

## СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ МУЛЬТИАГЕНТНЫМИ СИСТЕМАМИ<sup>2</sup>

И.Б. Фуртат

Рассмотрена проблема робастного субоптимального управления мультиагентными системами, модель которых представлена дифференциальными уравнениями с липшицевой нелинейностью. При решении предполагается, что доступны измерению только скалярные выходы подсистем. Получен алгоритм децентрализованного управления, обеспечивающий компенсацию неопределенностей и субминимизацию интегрального критерия качества с заданной точностью.

**Ключевые слова:** мультиагентная система, робастное управление, децентрализованное управление, оптимальное управление, компенсация возмущений.

### Введение

Задача компенсации неконтролируемых возмущений была и остается актуальной проблемой в теории управления. В настоящее время решение этой задачи имеет два основных направления. Первый подход основан на построении инвариантных систем управления, т.е. когда система управления малочувствительна или не реагирует на неконтролируемые возмущения. Такой подход получил широкое применение, например, в  $H^\infty$ -оптимизации [1] или в методе вложения систем [2]. Второй подход основан на динамической компенсации неизвестных воздействий. Суть данного подхода заключается в оценке возмущений и затем выборе структуры и параметров управляющего устройства с целью исключения влияния неопределенностей на объект управления. Так, в [3, 4] внешние возмущения представлены в виде системы дифференциальных уравнений, которые с помощью методов адаптивного и робастного управления компенсируются. В [5], на базе подхода [6], предложена схема робастного субоптимального управления с минимизацией интегрального критерия качества.

В настоящей работе рассматривается обобщение схемы [5] на случай робастного субоптимального децентрализованного управления нелинейными мультиагентными системами по выходу. Для выделения неконтролируемых возмущений и обеспечения субоптимального управления параллельно объекту предлагается ввести вспомогательный контур определенной структуры. Далее возмущения оцениваются и компенсируются с заданной точностью за конечное время. Приводятся результаты моделирования, подтверждающие аналитические выводы и расчеты.

### Постановка задачи

Пусть управляемая и наблюдаемая мультиагентная система с перекрестными связями по состоянию задана дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i(t)u_i(t) + \boldsymbol{\Psi}_i(y_i(t), t)\mathbf{N}_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^k \mathbf{S}_{ij}(t)\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{D}_i(t)f_i(t), \\ y_i(t) &= \mathbf{L}_i\mathbf{x}_i(t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0i}, \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$  – вектор состояния  $i$ -й подсистемы;  $u_i(t)$ ,  $f_i(t)$  и  $y_i(t)$  – скалярные вход, внешнее неизвестное ограниченное воздействие и выход соответственно;  $\mathbf{A}_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\mathbf{N}_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{S}_{ij}(t) \in \mathbf{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $\boldsymbol{\Psi}_i(y_i(t), t) \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\mathbf{B}_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{D}_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{L}_i = [1, 0, \dots, 0]$ ;  $\mathbf{x}_{0i}$  – известные начальные условия;  $k$  – количество подсистем. Необходимо синтезировать непрерывный закон управления, обеспечивающий перевод объекта (1) из начального положения  $y_i(0)$  в конечное  $y_i(t_{fi})$  за заданное время  $t_{fi}$ , при этом минимизируя критерий качества

$$J_i = \int_0^{t_{fi}} (\tilde{q}_i y_i^2(t) + \tilde{r}_i u_{0i}^2(t)) dt, \quad (2)$$

с малой погрешностью [5],  $\tilde{q}_i \geq 0$  и  $\tilde{r}_i > 0$  – весовые коэффициенты, функция  $u_{0i}(t)$  определяет оптимальный закон управления [2].

**Предположение 1.** Элементы матриц  $\mathbf{A}_i(t)$ ,  $\mathbf{B}_i(t)$ ,  $\mathbf{N}_i(t)$ ,  $\mathbf{S}_{ij}(t)$  и  $\mathbf{D}_i(t)$  – неизвестные ограниченные функции. Известно множество  $\Xi$  возможных значений этих функций.

**Предположение 2.** Выполнены условия:  $\mathbf{A}_i(t) = \mathbf{A}_{Ni} + \mathbf{B}_{Ni}\mathbf{c}_i^T(t)$ ,  $\mathbf{B}_i(t) = \mathbf{B}_{Ni} + \mathbf{B}_{Ni}\tau_i(t)$ ,  $\mathbf{D}_i(t) = \mathbf{B}_{Ni}k_i(t)$ ,  $\mathbf{N}_i(t) = \mathbf{B}_{Ni}\omega_i(t)$ ,  $\mathbf{S}_{ij}(t) = \mathbf{B}_{Ni}\theta_{ij}^T(t)$ , где  $\mathbf{A}_{Ni} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\mathbf{B}_{Ni} \in \mathbf{R}^{n_i}$  – известные матрицы, при-

<sup>2</sup> Работа выполнена при поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы», государственный контракт № 11.519.11.4007.

чем собственные числа  $\mathbf{A}_{Ni}$  не лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости,  $\mathbf{c}_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\tau_i(t) \in \mathbf{R}$ ,  $k_i(t) \in \mathbf{R}$ ,  $\omega_i(t) \in \mathbf{R}$  и  $\theta_{ij}(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$  – неизвестные функции.

**Предположение 3.** Неизвестные элементы матрицы  $\Psi_i(y_i(t), t)$  удовлетворяют глобальному условию Липшица по  $y_i(t)$ , ограничены по  $t$  и являются гладкими функциями.

**Предположение 4.** Объект (1) – минимально фазовый, последние коэффициенты  $\mathbf{B}_i(t)$  и  $\mathbf{B}_{Ni}$  – положительные функции и число.

**Предположение 5.** В системе управления доступны измерению только  $y_i(t)$  и  $u_i(t)$ .

**Метод решения**

С учетом предположения 2 преобразуем уравнение объекта (1) к виду

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_{Ni}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_{Ni}u_i(t) + \mathbf{B}_{Ni}\varphi_i(t), \quad y_i(t) = \mathbf{L}_i\mathbf{x}_i(t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0i}, \quad (3)$$

где  $\varphi_i(t) = \mathbf{c}_i^T(t)\mathbf{x}_i(t) + \tau_i(t)u_i(t) + \Psi_i(y_i(t), t)\omega_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^k \theta_{ij}^T(t)\mathbf{x}_j(t) + k_i(t)f_i(t)$ .

Рассмотрим номинальный объект (когда в (3)  $\varphi_i(t) \equiv 0$ ):

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_{Ni}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_{Ni}u_i(t), \quad y_i(t) = \mathbf{L}_i\mathbf{x}_i(t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0i}. \quad (4)$$

Для номинального объекта (4) критерий качества (2) и оптимальный закон управления  $u_{0i}(t)$  определяются в виде [7]

$$J_i = \int_0^{t_{fi}} (\mathbf{x}_i^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_i\mathbf{x}_i(t) + \tilde{r}_i u_{0i}^2(t)) dt, \quad u_{0i}(t) = \tilde{r}_i^{-1} \mathbf{B}_{Ni}^T \mathbf{z}_{22,i}(t) \mathbf{z}_{12,i}^{-1}(t) \mathbf{x}_i(t) + \bar{u}_{0i}(t), \quad (5)$$

где  $\tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{q}_i \text{diag}\{1, 0, \dots, 0\}$ ,  $\bar{u}_{0i}(t) = \tilde{r}_i^{-1} \mathbf{B}_{Ni}^T (\mathbf{z}_{21,i}(t) + \mathbf{z}_{22,i}(t) \mathbf{z}_{12,i}^{-1}(t) \mathbf{z}_{11,i}(t)) \mathbf{x}_i(t_{fi})$ ,  $\mathbf{z}_i(t) = [\mathbf{x}_i^T(t), \mathbf{w}_i^T(t)]^T$ ,

$$\dot{\mathbf{w}}_i(t) = \tilde{\mathbf{Q}}_i \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{A}_{Ni}^T \mathbf{w}_i(t), \quad \dot{\mathbf{z}}_i(t) = \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i(t), \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Ni} & \tilde{r}_i^{-1} \mathbf{B}_{Ni} \mathbf{B}_{Ni}^T \\ \tilde{\mathbf{Q}}_i & -\mathbf{A}_{Ni}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_i(\tau_i) = e^{\mathbf{D}_i \tau_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11,i}(\tau_i) & \mathbf{z}_{12,i}(\tau_i) \\ \mathbf{z}_{21,i}(\tau_i) & \mathbf{z}_{22,i}(\tau_i) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_i(t) = \mathbf{Z}_i(\tau_i) \mathbf{z}_i(t_{fi}), \quad \tau_i = t - t_{fi}.$$

Добавим и вычтем в (3)  $u_{0i}(t)$  из (5) и преобразуем уравнение (3) к виду

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_{0i}(t)\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_{Ni}\bar{u}_{0i}(t) + \mathbf{B}_{Ni}u_i(t) + \mathbf{B}_{Ni}\varphi_i(t), \quad y_i(t) = \mathbf{L}_i\mathbf{x}_i(t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0i}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}_{0i}(t) = \mathbf{A}_{Ni} + \tilde{r}_i^{-1} \mathbf{B}_{Ni} \mathbf{B}_{Ni}^T \mathbf{z}_{22,i}(t) \mathbf{z}_{12,i}^{-1}(t)$ ,  $\Psi(t) = \varphi(t) - u_{0i}(t)$ .

Для выделения этих неопределенностей введем вспомогательный контур [5, 6]

$$\dot{\mathbf{x}}_{ai}(t) = \mathbf{A}_{0i}(t)\mathbf{x}_{ai}(t) + \mathbf{B}_{Ni}u_{0i}(t) + \beta_i \mathbf{B}_{Ni}u_i(t), \quad y_{ai}(t) = \mathbf{L}_i\mathbf{x}_{ai}(t), \quad \mathbf{x}_{ai}(0) = \mathbf{x}_{0i}, \quad (7)$$

где  $\beta_i > 0$ . Составим функцию  $\sigma_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_{ai}(t)$ , вычитая из (6) уравнение (7):

$$\dot{\sigma}_i(t) = \mathbf{A}_{0i}(t)\sigma_i(t) + \mathbf{B}_{Ni}\varphi_i(t), \quad \zeta_i(t) = \mathbf{L}_i\sigma_i(t), \quad \sigma_i(0) = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\varphi_i(t) = (1 - \beta_i)u_i(t) + \Psi_i(t)$ . Преобразуем (8) к форме вход–выход:

$$\mathcal{Q}_{0i}(p, t)\zeta_i(t) = R_{Ni}(p)\varphi_i(t), \quad (9)$$

где  $\mathcal{Q}_{0i}(p, t)$ ,  $R_{Ni}(p)$  – линейные дифференциальные операторы, полученные при переходе от (8) к (9) при фиксированном параметре  $t$ .

Для компенсации возмущений в (1) функцию  $u_i(t)$  зададим в виде

$$u_i(t) = -\beta_i^{-1} R_{Ni}^{-1}(p) \mathcal{Q}_{0i}(p, t) \bar{\zeta}_i(t), \quad (10)$$

где  $\bar{\zeta}_i(t)$  – оценка  $\zeta_i(t)$ . Для реализации алгоритма (10) рассмотрим наблюдатель [8]

$$\dot{\xi}_i(t) = \mathbf{G}_{0i}\xi_i(t) + \mathbf{D}_{0i}(\bar{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t)), \quad \bar{\zeta}_i(t) = \mathbf{L}_i\xi_i(t). \quad (11)$$

Здесь  $\xi_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{G}_{0i} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_{n_i-1}$  – единичная матрица порядка  $n_i - 1$ ,

$\mathbf{D}_{0i} = -[d_{1i}\mu^{-1}, d_{2i}\mu^{-2}, \dots, d_{n_i i}\mu^{-n_i}]^T$ ,  $d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{n_i i}$  выбираются из условия гурвицевости матрицы

$\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_{0i} - \mathbf{D}_i \mathbf{L}_i$ ,  $\mathbf{D}_i = [d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{n_i i}]^T$ ,  $\mu > 0$  – малое число.

Введем вектор отклонений  $\bar{\eta}_i(t) = \Gamma_i^{-1}(\xi_i(t) - \theta_i(t))$ , где  $\Gamma_i = \text{diag}\{\mu^{n_i-1}, \mu^{n_i-2}, \dots, \mu, 1\}$ ,

$\theta_i(t) = [\zeta_i(t), \dot{\zeta}_i(t), \dots, \zeta_i^{(n_i)}(t)]^T$ . Продифференцировав  $\bar{\eta}_i(t)$  по времени с учетом уравнения (11), получим:

$\dot{\bar{\eta}}_i(t) = \mu^{-1} \mathbf{G}_i \bar{\eta}_i(t) + \bar{\mathbf{b}}_i \zeta_i^{(n_i+1)}(t)$ ,  $\bar{\Delta}_i(t) = \mu^{n_i-1} \mathbf{L}_i \bar{\eta}_i(t)$ . Преобразуем предпоследние уравнения к виду

$$\dot{\eta}_i(t) = \mu^{-1} \mathbf{G}_i \eta_i(t) + \mathbf{b}_i \dot{\zeta}_i(t), \quad \bar{\Delta}_i(t) = \mu^{n_i-1} \mathbf{L}_i \eta_i(t). \quad (12)$$

Здесь  $\eta_i^l(t) = \bar{\eta}_i^l(t) - \mu^{1+l-n_i} \zeta_i^{(l-1)}(t)$ ,  $l = \overline{2, n_i}$ ,  $\eta_i^k(t)$  и  $\bar{\eta}_i^l(t)$  –  $l$ -е компоненты векторов  $\boldsymbol{\eta}_i(t)$  и  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_i(t)$ ,  $\eta_i^1(t) = \bar{\eta}_i^1(t)$ ,  $b_i = [\mu^{2-n_i}, 0, \dots, 0]^T$ . Очевидно, что последние два уравнения эквивалентны относительно переменных  $\eta_i(t) = \bar{\eta}_i(t)$ . Принимая во внимание (11) и (12), преобразуем уравнение (10) к виду

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_{0i}(t)\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_{Ni}\bar{\mathbf{u}}_{0i}(t) + \mu^{n_i-1}\bar{\mathbf{b}}_i\mathbf{g}_i^T\boldsymbol{\Delta}_i(t), \quad y_i(t) = \mathbf{L}_i\mathbf{x}_i(t), \quad (13)$$

где  $\boldsymbol{\Delta}_i(t) = [\eta_i^1(t), \dot{\eta}_i^1(t), \dots, (\eta_i^1(t))^{(n_i)}]^T$ ,  $\mathbf{g}_i$  – вектор, составленный из коэффициентов оператора  $\mathcal{Q}_{0i}(p, t)$  и записанных в обратном порядке.

**Утверждение.** Пусть выполнены условия предположений. Тогда существуют числа  $\beta_i > 0$  и  $\mu_0 > 0$  такие, что при  $\mu \leq \mu_0$  система управления (7), (10), (11) обеспечивает переход объекта (1) из начального положения  $y_i(0)$  в конечное  $y_i(t_{fi})$  с субминимизацией критерия качества (2).

### Пример

Рассмотрим мультиагентную систему, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = & \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_3 \\ -a_{0i} & -a_{1i} & -a_{2i} & -a_{3i} \end{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ r_{0i} \end{bmatrix} u_i(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ d_{0i} \end{bmatrix} f_i(t) + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 4} \\ -\varepsilon_{0i} & -\varepsilon_{1i} & -\varepsilon_{2i} & -\varepsilon_{3i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ n_{0i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_{0i} & -s_{1i} & -s_{2i} & -s_{3i} \end{bmatrix} \mathbf{x}_j(t), \\ & y_i(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}_i(t), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mathbf{O}_{ij}$  – матрица размерности  $i \times j$  с нулевыми элементами. Класс неопределенности  $\Xi$  задан неравенствами:  $|a_{li}| \leq 10$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2$ ,  $1 \leq r_{0i} \leq 4$ ,  $|d_{0i}| \leq 10$ ,  $|f_i(t)| \leq 10$ ,  $|s_{ji}| \leq 10$ ,  $j = 1, 2$ . Предполагаются известными начальные условия  $\mathbf{x}_i(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ .

Цель управления – квазиминимизация интегрального критерия качества (2) и ограниченность всех сигналов в системе управления. Зададим следующие параметры в (2):  $\tilde{q}_i = 1$ ,  $\tilde{r}_i = 1$ ,  $t_{fi} = 10$  с,  $y_i(0) = 1$  и  $y_i(10) = 2$ .

Сформируем уравнение номинального объекта управления (4) в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_3 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} u_i(t), \quad y_{Ni}(t) = [1, 0, 0, 0] \mathbf{x}_i(t). \quad (15)$$

Для (15) перепишем критерий (2) и сформируем оптимальное управление в виде

$$J_i = \int_0^{10} (\mathbf{x}_i^T(t) \text{diag}\{1, 0, 0, 0\} \mathbf{x}_i(t) + u_{0i}^2(t)) dt,$$

$$u_{0i}(t) = [0, 0, 0, 1] \left[ \mathbf{z}_{22,i}(t) \mathbf{z}_{12,i}^{-1}(t) \mathbf{x}_i(t) + (\mathbf{z}_{21,i}(t) + \mathbf{z}_{22,i}(t) \mathbf{z}_{12,i}^{-1}(t) \mathbf{z}_{11,i}(t)) \mathbf{x}_i(10) \right].$$

Введем вспомогательный контур (7), где  $\mathbf{x}_i(10) = [2, 2, 2, 2]^T$  и  $\beta_i = 0,04$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i(t) = & \mathbf{A}_{0i}(t) \bar{\mathbf{x}}_i(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{O}_{3 \times 4} \end{bmatrix} (\mathbf{z}_{21,i}(t) + \mathbf{z}_{22,i}(t) \mathbf{z}_{12,i}^{-1}(t) \mathbf{z}_{11,i}(t)) \mathbf{x}_i(10) + \\ & + 0,04 [0, 0, 0, 1]^T u_i(t), \quad \bar{\mathbf{y}}_i(t) = [1, 0, 0, 0] \bar{\mathbf{x}}_i(t), \quad \bar{\mathbf{x}}_i(0) = [1, 1, 1, 1]^T. \end{aligned}$$

Пусть в (11)  $\mathbf{D}_i = [20, 150, 500, 625]^T$ ,  $\mu = 0,01$ . В результате наблюдатель определится в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{1i}(t) = & -\xi_{2i}(t) - 2 \cdot 10^3 (\xi_{1i}(t) - \zeta_i(t)), \quad \dot{\xi}_{2i}(t) = -\xi_{3i}(t) - 1,5 \cdot 10^6 (\xi_{2i}(t) - \zeta_i(t)), \\ \dot{\xi}_{3i}(t) = & -\xi_{4i}(t) - 5 \cdot 10^8 (\xi_{3i}(t) - \zeta_i(t)), \quad \dot{\xi}_{4i}(t) = -6,25 \cdot 10^{10} (\xi_{4i}(t) - \zeta_i(t)), \quad \xi_i(0) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя наблюдатель (16), сигнал компенсации (10) можно записать в виде  $u_i(t) = -25 \mathbf{a}_{04,i}(t) \boldsymbol{\xi}_i(t)$ , где  $\mathbf{a}_{04,i}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} - \mathbf{z}_{4,i}(t)$ ,  $\mathbf{a}_{04,i}(t)$  и  $\mathbf{z}_{4,i}(t)$  – четвертые строки матриц  $\mathbf{A}_{0i}(t)$  и  $\mathbf{z}_{22,i}(t) \mathbf{z}_{12,i}^{-1}(t)$  соответственно.

На рисунке, а, приведены результаты моделирования по выходам первой подсистемы (14) и номинального объекта (15), на рисунке, б, – результаты моделирования по выходам второй подсистемы (14) и номинального объекта (15) при следующих данных:

– в первой подсистеме:  $a_{31} = 8 + \sin t$ ,  $a_{21} = -6 + \cos t$ ,  $a_{11} = 9 + \sin 2t$ ,  $a_{01} = 8 + 2 \cos 3t$ ,  $r_{01} = 6$ ,  $d_{01} = 2 + 2 \sin t$ ,  $\varepsilon_{31} = 1 + \sin y_1 + \sin t$ ,  $\varepsilon_{21} = \cos y_1$ ,  $\varepsilon_{11} = 1 + \ln(1 + |y_1|)$ ,  $\varepsilon_{01} = \sin 2y_1$ ,  $n_{01} = 1 + \sin t$ ,  $s_{31} = 5 + \sin t$ ,  $s_{21} = 7$ ,  $s_{11} = 3$ ,  $s_{01} = 15$ ,  $f_1(t) = 2 + \sin 0,8t$ ;

– во второй подсистеме:  $a_{32} = 2 + \sin t$ ,  $a_{22} = 6 - \cos t$ ,  $a_{12} = -8 + 2 \sin t$ ,  $a_{02} = 5 - \cos 3t$ ,  $r_{02} = 5$ ,  
 $d_{02} = 5 + 2 \sin 2t$ ,  $\varepsilon_{32} = 2 + \sin 2y_2$ ,  $\varepsilon_{22} = \cos y_2$ ,  $\varepsilon_{12} = 2 + \ln(3 + |y_2| + \sin t)$ ,  $\varepsilon_{02} = \cos 2y_2$ ,  
 $n_{02} = -1 + 3 \sin t$ ,  $s_{32} = 15$ ,  $s_{22} = 9 + \sin t$ ,  $s_{12} = 9 - \cos t$ ,  $s_{02} = 10 + \cos 2t$ ,  $f_2(t) = 1 + \cos 1,2t$ .

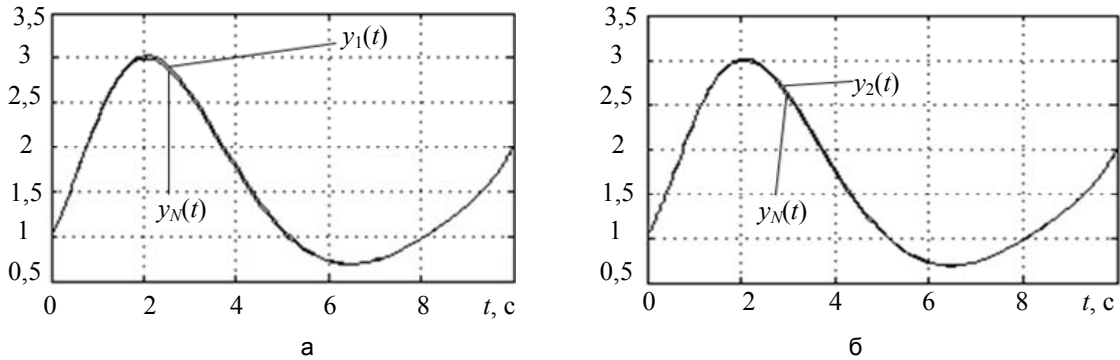


Рисунок. Результаты моделирования: по  $y_1(t)$  и  $y_N(t)$  (а); по  $y_2(t)$  и  $y_N(t)$  (б)

**Заключение**

В работе рассмотрена схема децентрализованного робастного субоптимального управления нелинейными мультиагентными системами. При решении предполагалось, что измерению доступны только скалярные выходы локальных подсистем и запрещен обмен информации между ними. Для выделения неизвестных возмущений и обеспечения субоптимального управления предлагалось ввести вспомогательный контур параллельно объекту. Далее выделенные возмущения оценивались и компенсировались с заданной точностью за конечное время. Результаты аналитических выводов были подтверждены численным моделированием.

**Приложение**

**Доказательство утверждения.** Рассмотрим новую переменную  $\varepsilon_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ , равную разности фазовых переменных (13) и (4), причем на вход номинального объекта (4) подано оптимальное управление (5). В результате получим

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \mathbf{A}_{Ni} \varepsilon_i(t) + \beta_i^{-1} \mu^{n_i-1} \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i \Delta_i(t), \quad \varepsilon_i(0) = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение и уравнение (12) к виду

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \mathbf{A}_{Ni} \varepsilon_i(t) + \mu_2^{n_i-1} \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i \Delta_i(t), \quad \mu_1 \dot{\eta}_i(t) = \mathbf{G}_i \eta_i(t) + \mu_2 \mathbf{b}_i \dot{\zeta}_i(t), \tag{П.1}$$

где  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Воспользуемся первой леммой [9], согласно которой рассмотрим систему (П.1) при  $\mu_2 = 0$ . Так как собственные числа матрицы  $\mathbf{A}_{Ni}$  не лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости (предположение 2) и  $\mathbf{G}_i$  гурвицева, то решение (П.1) при  $\mu_2 = 0$  глобально устойчиво. Значит, согласно [9],  $\eta_i(t)$ ,  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\Delta_i(t)$  и  $\dot{\zeta}_i(t)$  ограничены. Доказательство ограниченности остальных функций аналогично [5]. В соответствии с леммой [9] система (П.1) диссипативна. Значит,  $\sup_t |\dot{\zeta}_i(t)| < k_1$ ,  $\sup_t |\Delta_i(t)| < k_2$ ,

$k_1 < \infty$ ,  $k_2 < \infty$ . Однако диссипативность (П.1) не гарантирует ее асимптотическую устойчивость как сингулярно-возмущенной системы. Покажем, что при  $\mu_2 > 0$  обеспечивается малость величины  $|\varepsilon_i(t)|$ . Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = \varepsilon_i^T(t) \mathbf{P}_i \varepsilon_i(t) + \eta_i^T(t) \mathbf{H}_i \eta_i(t), \tag{П.2}$$

где  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > 0$ ,  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T > 0$ , и вычислим полную производную от нее вдоль траекторий (П.1) при  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ :

$$\dot{V} = -\varepsilon_i^T(t) \mathbf{Q}_{1i} \varepsilon_i(t) + 2\mu_0^{n_i-1} \varepsilon_i^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i \Delta_i(t) - \mu_0^{-1} \eta_i^T(t) \mathbf{Q}_{2i} \eta_i(t) + 2\mu_0 \eta_i^T(t) \mathbf{H}_i \mathbf{b}_i \dot{\zeta}_i(t). \tag{П.3}$$

Здесь  $\mathbf{A}_{Ni}^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{Ni} = -\mathbf{Q}_{1i}$ ,  $\mathbf{G}_i^T \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{G}_i = -\mathbf{Q}_{2i}$ ,  $\mathbf{Q}_{1i} = \mathbf{Q}_{1i}^T > 0$ ,  $\mathbf{Q}_{2i} = \mathbf{Q}_{2i}^T > 0$ . Оценим в (П.3) второе и четвертое слагаемые:

$$2\mu_0^{n_i-1} \varepsilon_i^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i \Delta_i(t) \leq 2\mu_0^{n_i-1} \varepsilon_i^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i (\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i)^T \varepsilon_i(t) + 2\mu_0^{n_i-1} k_2^2;$$

$$2\mu_0 \eta_i^T(t) \mathbf{H}_i \mathbf{b}_i \dot{\zeta}_i(t) \leq 2\mu_0 \eta_i^T(t) \mathbf{H}_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \mathbf{H}_i \eta_i(t) + 2\mu_0 k_1^2.$$

Воспользовавшись оценками, перепишем (П.3):  $\dot{V} \leq -\varepsilon_i^T(t) \mathbf{Q}_{3i} \varepsilon_i(t) - \eta_i^T(t) \mathbf{Q}_{4i} \eta_i(t) + \pi_i$ , где  $\mathbf{Q}_{3i} = \mathbf{Q}_{1i} - 2\mu_0^{n_i-1} \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i (\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{g}_i)^T$ ,  $\mathbf{Q}_{4i} = \mathbf{Q}_{2i} - \mu_0^2 \mathbf{H}_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \mathbf{H}_i$ ,  $\pi_i = 2\mu_0 (k_1^2 + \mu_0^{n_i-2} k_2^2)$ . Очевидно, что всегда

существует число  $\mu_0 > 0$ , обеспечивающее  $\mathbf{Q}_{3i} > 0$  и  $\mathbf{Q}_{4i} > 0$ . Оценим производную функции Ляпунова в виде  $\dot{V} \leq -\chi_i V + \pi_i$ , где  $\varpi_i = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_{3i})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_i)}, \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_{4i})}{\lambda_{\max}(\mathbf{H}_i)} \right\}$ . Решив последнее неравенство, получим  $V \leq e^{-\varpi_i t} V(0) + \varpi_i^{-1} (1 - e^{-\varpi_i t}) \pi_i$ . Тогда в силу структуры (П.2)  $|\varepsilon_i(t)|^2 \leq \lambda_{\min}(\mathbf{P}_i) (e^{-\varpi_i t} V(0) + (1 - e^{-\varpi_i t}) \varpi_i^{-1} \pi_i)$  для  $t \in [0, t_{fi}]$ , причем значение правой части последнего неравенства зависит от величины  $\mu_0$ . Очевидно, что уменьшением числа  $\mu_0$  можно уменьшить значение  $|\varepsilon_i(t)|$ , а значит, уменьшить погрешность, возникающую при субминимизации критерия (2), что подтверждено результатами моделирования.

#### Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления. Теория оптимизации автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2004. – Т. 4. – 744 с.
2. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
3. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб: Наука, 2003. – 282 с.
4. Бобцов А.А. Алгоритм робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 8. – С. 82–96.
5. Фуртат И.Б. Робастное субоптимальное управление линейными нестационарными объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 7. – С. 7–12.
6. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – С. 103–115.
7. Теория автоматического управления. Ч. 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.
8. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – V. 44. – № 9. – P. 1672–1687.
9. Брусин В.А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 4. – С. 119–127.

**Фуртат Игорь Борисович**

– Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, cainenash@mail.ru