

УДК 629.1

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА СПРЯМЛЕННЫХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ СГЛАЖИВАНИЯ

А.В. Лопарев, О.А. Степанов, О.М. Яшникова

Предлагается обобщение приближенного метода спрямленных логарифмических характеристик в случае решения стационарных задач сглаживания.

Ключевые слова: фильтрация, сглаживание, метод логарифмических характеристик, стационарные процессы.

При решении задач обработки измерительной информации широкое применение получили алгоритмы, разрабатываемые в рамках калмановского подхода. Вместе с тем для задач обработки стационарных сигналов сохраняет свою актуальность винеровский подход. Суть подхода заключается в нахождении передаточной (или весовой) функции оптимального фильтра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку оценивания в установившемся режиме. Одно из достоинств винеровского подхода заключается в том, что для построения алгоритмов разработаны различные упрощенные методы. В частности, применительно к навигационным приложениям наибольшее применение получил так называемый метод спрямленных логарифмических характеристик [1, 2]. В работе предлагается обобщение этого метода для решения задач сглаживания.

Рассмотрим классическую задачу оптимального оценивания полезного сигнала на фоне случайных ошибок измерений. Пусть скалярные измерения

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

представляют собой аддитивную смесь полезного сигнала $x(t)$ и помехи $n(t)$, которые полагаются центрированными, некоррелированными и стационарными процессами с заданными спектральными плотностями $S_x(\omega)$, $S_n(\omega)$. Рассмотрим задачу сглаживания, особенность которой заключается в том, что при получении оценки в текущий момент времени могут быть использованы не только прошлые, как в случае задачи фильтрации, но и будущие (по отношению к этому моменту времени) измерения. В этом случае выражение для передаточной функции оптимального сглаживающего фильтра будет определяться как [1]

$$W_0^s(j\omega) = \frac{S_x(\omega)}{S_x(\omega) + S_n(\omega)}, \tag{1}$$

а для спектральной плотности ошибки оптимальной нереализуемой оценки и ее дисперсии будут в этой ситуации справедливы следующие выражения:

$$S_e(j\omega) = \frac{S_x(\omega)S_n(\omega)}{S_x(\omega) + S_n(\omega)}, \quad D_0^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)S_n(\omega)}{S_x(\omega) + S_n(\omega)} d\omega. \tag{2}$$

Метод спрямленных логарифмических характеристик основан на предположении о том, что свойства фильтра определяются характером поведения спектральных плотностей полезного сигнала и помехи в точке их пересечения. Для приближенного их описания в логарифмическом масштабе используются аппроксимирующие прямые, соответствующие так называемым условным спектральным плотностям для

полезного сигнала $x(t)$ и помехи $n(t)$, определяемым в виде $S_x(\omega) \approx a^2 \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^{2p}$, $S_n(\omega) \approx a^2 \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^{2q}$. Используя

аналогичный подход к задачам сглаживания, нетрудно получить общие решения для различных комбинаций простейших аппроксимаций спектральных плотностей сигнала и помехи. В таблице приведены выражения для параметров C_{if} и C_{is} , характеризующих дисперсии установившихся ошибок фильтрации

(σ^f)² = $C_{if}a^2\rho$ и сглаживания (σ^s)² = $C_{is}a^2\rho$, и величина, позволяющая оценить потенциальный выигрыш в точности в виде отношения среднеквадратических ошибок оценивания при решении задач фильтрации и сглаживания $\sigma^f/\sigma^s = \sqrt{C_{if}/C_{is}}$.

$S_x(\omega)$	$S_n(\omega)$	C_{if}	C_{is}	$\sqrt{C_{if}/C_{is}}$
$a^2 \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^{2n}$	a^2	$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}$	$\frac{1}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}$	$\sqrt{2n}$
$a^2 \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^{2n-2}$	$a^2 \left(\frac{\omega}{\rho}\right)^2$	$\frac{\text{ctg}^2 \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{3\pi}{2n}}$	$\frac{1}{2n \sin \frac{3\pi}{2n}}$	$\sqrt{2n \text{ctg}^2 \frac{\pi}{2n}}$
$a^2 \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^{2n-4}$	$a^2 \left(\frac{\omega}{\rho}\right)^4$	$\frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{4 \sin^4 \frac{\pi}{2n} \sin \frac{5\pi}{2n}}$	$\frac{1}{2n \sin \frac{5\pi}{2n}}$	$\sqrt{\frac{n \cos^2 \frac{\pi}{n}}{2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}}$
$a^2 \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^{2n-6}$	$a^2 \left(\frac{\omega}{\rho}\right)^6$	$\frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} \text{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n}}{4 \sin^4 \frac{\pi}{2n} \sin \frac{7\pi}{2n}}$	$\frac{1}{2n \sin \frac{7\pi}{2n}}$	$\sqrt{\frac{n \cos^2 \frac{\pi}{n} \text{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n}}{2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}}$

Таблица. Показатели точности фильтрации и сглаживания в установившемся режиме

Проиллюстрируем, как получить представленные в таблице выражения для спектральных плотностей полезного сигнала и помехи, определяемых как

$$S_x(\omega) \approx a^2 \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^4, S_n(\omega) \approx a^2, \tag{3}$$

что соответствует первой строке таблицы при $n = 2$. Подставляя (3) в выражения (1) и (2) нетрудно убедиться, что выражения для передаточной функции оптимального сглаживающего фильтра, спектральной плотности ошибки оптимальной нереализуемой оценки и ее дисперсии примут следующий вид:

$$W_0^s(\omega) = \frac{\rho^4}{\omega^4 + \rho^4}, S_e^s(\omega) = \frac{a^2 \rho^4}{\omega^4 + \rho^4}, W_0^s(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2}} a^2 \rho.$$

В этом случае среднеквадратическая ошибка оценивания для задачи сглаживания в два раза меньше ошибки фильтрации $\sqrt{C_{if}/C_{is}} = \sqrt{2n} = 2$. Таким образом, в тех случаях, когда нахождение оценки в реальном времени не является обязательным условием, целесообразно вместо задачи фильтрации решать задачу сглаживания.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ по проекту 12-08-00835-а.

1. Челпанов И.Б., Несенюк Л.П., Брагинский М.В. Расчет характеристик навигационных гироскопов. – Л.: Судостроение, 1978. – 264 с.
2. Лопарев А.В., Степанов О.А., Челпанов И.Б. Использование частотного подхода при синтезе нестационарных алгоритмов обработки навигационной информации // Гироскопия и навигация. – 2011. – № 3. – С. 115–132.

Лопарев Алексей Валерьевич – ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», кандидат технических наук, доцент, начальник сектора, loparev@mail15.com

Степанов Олег Андреевич – ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», доктор технических наук, начальник научно-образовательного центра, soalax@mail.ru

Яшикова Ольга Михайловна – ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», аспирант, olga_evstifeeva@mail.ru