$.

Свяжем задачу идентификации объекта (3.1) с удачностью назначения ненулевого начального состояния $\mathbf{x}(0)$ с учетом структуры собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$. Прежде чем решать данную задачу, воспользуемся определением П. Эйкоффа [12] критерия идентифицируемости объекта (3.1), опирающегося на следующее определение матрицы идентифицируемости объекта.

Определение 3.2. Матрицей идентифицируемости $\mathbf{W}_{\mathrm{I}}$ объекта, построенной на паре $\{\mathbf{A}, \mathbf{x}(0)\}$, называется матрица, сформированная в соответствии с правилом

$$\mathbf{W}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) & \mathbf{A}\mathbf{x}(0) & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{bmatrix}.$$

Тогда можно сформулировать критерий идентифицируемости [12] с использованием матрицы идентифицируемости.

Определение 3.3. Критерием идентифицируемости объекта (3.1), состоящей в определении матрицы $\mathbf{A}$, по измерениям его координат, является выполнение условия

$$rang\mathbf{W}_{\mathrm{I}} = rang\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) & \mathbf{A}\mathbf{x}(0) & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{bmatrix}\right\} = n = \dim \mathbf{x}\,. \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что выражение (3.2) совпадает с выражением (1.4) для матрицы управляемости линейного объекта с точностью до замены матрицы $\bar{\mathbf{B}}$ на $\mathbf{x}(0)$, матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ – на $\mathbf{A}$. Очевидно, что все требования к матрице $\bar{\mathbf{B}}$, сформулированные в предыдущем разделе, как функции геометрического спектра собственных векторов матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ переносятся на вектор $\mathbf{x}(0)$, чтобы гарантировать невырожденность матрицы идентифицируемости. Таким образом, задача идентификации получает корректное решение в случае, если вектор $\mathbf{x}(0)$ имеет представление $\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\xi}_i$, где все $\alpha_i \neq 0$, $\boldsymbol{\xi}_i$ – собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$. При таком начальном состоянии возбуждаются все моды ($\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \lambda_i = \arg(\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, i = \overline{1,n})$ объекта, и задача идентификации получает корректное решение. При наличии хотя бы одного $\alpha_i = 0$ условие (3.2) не выполняется, матрица идентифицируемости оказывается вырожденной, при таком начальном состоянии возбуждаются не все моды объекта, а задача идентификации не получает полного решения.

Заключение

Проведенные авторами исследования показывают, что структура собственных векторов должна быть подробно исследована разработчиками системы при ее проектировании. Анализ структуры собственных векторов позволяет уже на этапе проектирования системы выявить такие сочетания ее параметров, которые могут привести к вырожденным системным ситуациям.

Литература

1. Sheng-Guo Wang. Robust Schur Stability and Eigenvectors of Uncertain Matrices // Proceedings of the American Control Conference. – 1997. – V. 5. – P. 3449–3454.
2. Baarda W. S-transformations and criterion matrices // Netherlands geodetic commission, 1981. – V. 5. – № 1. – 168 p.
3. Годованный П.А. Моделирование процессов нарушения проводимой политики безопасности в РВС // Сборник научных трудов НГТУ. – 2003. – № 4 (34). – С. 13–18.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
5. Wilkinson J.H. The algebraic eigenvalue problem. – Oxford: Clarendon Press, 1965. – 570 p.
6. Дударенко Н., Ушаков А. Анализ многомерных динамических систем: технология контроля вырождения. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 232 c.
7. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Вырождение сложных дискретных динамических систем: проблема контроля с помощью частотных чисел обусловленности // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2004. – № 14. – С. 62–66.
8. Дударенко Н.А., Ушаков А.В., Полякова М.В. Алгебраическая организация условий обобщенной синхронизируемости многоагрегатных динамических объектов // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 2 (66). – С. 30–36.
9. Дударенко Н.А., Ушаков А.В., Полякова М.В. Формирование интервальных векторно-матричных модельных представлений антропокомпонентов-операторов в составе сложных динамических систем // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 6 (70). – С. 32–36.
10. Дударенко Н.А., Бирюков Д.С., Ушаков А.В., Полякова М.В., Акунов Т.А. Формирование спектра сингулярных чисел квадратной матрицы простой структуры // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 6 (76). – С. 53–58.
11. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учебное пособие / Под ред. А.В. Ушакова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 325 с.
12. Эйкофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 683 с.

Дударенко Наталия Александровна – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, dudarenko@yandex.ru

Ушаков Анатолий Владимирович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, Ushakov-AVG@yandex.ru