

УДК 681.5 + 531

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕНЗОРОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ НА СФЕРИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ С МЕДЛЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

С.Н. Шаховал, Г.И. Мельников

Предлагается метод идентификации тензора инерции тела, использующий полупрограммное движение тестируемого тела с быстрым неравномерным реверсивно-симметричным вращением вокруг вертикальной оси прецессии и сравнительно медленным согласованным вращением вокруг наклонной подвижной оси собственного вращения.

**Ключевые слова:** тензор инерции, собственное вращение, реверсивно-симметричное движение, параметрическая идентификация.

Элементы тензора инерции определяются либо на вращениях вокруг шести неподвижных осей, либо на прецессии, дополненной одним осевым вращением. При этом применяется реверсивно-симметричный характер движения [1, 2]. В одном из вариантов шесть осевых вращений связаны переходными процессами угловой выставки тела относительно неподвижной оси, что характеризуется снижением точности и дополнительными затратами времени. В связи с этим в данной работе предлагается вариант, в котором осуществляется двухосная полупрограммная реверсивно-симметричная прецессия тестируемого тела, при условии, что угловая скорость собственного вращения тела на порядок меньше угловой скорости прецессионного движения вокруг вертикальной оси (рисунок). При таком условии весьма медленное собственное вращение обеспечивает на протяжении полного собственного оборота совпадение с вертикальной осью прецессии всех линий вокруг наклонной оси собственного вращения кругового конуса, связанного условно с телом (подвижного аксоида), что заменяет пять переходных процессов смены осей. Собственная угловая скорость тела вносит лишь малые изменения в величину и направление (угол  $\gamma$  на рисунке) вектора угловой скорости сферического движения тела. Вращения вокруг двух осей предполагаются синхронными реверсивно-симметричными, содержащими симметричное движение в обратном направлении.

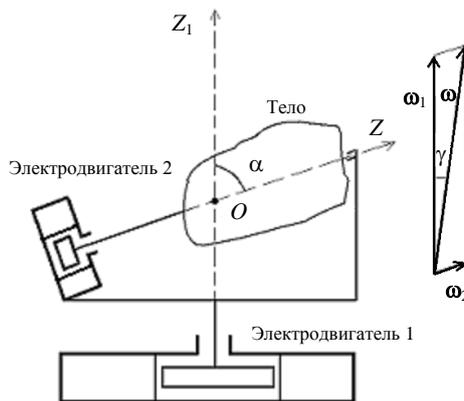


Рисунок. Устройство для определения тензора инерции тела

Пусть  $\omega_1 = \dot{\psi} \mathbf{k}_1$  – переменная угловая скорость прецессии тела вокруг вертикальной оси  $Oz_1$ , меняющая направление при обратном движении;  $\epsilon_1$  – угловое ускорение прецессии;  $\varphi$  – угол поворота тела вокруг наклонной оси собственного вращения тела;  $\omega_2 = \dot{\varphi} \mathbf{k}$  – угловая скорость вращения вокруг наклонной оси. Предполагаем  $\omega_1 \gg \omega_2$ . Тогда в первом приближении угловую скорость  $\omega_2$  вращения вокруг наклонной оси можно не учитывать. Нас интересует только изменение с течением времени углового положения тела относительно оси  $Oz_1$ . Пусть в процессе испытания тело совершило два оборота замедленного вращения вокруг оси  $Oz$  в положительном направлении и два оборота симметричного разгона в обратном направлении. Считаем, что в виду симметричности пары движений работы сил трения в обоих направлениях равны. Работы силы тяжести неуравновешенного тела на полном обороте по углу  $\varphi$  равны нулю в виду вертикальности оси прецессии  $Oz_1$ . Программные движения [3] осуществляются двумя электродвигателями (рисунок). Назначим на угловом интервале  $0 \leq \varphi \leq 4\pi$  пять полных оборотов, отсчитываемых от следующих пяти угловых значений:  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = h, \dots, \varphi_4 = 4h$ ;  $h = \frac{2\pi}{5}$ . На этих оборотах имеем пять реверсивно-симметричных вращений (в одну и обратную стороны). Эти движения удовлетворяют парам уравнений энергии (в которых пренебрегаем угловой скоростью собственного вращения):

$$(J + I_k)(\omega_{1,k+1}^2 - \omega_{1,k}^2) = 2A_k + 2V_k, (J + I_k)(\omega_{1,k}^2 - \omega_{1,k+1}^2) = 2A'_k + 2V'_k. \quad (1)$$

В уравнениях (1)  $\omega_{1,k}$  ( $k = 0, \dots, 4$ ) – узловые значения угловой скорости прецессии;  $J$  – приведенный момент инерции устройства;  $I_k$  – моменты инерции тела относительно оси  $Oz_1$  в угловой позиции  $k$  (относительно мгновенной оси, проведенной в теле при узловом значении  $\varphi = \varphi_k$ );  $A_k, A'_k$  – полезные работы электродвигателей на движениях в одном и обратном направлениях;  $V_k$  и  $V'_k = V_k$  – отрицательные работы диссипативных сил трения и аэродинамического сопротивления. Из (1) получаем расчетную формулу для пяти осевых моментов инерции тела:

$$I_k = \frac{A'_k - A_k}{\omega_{1,k}^2 - \omega_{1,k+1}^2} - J, k = 0, \dots, 4. \quad (2)$$

Эти оси расположены в теле на круговом конусе, описанном вокруг собственной оси  $Oz$  с углом  $\alpha \approx 63,4^\circ$ . Формулы (2) являются приближенными, так как в них не учитывается угловая скорость собственного вращения  $\omega_2$ . Точная формула, очевидно, имеет следующий вид:

$$I_k = \frac{A'_k - A_k}{\omega_k^2 - \omega_{k+1}^2} - J,$$

где  $\omega_k = \omega_{1,k} + \omega_{2,k}$ ;  $\omega_k^2 = \omega_{1,k}^2 + \omega_{2,k}^2 + 2\omega_{1,k}\omega_{2,k} \cos \alpha_k$ ; угол  $\alpha_k$  – угол между  $\omega_{1,k}$  и  $\omega_{2,k}$ . При этом осевые моменты инерции тела  $I_k$  определяются относительно пяти мгновенных осей, направленных по векторам  $\omega_k$ , на подвижном аксоиде. Дополнительно определяют в эксперименте момент инерции относительно собственной оси вращения  $Oz$ . Затем по шести моментам инерции находят матрицу тензора инерции в заданной точке  $O$  тела. Малые погрешности формулы (2) оцениваются с использованием способа [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект № 10-08-01046.

1. Мельников В.Г. Энергетический метод параметрической идентификации тензоров инерции тел // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 1 (65). – С. 59–63.
2. Мельников В.Г., Едачев А.С., Мельников Г.И., Шаховал С.Н. Метод определения тензора инерции на программных движениях // Изв. Самарского научного центра РАН. – 2010. – Т. 12 (33). – № 1 (2). – С. 445–448.
3. Мельников В.Г. Использование программных движений для идентификации тензора инерции и центра масс твердого тела // Изв. вузов. Приборостроение. – 2007. – Т. 50. – № 8. – С. 33–36.
4. Шаховал С.Н. Исследование матричных алгебраических уравнений, определяющих тензор инерции через осевые моменты инерции // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2008. – Вып. 47. – С. 196–201.

**Шаховал Сергей Николаевич** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, shakhovalsey@gmail.com

**Мельников Геннадий Иванович** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, профессор, melnikov@mail.ifmo.ru