

УДК 535.14

## УСЛОВНОЕ КОНТРОЛИРУЕМОЕ ФАЗОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Г.П. Мирошниченко, А.И. Трифанов

Предложена модель трехкубитовой квантовой логической операции условного контролируемого фазового преобразования. Квантовая единица информации – кубит – закодирована в состоянии поляризации квантовой резонаторной моды. Получен условный полевой оператор эволюции трех квантовых мод, показано, что при некоторых параметрах системы и временах взаимодействия он с высокой вероятностью осуществляет требуемое фазовое преобразование.

**Ключевые слова:** квантовые вычисления, логический гейт, условный оператор, фазовое преобразование, однофотонные состояния.

### Введение

Квантовые информационные технологии [1–3], опираясь на современное представление о физике микромира, позволяют передавать, хранить и обрабатывать информацию более эффективно, чем в системах, построенных на классических принципах. В отличие от классического бита, квантовая единица информации – кубит – может находиться в суперпозиции состояний «0» и «1». Благодаря этому имеется возможность осуществлять преобразование состояний большого числа кубитов одновременно (так называемый квантовый параллелизм) [4]. Еще одним важным свойством, которым обладают кубиты, является перепутывание [5]. Оно заключается в том, что в результате взаимодействия двух квантовых подсистем между ними возникают корреляции, которые сохраняются после прекращения этого взаимодействия. Все перечисленное широко используется в различных квантовых алгоритмах [6] и протоколах [7]. Преобразование состояний кубитов и их систем осуществляют квантовые логические устройства (вентили, гейты) [8]. Особый интерес вызывают те из них, которые позволяют образовывать логической базис квантовых вычислений [9]. К ним относятся двухкубитовый вентиль Фредкина (CNOT – контролируемое НЕ) и трехкубитовый вентиль Тоффоли (CCNOT – дважды контролируемое НЕ). В основе оптической реализации этих устройств лежит операция контролируемого преобразования фазы (КПФ) [10]. КПФ – это квантовая операция, в результате которой каждая компонента многокубитового состояния приобретает фазовый множитель, зависящий от состояний отдельных кубитов компоненты. Реализация этой операции – нетривиальная задача. Попытки ее решения можно найти, например, в [11, 12].

Настоящая работа посвящена оптической реализации вероятностной операции КПФ трехкубитового состояния. Каждый кубит (обозначим их  $a, b$  и  $c$ ) кодируется фокковским состоянием  $|\sigma_j\rangle$ ,  $\sigma_j \in \{0,1\}$ ,  $j \in \{a,b,c\}$  однофотонной моды резонатора. Операция КПФ действует следующим образом:

$$|\sigma_a\rangle|\sigma_b\rangle|\sigma_c\rangle \rightarrow \exp(i\pi\delta_{\sigma_a,1}\delta_{\sigma_b,1}\delta_{\sigma_c,1})|\sigma_a\rangle|\sigma_b\rangle|\sigma_c\rangle. \quad (1)$$

Реализация (1) осуществляется за счет взаимодействия резонаторных мод с атомом, пролетающим через резонатор. После взаимодействия над атомом проводится измерение, результаты которого можно использовать для получения условного оператора эволюции электромагнитных полей. В работе предложены параметры оптической системы и оценено время взаимодействия атома с модами резонатора, при которых этот оператор осуществляет преобразование (1). Вычислены вероятность и качество (fidelity) преобразования КПФ.

### Оператор Гамильтона системы

Система, в которой реализуется операция КПФ, состоит из источника атомов, находящихся в некотором состоянии  $\psi_A$ , оптического резонатора с тремя возбужденными модами квантового поля и тремя классическими полями, а также детектора атомных состояний. Число фотонов в каждой квантовой моде может быть 0 или 1. На рис. 1 изображена система уровней атома, помещенного в резонатор с действующими электромагнитными полями. Будем считать, что переходы  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ,  $|3\rangle \rightarrow |4\rangle$  и  $|3\rangle \rightarrow |6\rangle$  разрешены для квантовых полей с состояниями поляризации  $|1_a\rangle$ ,  $|1_b\rangle$ ,  $|1_c\rangle$  и частотами  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и  $\omega_c$ . На переходах  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ ,  $|4\rangle \rightarrow |5\rangle$ ,  $|6\rangle \rightarrow |7\rangle$  действуют классические поля с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Оператор Гамильтона рассматриваемой системы можно записать так:

$$H = H_A + H_F + V_c + V_q. \quad (2)$$

Здесь  $H_A, H_F$  – атомный и полевой гамильтонианы в отсутствии взаимодействия:

$$H_A = \sum_{k=1}^7 E_k \sigma_{kk}, \quad H_F = \sum_{m \in \{a,b,c\}} \hbar \omega_m a_m^+ a_m,$$

где  $\sigma_{kk} = |k\rangle\langle k|$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$  – проекторы на подпространства, соответствующие собственным значениям  $H_A$ :  $H_A|k\rangle = E_k|k\rangle$ ;  $a_m^+$  и  $a_m$  – соответственно операторы рождения и уничтожения фотона в моде частоты  $\omega_m$ ,  $m \in \{a, b, c\}$ ;  $V_c$  и  $V_q$  – зависящие от времени операторы взаимодействия атома с классическими и квантовыми полями:

$$V_c = -\hbar(\Omega_1 \sigma_{23} \exp(i\omega_1 t) + \Omega_2 \sigma_{45} \exp(i\omega_2 t) + \Omega_3 \sigma_{67} \exp(i\omega_3 t) + (h.c.)),$$

$$V_q = -g_a \hbar(\sigma_{21} a_a + \sigma_{12} a_a^+) - g_b \hbar(\sigma_{43} a_b + \sigma_{34} a_b^+) - g_c \hbar(\sigma_{65} a_c + \sigma_{56} a_c^+).$$

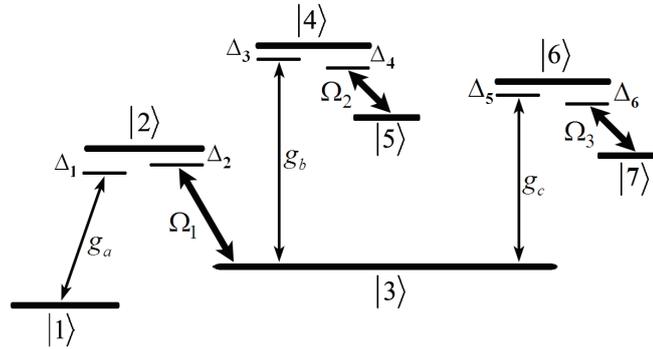


Рис. 1. Схема энергетических уровней атома с действующими квантовыми и классическими электромагнитными полями

Здесь  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  – частоты Раби классических полей,  $g_k$  – константы связи для квантовых полей. Запишем уравнение Шредингера с гамильтонианом (2):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle = (H_A + H_F + V) |\psi(t)\rangle, \quad (3)$$

где  $V = V_c + V_q$ . Используем резонансное приближение. Определим следующие унитарные преобразования:

$$G(t) = \exp(-iRt) = \sum_{k=1}^7 \exp(-i\hbar\alpha_k t) \sigma_{kk}, \quad (4)$$

$$W(t) = \exp(-iQt) = \sum_{m \in \{a,b,c\}} \exp(-i\hbar\beta_m a_m^+ a_m t). \quad (5)$$

Будем искать решение (3) в виде

$$|\psi(t)\rangle = W(t)G(t)|\varphi(t)\rangle. \quad (6)$$

После подстановки (6) в уравнение (3) и дифференцирования получим:

$$\left( H_A - R + H_F - Q + W^+(t) G^+(t) V G(t) W(t) \right) |\varphi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi(t)\rangle. \quad (7)$$

Здесь учтено, что операторы (4) и (5) коммутируют с  $H_0$ . Параметры  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  выберем так, чтобы операторы  $V_c$  и  $V_q$  не содержали колебаний на оптических частотах. В результате получим следующие выражения для операторов в левой части (7):

$$H_A - R = \sum_{k=1}^7 (E_k - \hbar\alpha_k) \sigma_{kk} = \sum_{k=1}^7 \Delta_k \sigma_{kk},$$

$$H_F - Q = \sum_{m \in \{a,b,c\}} \hbar(\omega_m - \beta_m) a_m^+ a_m = \sum_{m \in \{a,b,c\}} \hbar\delta_m a_m^+ a_m.$$

В силу того, что число условий на  $\alpha_k$  и  $\beta_m$  меньше, чем количество этих параметров, часть из них можно выбрать произвольно. Выберем  $\alpha_1 = E_1$  и  $\beta_m = \omega_m$ . Определим однофотонные отстройки  $\varepsilon_j$ ,

$$\varepsilon_1 = E_2 - E_1 - \hbar\omega_a, \varepsilon_3 = E_4 - E_3 - \hbar\omega_b, \varepsilon_5 = E_6 - E_3 - \hbar\omega_c, \\ \varepsilon_2 = E_2 - E_3 - \hbar\omega_1, \varepsilon_4 = E_4 - E_5 - \hbar\omega_2, \varepsilon_6 = E_6 - E_7 - \hbar\omega_3,$$

и многофотонные отстройки  $\Delta_k$ , которые выражаются через однофотонные следующим образом:

$$\Delta_1 = \varepsilon_1, \Delta_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \Delta_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \Delta_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \\ \Delta_5 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_5, \Delta_6 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6.$$

В результате получим стационарный гамильтониан, который будем использовать в дальнейших вычислениях:

$$H = \hbar \sum_{k=1}^7 \Delta_k \sigma_{kk} - \hbar (g_a \sigma_{21} a_a + g_b \sigma_{43} a_b + g_c \sigma_{65} a_c + h.c.) - \\ - \hbar [\Omega_1 (\sigma_{23} + \sigma_{32}) + \Omega_2 (\sigma_{45} + \sigma_{54}) + \Omega_3 (\sigma_{67} + \sigma_{76})]. \quad (8)$$

Во всех численных расчетах использовались следующие величины параметров системы (в единицах  $g_a = g_b = g_c = 10^8$  Гц):

$$\Omega_1 = 0,1, \Omega_2 = \Omega_3 = 1, \Delta_1 = \Delta_3 = 0, \Delta_2 = 4, \Delta_4 = \Delta_5 = 10, \Delta_6 = 7, \Delta_7 = 2. \quad (9)$$

### Условные полевые состояния

Будем решать уравнение Шредингера с оператором Гамильтона (8). Для этого разложим вектор  $|\varphi(t)\rangle$  по базису атомных и полевых состояний:

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{k=1}^7 |k\rangle_A (c_{000}^k |0_a 0_b 0_c\rangle_F + c_{001}^k |0_a 0_b 1_c\rangle_F + \dots + c_{111}^k |1_a 1_b 1_c\rangle_F). \quad (10)$$

Выберем следующее начальное условие:

$$|\varphi(0)\rangle = |1\rangle_A |\varphi(0)\rangle_F. \quad (11)$$

Решение уравнения Шредингера будем искать с помощью унитарного оператора эволюции  $U(t)$ :

$$|\varphi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) |\varphi(0)\rangle = U(t) |\varphi(0)\rangle = U(t) |1\rangle_A |\varphi(0)\rangle_F. \quad (12)$$

Функция  $|\varphi(t)\rangle$  содержит всю информацию о состоянии атомно-полевой системы. Однако она не факторизуется в прямое произведение атомного вектора и полевого – произошло перепутывание. Для того чтобы получить информацию, закодированную в полевом состоянии, необходимо произвести измерение над атомом. Положим, что в момент времени  $t$  в результате измерения получилось состояние  $|s\rangle_A$ . Учитывая этот результат, можно получить условное полевое состояние в момент времени  $t$ :

$$|\varphi(t)\rangle_F = \langle s | \varphi(t) \rangle = \langle s | U(t) |1\rangle_A |\varphi(0)\rangle_F = K(s,1,t) |\varphi(0)\rangle_F. \quad (13)$$

Оператор эволюции, действующий на начальное полевое состояние, носит название оператора Крауса. Этот оператор условный, так как зависит от результата измерения состояния атомной подсистемы. Он не является унитарным. Теперь решим следующую задачу: найдем такие соотношения между величинами частот Раби полей, константами взаимодействия и многофотонными отстройками, при которых матрица  $K(t)$  оператора  $K(s,1,t)$  в базисе фоковских состояний  $|0\rangle_F, |1\rangle_F$  совпадает с матрицей преобразования КПФ (1). Используем численное моделирование. Настроим детектор на измерение состояния  $|1\rangle_A$  и найдем зависимость элементов матрицы  $K(t)$  от времени. Легко проверить аналитически, что  $K(t)$  – диагональная матрица и ее элементы  $K_{11}(t) = \dots = K_{44}(t) = 1$  от времени не зависят. Временная зависимость оставшихся элементов изображена на рис. 2. Здесь представлены модули и аргументы величин  $K_{77}(t)$  и  $K_{88}(t)$ . Поведение во времени элементов  $K_{55}(t)$  и  $K_{66}(t)$  отличается от  $K_{77}(t)$  очень мало. Величины полей и однофотонных отстроек соответствуют (9). Время взаимодействия выбираем из условия, что модули всех элементов равны единице, и аргумент элемента  $K_{88}$  отличается от остальных на  $\pi$ . Это достигается в момент времени  $t_0$ . Значит, если атом покинет резонатор через время  $t_0$ , результатом измерения его состояния будет  $|1\rangle_A$ , и с высокой вероятностью, которая вычисляется ниже, можно заключить, что требуемая операция КПФ произошла.

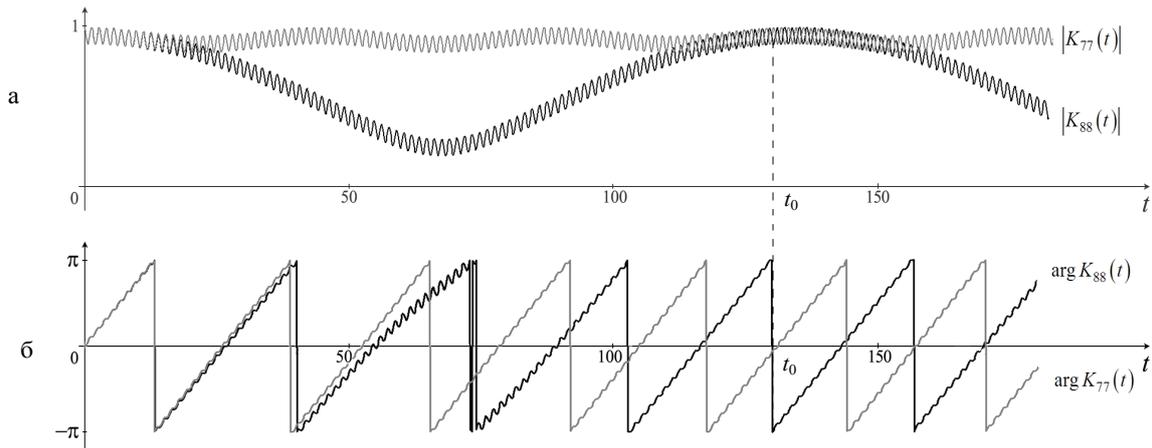


Рис. 2. Зависимость модуля (а) и аргумента (б) элементов матрицы  $K(t)$  от времени. В момент  $t_0$  матрица  $K(t_0)$  соответствует преобразованию КПФ. Значения используемых параметров соответствуют (9)

**Вероятность и качество преобразования**

Вычислим вероятность того, что при измерении атома после его взаимодействия с электромагнитным полем резонатора в течение времени  $t_0$  будет получено состояние  $|1\rangle_A : K_1(1,1,t) \equiv K_1(t)$ :

$$P(t) = Tr_F \left( K_1(t) |\varphi(0)\rangle_F \langle \varphi(0)| K_1^\dagger(t) \right). \tag{14}$$

Здесь  $Tr_F$  – операция взятия следа в подпространстве полевых состояний. Пусть далее  $|CPS\rangle_F$  – состояние поля после идеального фазового преобразования (CPS – Controlled Phase Shift – то же, что КПФ). Тогда качество преобразования определяется следующим образом:

$$F(t) = \frac{|\langle CPS | K_1(t) | \varphi(0) \rangle_F|}{\sqrt{Tr_F \{ K_1(t) | \varphi(0) \rangle_F \langle \varphi(0) | K_1^\dagger(t) \}}}. \tag{15}$$

На рис. 3 приведены графики зависимости функций  $P(t)$  и  $F(t)$  от времени. Вычислим эти значения для момента  $t_0$  :  $P(t_0) = 0,76, F(t_0) = 0,98$ .

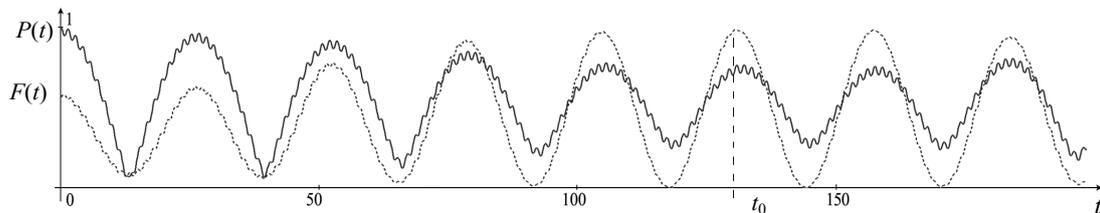


Рис. 3. Зависимость вероятности  $P(t)$  и качества  $F(t)$  фазового преобразования от времени. Параметры системы соответствуют (9)

**Заключение**

В работе предложена реализация квантовой логической операции условного контролируемого фазового преобразования. В модели использовалось квантово-механическое описание процессов эволюции атомной и полевой подсистем. Предъявлены величины параметров оптической системы, при которых реализуется требуемая операция КПФ. Следует отметить, что наряду с высоким значением качества преобразования (0,98) вероятность срабатывания устройства не очень велика (0,76). Это отчасти связано с тем, что аналитическое выражение для матрицы  $K(t)$  не найдено, и поэтому сложно отыскать оптимальные значения параметров оптической системы. Исходя из результатов численного расчета, можно лишь сделать некоторые предположения относительно поведения элементов  $K(t)$ . Для оптимизации параметров, очевидно, потребуется строить теорию возмущений по параметру  $\Omega_1$ . С другой стороны, объективно повысить вероятность можно при помощи повторения акта взаимодействия атома с полем резонатора и нового измерения. Включение в систему каналов обратной связи также может улучшить вероятность срабатывания. Дальнейшее уточнение модели связано с учетом механизмов затухания.

**Литература**

1. Килин С.Я. Квантовая информация // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169. – № 5. – С. 507–527.
2. Стин Э. Квантовые вычисления. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 100 с.
3. Валиев К.А., Кокин А.А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность. – Ижевск: РХД, 2001. – 352 с.
4. Dugić M., Čirković M.M. Quantum parallelism in quantum information processing // J. Theor. Phys. – 2002. – V. 14. – № 9. – P. 1641–1649.
5. Horodecki R. et. al. Quantum entanglement // Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 81. – № 2. – P. 865–942.
6. Smith J., Moska M. Algorithms for quantum computers. 2010 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:1001.0767v2 [quant-ph] 2010, своб.
7. Scarani V. et.al. The security of practical quantum key distribution // Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 81. – № 3. – P. 1301–1350.
8. Fredkin E., Toffoli T. Conservative logic // Inter. Journ. of Theor. Phys. – 1982. – V. 21. – № 12. – P. 219–253.
9. Lloyd S. Almost any Quantum Logic Gate is Universal // Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 75. – № 2. – P. 346–349.
10. Turchette Q.A. et. al. Measurement of Conditional Phase Shift for Quantum Logic // Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 75. – P. 4710–4713.
11. Ottaviani C. et. al. Polarization Qubit Phase Gate in Driven Atomic Media // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 90. – P.197902.
12. Ottaviani C. et. al. Quantum phase-gate operation based on nonlinear optics: Full quantum analysis // Phys. Rev. A. – 2006. – V. 73. – P. 010301.

*Мирошниченко Георгий Петрович* – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, профессор, gpmirosh@gmail.com

*Трифанов Александр Игоревич* – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, alextrifanov@gmail.com