УДК 531

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТЕЛА НА РЕВЕРСИВНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПРЕЦЕССИЯХ В ОГРАНИЧЕННОМ УГЛОВОМ ИНТЕРВАЛЕ

В.Г. Мельников, Р.Ю. Кравчук, Г.И. Мельников, С.Н. Шаховал

Решается задача определения тензора инерции на основании прецессионного двухосного реверсивно-симметричного сферического движения тела при ограничениях на два угловых интервала. Получены расчетные формулы для инерционных параметров.

Ключевые слова: матрица тензора инерции, угол прецессии, угол собственного вращения, реверсивно-симметричная прецессия.

Известен способ параметрической идентификации пяти осевых моментов инерции тела на реверсивно-симметричном прецессионном двухосном движении тела вокруг неподвижной точки. Обобщим этот способ на случай отсутствия полных оборотов по углу собственного вращения. Пусть твердое тело вместе со сцепленной с ним системой *Oxyz*, собственной осью *Oz* с известным центром масс *C*, собственным углом поворота φ совершает сферическое движение вокруг неподвижной точки *O*. При этом за рассматриваемый конечный интервал времени мгновенная ось вращения тела описывает вокруг собственной оси *Oz* тела часть кругового конуса в некотором секторе $[\varphi_0 = 0, \varphi_5]$ при $\varphi_6 = 5\delta \le \pi$. Равномерной сетке узловых значений сопоставим шесть положений в теле мгновенной оси вращения с ортами, заданными строчными матрицами

$$\mathbf{e}_i = [e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}] = [\cos\varphi_i, \sin\varphi_i, h]r, \quad r = \sin\beta, \quad h = ctg\beta, \quad i = 0,1,...,5.$$

Пусть на реверсивно-симметричной прецессии [1–4] определены пять моментов инерции тела $I_1,\ldots,I_5$. Имеем выражения осевых моментов инерции через компоненты тензора инерции:

$$I_i = J_x e_{i1}^2 + J_y e_{i2}^2 + J_z e_{i3}^2 + 2J_{xy}e_{i1}e_{i2} + 2J_{yz}e_{i2}e_{i3} + J_{xz}e_{i1}e_{i3}, \quad \text{или}$$

$$I_i = r^2\left(\frac{1}{2}J_x(1+\cos 2\varphi_i) + \frac{1}{2}J_y(1-\cos 2\varphi_i) + J_z h^2 + 2J_{xy}\sin 2\varphi_i + 2h(J_{yz}\sin\varphi_i + J_{xz}\cos\varphi_i)\right).$$

Приводя подобные члены, получаем окончательные выражения для пяти осевых моментов,

$$I_i = r^2(X^2 + Y\cos 2\varphi) + Z\sin 2\varphi_i + F\cos\varphi_i + H\sin\varphi_i), \quad i = \overline{1,5}, \tag{1}$$

с пятью инерционными коэффициентами, составленными из шести компонент тензора инерции:

$$X = (J_x + J_y)/2 + J_z h^2, \quad Y = (J_x - J_y)/2, \quad Z = J_{xy}, \quad F = 2J_{xy}h, \quad H = 2J_{yz}h.$$

Выражения (1) объединяются в матричное строчное выражение

$$\mathbf{VA} = \mathbf{I} \text{ при } \mathbf{I} = [I_1,\ldots,I_5]r^2, \quad \mathbf{V} = [X \;\; Y \;\; Z \;\; F \;\; H], \tag{2}$$

где $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(2\varphi_1) & \cos(2\varphi_2) & \cos(2\varphi_3) & \cos(2\varphi_4) & \cos(2\varphi_5) \\ \sin(2\varphi_1) & \sin(2\varphi_2) & \sin(2\varphi_3) & \sin(2\varphi_4) & \sin(2\varphi_5) \\ \cos(\varphi_1) & \cos(\varphi_2) & \cos(\varphi_3) & \cos(\varphi_4) & \cos(\varphi_5) \\ \sin(\varphi_1) & \sin(\varphi_2) & \sin(\varphi_3) & \sin(\varphi_4) & \sin(\varphi_5) \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (2) находим вектор-строку пяти неизвестных $\mathbf{V} = [X \;\; Y \;\; Z \;\; F \;\; H]$, а также центробежные моменты инерции тела и момент инерции относительно оси, соответствующий углу $\varphi_0 = 0$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{IA}^{-1}, \quad J_{xy} = Z, \quad J_{zx} = \frac{1}{2h}F, \quad J_{yz} = \frac{1}{2h}H, \quad I_0 = (X + Y + Z)r^2.$$

В случае $\beta = 63{,}4^\circ$ на круговом конусе равномерно распределены пять осей виртуального икосаэдра, сцепленного с телом, и на реверсивно-симметричной прецессии экспериментально находятся пять моментов инерции, распределенных в секторе конуса [1–4]. Тогда моменты инерции относительно пяти осей икосаэдра вычисляются по формуле, аналогичной (1), в которой следует заменить углы $\varphi_i = i\delta$ на $\varphi_i' = i2\pi/5$. При этом вектор-строка $\mathbf{V}$ вычисляется по прежней формуле $\mathbf{V} = \mathbf{IA}^{-1}$, но с новыми значениями строчной матрицы $\mathbf{I}$. Момент инерции тела относительно шестой оси икосаэдра определяется отдельно на осевом реверсивно-симметричном вращении энергетическим методом, как указано в цитированных работах. Расчетные формулы компонент тензора инерции через найденные шесть моментов инерции приведены в [1–2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-01046).

1. Мельников В.Г., Едачев А.С., Мельников Г.И., Шаховал С.Н. Метод определения тензора инерции на программных движениях // Изв. Самарского научного центра РАН. – 2010. – Т. 12 (33). – № 1 (2). – С. 445–448.

2. Мельников В.Г. Энергетический метод параметрической идентификации тензоров инерции тел // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 1 (65). – С. 59–63.
3. Мельников В.Г. Идентификация компонент тензора инерции и координат центра масс тела на реверсивно-симметричных прецессиях // Вестник СПбГУ. Сер.1. Математика, механика и астрономия. – 2010. – Вып. 3. – С. 97–104.
4. Патент 2436055. Способ определения тензора инерции тела и устройство для его осуществления / опубл. 10.12.2011. Бюл. № 34. – 17 с.

Мельников Валентин Геннадьевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой, melnikov@mail.ifmo.ru
Кравчук Раиса Юрьевна – ОАО «Ростелеком», инженер, ggarotta@gmail.com
Мельников Геннадий Иванович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, профессор, melnikov@ifmo.ru
Шаховал Сергей Николаевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, shakhovalsergey@gmail.com