

УДК 681.5

**ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ СКОРОСТНОГО
ГРАДИЕНТА В ЗАДАЧАХ КРАТНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ
ВИБРАЦИОННЫХ УСТАНОВОК⁵****А.Л. Фрадков, О.П. Томчина, В.А. Галицкая, Д.В. Горлатов**

Описываются интегро-дифференцирующие алгоритмы скоростного градиента, частными случаями которых являются пропорциональные, интегральные и пропорционально-интегральные алгоритмы скоростного градиента. Вводится определение кратной приближенной частотно-координатной синхронизации, синтезируются интегро-дифференцирующие алгоритмы управления кратной синхронизацией вибрационных установок. Приводятся результаты сравнительного компьютерного исследования пропорционального и пропорционально-интегрального алгоритмов, показывающие, что предложенные алгоритмы обладают рядом преимуществ перед уже известными.

Ключевые слова: интегро-дифференцирующие алгоритмы, скоростной градиент, кратная синхронизация, вибрационная установка, вибротранспортирование.

Введение

При проектировании вибрационных установок, осуществляющих грохочение, дробление, вибротранспортирование сыпучих материалов и другие технологические операции, повышение производительности в значительной мере определяется стабильностью синхронного режима вращения вибровозбудителей. Традиционный подход базируется на явлении самосинхронизации, открытом и изученном И.И. Блехманом [1]. Дополнительные технологические возможности использования виброустановок предоставляет режим кратной синхронизации, при котором вибровозбудители вращаются со средними угловыми скоростями, кратными друг другу. Кратный синхронный режим, вносящий асимметрию в систему, способствует возникновению и усилению эффекта вибрационного перемещения, особенно для таких трудноосуществимых технологических процессов, как транспортирование пылевидных, влажных и липких грузов. При этом синхронность обеспечивает максимальную скорость вибротранспортирования. Кроме того, наличие двух различных частот вращения роторов позволяет транспортно-технологическим машинам осуществлять одновременно вибротранспортирование, возбуждаемое низкой частотой, а также просеивание и сепарацию сыпучих материалов, осуществляемые за счет большей кратной частоты. Но при рассмотрении задач кратной синхронизации стабильная самосинхронизация может и не наблюдаться. Условия на соотношение масс и на взаимное расположение роторов и несущей платформы, обеспечивающее кратную самосинхронизацию, были получены в работах [2–4]. Однако в ряде практически важных случаев эти условия не выполняются, и режим кратной самосинхронизации оказывается неустойчивым.

В связи с этим разработка новых подходов к решению задачи обеспечения стабильного кратного синхронного вращения вибровозбудителей является актуальной технической задачей. Одним из перспективных подходов является подход, основанный на управляемой синхронизации. Управлению синхронизацией колебательных механических систем посвящен целый ряд работ [5–7]. В настоящей работе рассматривается подход, основанный на применении интегро-дифференцирующих алгоритмов скоростного градиента [8, 9], синтезируемых из условия обеспечения стабильного кратного синхронного режима. Предложены и исследованы новые алгоритмы управления кратной синхронизацией, обеспечивающие улучшенные характеристики процессов в системе.

Интегро-дифференцирующие алгоритмы скоростного градиента

В данном разделе, следуя [8], описывается общий подход к синтезу нелинейных систем управления – так называемый метод скоростного градиента, предложенный в конце 70-х годов прошлого века первона-

⁵ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Кадры» (соглашения 8846, 8855), Программы 10 ОЭММПУ РАН, и РФФИ (грант 11-08-01218).

чально для задач адаптивного управления [10]. Метод основан на использовании функций Ляпунова и требует задания цели управления как уменьшения значений некоторой скалярной целевой функции (функционала) до заданной величины.

Описано несколько типов алгоритмов скоростного градиента: алгоритмы в дифференциальной и конечной формах, построенные по локальному или интегральному целевому функционалу. Завершается раздел описанием интегро-дифференцирующих алгоритмов, при синтезе которых используются как дифференциальные, так и интегральные операторы. Эти алгоритмы будут использоваться в последующих разделах для управления синхронизацией вибрационных установок.

Исходными данными для синтеза алгоритма управления являются уравнение объекта управления (далее называемого для краткости объектом) и цель управления. Будем считать, что объект задан уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния объекта; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ – вектор управления (настраиваемых параметров); вектор-функция $\mathbf{F}(\cdot)$ определена при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$, $t \geq 0$, кусочно-непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по \mathbf{x} , \mathbf{u} .

Цель управления зададим в виде

$$Q_t \leq \Delta, \quad t > t_*, \quad (2)$$

где Q_t – целевой функционал (постоянные Δ , t_* могут быть заданы или нет в зависимости от конкретной задачи). Будем различать два типа целевых функционалов: локальный и интегральный. Локальным называется функционал вида

$$Q_t = Q(\mathbf{x}(t), t),$$

где $Q(\mathbf{x}, t)$ – скалярная функция $n+1$ переменных. Функционал вида

$$Q_t = \int_0^t R(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau,$$

где $R(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ – скалярная функция $n+m+1$ переменных, будем называть интегральным.

Ставится задача: определить алгоритм управления

$$\mathbf{u}(t) = U[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad (3)$$

так, чтобы в системе (1), (3) достигалась цель управления (2) и все ее траектории оставались ограниченными при $t \geq 0$.

Отметим прежде всего, что сформулированная задача весьма общая и включает как частные случаи различные типы задач управления и адаптации. Например, в качестве цели управления (2) может фигурировать как исходная цель управления, так и некоторая вспомогательная цель, выражающая требования к синтезируемой системе. Уравнение (1) также может относиться к различным системам. Более того, в одной и той же системе управления модель (1) может использоваться для описания различных частей системы так, что переменные x , u могут иметь различный смысл. Введение такого унифицированного описания позволяет единообразно ставить и решать задачи синтеза как основного контура, так и контура адаптации в адаптивных системах.

Важную роль в задачах синтеза нелинейных и адаптивных систем играет класс объектов, линейных по входам:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно переписать также в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_i, \quad (5)$$

где \mathbf{u}_i – компоненты вектора $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$; $\mathbf{B}_i(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n$ – столбцы матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$.

Пусть цель управления (2) задана при помощи локального целевого функционала $Q_t = Q(\mathbf{x}(t), t)$. Для построения алгоритма управления (3) вычислим скалярную функцию $\dot{Q}(t) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ – скорость изменения Q_t в силу уравнения объекта (1):

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{\partial Q(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, t)]^T \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Затем найдем градиент $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ по входным переменным

$$\nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \left[\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{u}} \right]^T = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, t)^T.$$

Наконец, зададим алгоритм изменения $\mathbf{u}(t)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\Gamma \nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (6)$$

где $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T > 0$ – симметрическая положительно определенная матрица, например $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $\gamma_i > 0$. Алгоритм (6) естественно назвать алгоритмом скоростного градиента (АСГ), поскольку в нем изменение $\mathbf{u}(t)$ происходит пропорционально градиенту скорости изменения Q_t . Интегрируя (6) на промежутке $[0, t]$, можно записать АСГ в форме (3) с интегральным оператором $U(\cdot)$.

Происхождение алгоритма (6) можно объяснить следующим образом. Для достижения цели управления (2) желательно изменять $\mathbf{u}(t)$ в направлении уменьшения Q_t . Однако Q_t не зависит от $\mathbf{u}(t)$, и найти такое направление затруднительно (в частности, это связано с нахождением функций чувствительности). Вместо этого можно пытаться уменьшить Q_t , стремясь к выполнению неравенства $\dot{Q}(t) < 0$, означающего, в свою очередь, уменьшение Q_t . Функция $\dot{Q}(t) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ уже явно зависит от \mathbf{u} , что и позволяет написать алгоритм (6). Можно также рассматривать АСГ как непрерывный аналог или «идеализированный» вариант дискретного градиентного алгоритма, поскольку при малом шаге дискретизации градиент целевой функции, совпадающий с градиентом ее приращения, приближается по направлению к градиенту скорости изменения целевой функции в силу объекта [8].

В качестве примера выпишем АСГ для задачи регулирования линейного по входам объекта управления (4) при целевой функции

$$Q(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{y} - \mathbf{y}_*(t)]^T \mathbf{H}[\mathbf{y} - \mathbf{y}_*(t)], \quad (7)$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^l$; $\mathbf{y}_*(t) \in \mathbf{R}^l$ – задающее воздействие (желаемая траектория выхода); $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ – гладкая вектор-функция; \mathbf{H} – $l \times l$ -матрица. Скорость изменения $Q(\mathbf{x}, t)$ будет равна

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = [\mathbf{y} - \mathbf{y}_*(t)]^T \mathbf{H}[\mathbf{C}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} - \dot{\mathbf{y}}_*(t)], \quad (8)$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = \partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) / \partial \mathbf{x}$, а скоростной градиент и АСГ примут вид соответственно

$$\nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{C}^T \mathbf{H}[\mathbf{y} - \mathbf{y}_*(t)], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mathbf{\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{C}^T \mathbf{H}[\mathbf{y} - \mathbf{y}_*(t)]. \quad (10)$$

В качестве матрицы усиления $\mathbf{\Gamma}$ часто берется диагональная ($\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_i\}$) или скалярная ($\mathbf{\Gamma} = \gamma \mathbf{I}$) матрица (γ_i, γ – положительные числа). Алгоритм (10) при $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{const}$ и $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = \text{const}$ представляет собой хорошо известный интегральный закон регулирования.

Алгоритм управления (3) может конкретизироваться не только в дифференциальной, но и в конечной форме. АСГ в конечной форме имеет вид

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{\Gamma} \nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (11)$$

где \mathbf{u}_0 – некоторое начальное (опорное) значение управления. Введем более общую структуру

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 - \gamma \psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (12)$$

где $\gamma > 0$ – скалярный множитель шага (коэффициент усиления), а вектор-функция $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ удовлетворяет условию псевдоградиентности

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)^T \nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \geq 0, \quad (13)$$

и назовем (12) алгоритмом скоростного псевдоградиента.

Запись (12) является, вообще говоря, уравнением относительно $\mathbf{u}(t)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что это уравнение однозначно разрешимо при данном \mathbf{u}_0 и любых \mathbf{x}, t . Для этого достаточно, например, чтобы функция $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ не зависела явно от управления или удовлетворяла условию Липшица

$$|\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \psi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, t)| \leq L |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}|, \quad L < 1.$$

Очевидно, частным случаем (12) является алгоритм (11), поскольку $\psi(\cdot) = \mathbf{\Gamma} \nabla_{\mathbf{u}} \omega(\cdot)$ удовлетворяет (13). Однако (12) включает и другие структуры, например, знаковый алгоритм

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 - \gamma \text{sign} \nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (14)$$

где знак вектора понимается покомпонентно: для $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, \dots, x_m)$ имеем

$$\text{sign } \mathbf{x} = \text{col}(\text{sign } x_1, \dots, \text{sign } x_m).$$

Выпишем алгоритм скоростного градиента в конечной форме для линейного объекта (4) и квадратичной целевой функции $Q(x) = 0,5(\mathbf{y} - \mathbf{y}_*)^2$ при $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^1, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^1$. Считая $\mathbf{u}_0 = 0$, получим алгоритм (11) в виде

$$\mathbf{u}(t) = -\gamma(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_*),$$

представляющем собой классический пропорциональный закон регулирования. Алгоритм (14) принимает вид

$$\mathbf{u}(t) = -\gamma \text{sign}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_*),$$

т. е. задает релейный закон регулирования. Выпишем алгоритм (14) для задачи (7), (13) с квадратичной целевой функцией и аффинным по входу объектом управления:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 - \gamma \text{sign}[\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{C}\mathbf{H}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_*(t))]. \quad (15)$$

Выписанные выше алгоритмы можно использовать во всевозможных сочетаниях. Наиболее употребительными из них являются алгоритм с локально-интегральным функционалом

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\Gamma \nabla_{\mathbf{u}} [\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \delta R(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)] \quad (16)$$

(очевидно, (16) является АСГ по отношению к функционалу

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \delta \int_0^t R(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau$$

и АСГ в конечно-дифференциальной форме

$$\frac{d[\mathbf{u} + \gamma \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)]}{dt} = -\Gamma \nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Наконец, наиболее общая форма АСГ имеет вид

$$\frac{d[\mathbf{u} + \gamma \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)]}{dt} = -\Gamma \nabla_{\mathbf{u}} [\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \delta R(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)]. \quad (17)$$

Алгоритм (17) становится более наглядным в частном случае, если взять

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad R(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}|^2, \quad \Gamma = \beta \mathbf{I},$$

где $\bar{\mathbf{u}}$ – некоторый постоянный вектор. Тогда $\nabla_{\mathbf{u}} R(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, и, меняя местами вторые слагаемые в (17), алгоритм можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \delta(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = -\beta \nabla_{\mathbf{u}} \omega - \frac{\gamma d(\nabla_{\mathbf{u}} \omega)}{dt}. \quad (18)$$

Соотношение (18) задает преобразование вектора $\nabla_{\mathbf{u}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ в вектор поправки к управлению $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$. Очевидно, этот закон является линейным и может быть описан передаточной матрицей

$$\mathbf{W}(p) = -\frac{\beta + \gamma p}{p + \delta} \mathbf{I}, \quad (19)$$

т.е. алгоритму (18) соответствует матричное интегро-дифференцирующее звено (18) [8, 9].

Применение интегро-дифференцирующего алгоритма для управления синхронизацией двухроторной виброустановки

Расчетная схема для синтеза уравнений динамики двухроторного вибрационного стенда [7] представлена на рис. 1.

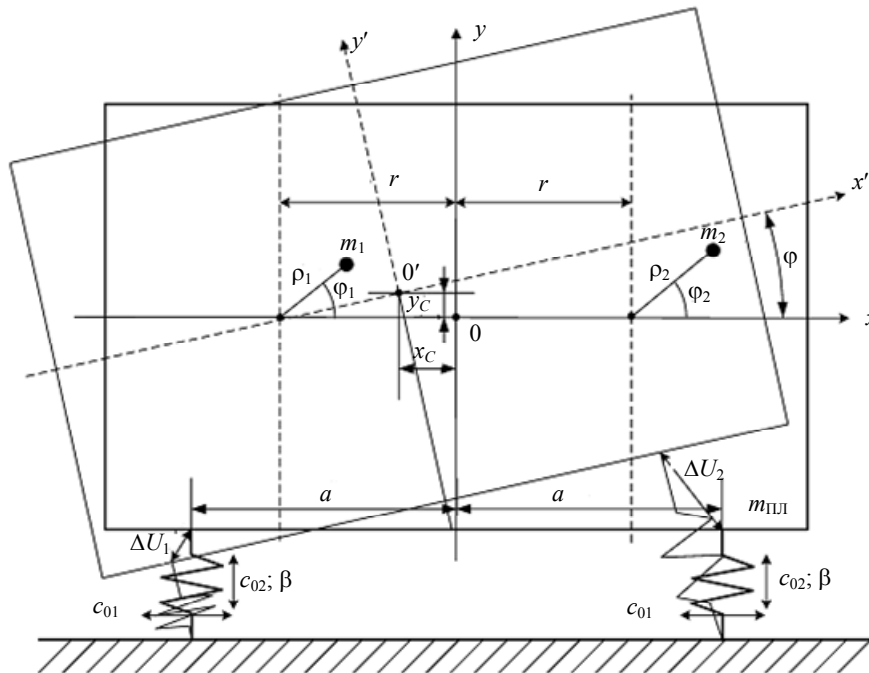


Рис. 1. Расчетная схема двухроторного вибрационного стенда

На рисунке используются следующие обозначения: m_i – масса i -го неуравновешенного ротора; ρ_i – эксцентриситет i -го ротора; $i = 1, 2$; $m_{пл}$ – масса платформы; x_c, y_c – текущие координаты центра масс

платформы – точки O' ; φ – угол поворота платформы; φ_1, φ_2 – углы отклонения неуравновешенных роторов от горизонтального положения; r – расстояние между центром платформы и точками крепления неуравновешенных роторов; β – коэффициент демпфирования пружин. Четыре упругих опоры, на которых закреплена платформа вибрационного стенда, рассматриваются в динамической модели вертикального движения как две пружины с соответствующей эквивалентной жесткостью c_{0i} . В модели не учитывается скручивание пружин. Система координат, связанная с платформой, обозначена $O'x'y'$. Абсциссы крепления пружин $x_{ni} = \pm a$.

Уравнения динамики двухроторной виброустановки, синтезируемые в виде уравнений Лагранжа второго рода, имеют следующий вид [11]:

$$\begin{aligned}
 & m_0 \ddot{x}_c - \dot{\varphi} m r (\sin(\varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi + \varphi_2)) - \dot{\varphi}_1 m r \sin(\varphi + \varphi_1) - \dot{\varphi}_2 m r \sin(\varphi + \varphi_2) - \\
 & - \dot{\varphi}^2 m r (\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos(\varphi + \varphi_2)) - \dot{\varphi}_1^2 m r \cos(\varphi + \varphi_1) - \dot{\varphi}_2^2 m r \cos(\varphi + \varphi_2) - \\
 & - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 m r \cos(\varphi + \varphi_1) - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_2 m r \cos(\varphi + \varphi_2) + 2c_{01}x_c + \beta\dot{x}_c = 0; \\
 & m_0 \ddot{y}_c + \dot{\varphi} m r (\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos(\varphi + \varphi_2)) - \dot{\varphi}_1 m r \cos(\varphi + \varphi_1) - \dot{\varphi}_2 m r \cos(\varphi + \varphi_2) - \\
 & - \dot{\varphi}^2 m r (\sin(\varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi + \varphi_2)) - \dot{\varphi}_1^2 m r \sin(\varphi + \varphi_1) - \dot{\varphi}_2^2 m r \sin(\varphi + \varphi_2) - \\
 & - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 m r \sin(\varphi + \varphi_1) - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_2 m r \sin(\varphi + \varphi_2) + m_0 g + 2c_{02}y_c + \beta\dot{y}_c = 0; \\
 & -\ddot{x}_c m r (\sin(\varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi + \varphi_2)) + \ddot{y}_c m r (\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos(\varphi + \varphi_2)) + \\
 & + \ddot{\varphi} (J + J_1 + J_2 - 2r m r (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)) + \\
 & + \ddot{\varphi}_1 (J_1 - r m r \cos \varphi_1) + \ddot{\varphi}_2 (J_2 + r m r \cos \varphi_2) + \\
 & + \dot{\varphi}_1^2 r m r \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2^2 r m r \sin \varphi_2 + 2r m r \dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - 2r m r \dot{\varphi}\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \\
 & + m r g (\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos(\varphi + \varphi_2)) + c_{03}\varphi + \beta\dot{\varphi} = 0; \\
 & -\ddot{x}_c m r \sin(\varphi + \varphi_1) + \ddot{y}_c m r \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\varphi} (J_1 - r m r \cos \varphi_1) + \\
 & + \ddot{\varphi}_1 J_1 - \dot{\varphi}^2 r m r \sin \varphi_1 + m r g \cos(\varphi + \varphi_1) + k_c \dot{\varphi}_1 = M_1; \\
 & -\ddot{x}_c m r \sin(\varphi + \varphi_2) + \ddot{y}_c m r \cos(\varphi + \varphi_2) + \ddot{\varphi} (J_2 + r m r \cos \varphi_2) + \\
 & + \ddot{\varphi}_2 J_2 + \dot{\varphi}^2 r m r \sin \varphi_2 + m r g \cos(\varphi + \varphi_2) + k_c \dot{\varphi}_2 = M_2;
 \end{aligned} \tag{20}$$

где M_1, M_2 – управляющие моменты.

Частотная синхронизация понимается как точное совпадение угловых скоростей несбалансированных роторов: $\omega_s = \omega_r$; $s, r = 1, \dots, k$. Более общий случай – это кратная частотная синхронизация, когда скорости вибровозбудителей пропорциональны [12]:

$$\omega_i = n_i \omega^* \quad (i = 1, \dots, k)$$

для некоторых целых n_i , где $\omega^* > 0$ – синхронная частота.

На практике для случая кратной синхронизации скоростей (средних скоростей) вибровозбудителей имеет смысл рассматривать приближенную синхронизацию:

$$\left| \omega_s - \frac{n_s}{n_r} \cdot \omega_r \right| \leq \varepsilon, \tag{21}$$

где $\varepsilon > 0$, численно может быть выбрано $\varepsilon = 0,05 \omega^*$, по аналогии с заданной точностью при традиционном определении времени переходного процесса. Однако соотношение (21) само по себе недостаточно для синхронизации, поскольку его выполнение не запрещает накопления приведенной ошибки синхронизации по фазам (приведенного сдвига фаз). В связи с этим возникает необходимость наложить дополнительные требования на обобщенные координаты (фазы) системы.

Координатная синхронизация, хорошо изученная в физике и механике [1, 7, 12], возникает, когда выходы или некоторые фазовые координаты одной из подсистем вибровозбудителей совпадают с соответствующими координатами других подсистем при всех $t \geq t_0$.

Понятие *кратной координатной синхронизации*, сформулированное в [12, 13], предполагает, что фазы вибровозбудителей $\varphi_i, i = 1, \dots, k$ удовлетворяют тождествам

$$\frac{\varphi_s}{n_s} - \frac{\varphi_r}{n_r} = L_{sr}; \quad s, r = 1, \dots, k. \tag{22}$$

В практических задачах соотношение (22) может выполняться лишь приближенно, т.е. должно быть заменено на

$$\left| \frac{\varphi_s}{n_s} - \frac{\varphi_r}{n_r} - L_{sr} \right| < \varepsilon; \quad s, r = 1, \dots, k. \tag{23}$$

Будем говорить, что в системе имеет место *приближенная частотно-координатная синхронизация*, если одновременно выполняются соотношения (21) и (23) для некоторых $\varepsilon > 0, L_{sr}$.

Для обеспечения кратного синхронного режима вращения неуравновешенных роторов для системы (20) предлагается выбрать целевой функционал в виде

$$Q(z) = 0,5 \left\{ (1-\alpha)(H-H^*)^2 + \alpha(\dot{\varphi}_1/n_1 \pm \dot{\varphi}_2/n_2)^2 \right\}, \quad (24)$$

где $0 < \alpha < 1$ – весовой коэффициент, H – полная механическая энергия системы (20).

В соответствии со схемой скоростного градиента, положив $\beta = 0$, $\delta = 0$ в (19), получим из (24) пропорциональный алгоритм (П-алгоритм) управления кратной синхронизацией [14]:

$$\begin{cases} M_1 = -\gamma_1 \left\{ (1-\alpha)(H-H^*)\dot{\varphi}_1 + \frac{\alpha}{J_1 n_1} \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) \right\}, \\ M_2 = -\gamma_2 \left\{ (1-\alpha)(H-H^*)\dot{\varphi}_2 \pm \frac{\alpha}{J_2 n_2} \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) \right\}, \end{cases} \quad (25)$$

а положив $\delta = 0$, получим пропорционально-интегральный алгоритм (ПИ-алгоритм) управления:

$$\begin{cases} M_1 = -\gamma_1 \left\{ (1-\alpha) \left[(H-H^*)\dot{\varphi}_1 + \int (H-H^*)\dot{\varphi}_1 dt \right] + \frac{\alpha}{J_1 n_1} \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha}{J_1 n_1} \left(\frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} + C_1 \right) \right\}, \\ M_2 = -\gamma_2 \left\{ (1-\alpha) \left[(H-H^*)\dot{\varphi}_2 + \int (H-H^*)\dot{\varphi}_2 dt \right] \pm \frac{\alpha}{J_2 n_2} \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) \pm \frac{\alpha}{J_2 n_2} \left(\frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} + C_2 \right) \right\}. \end{cases}$$

Для упрощения реализации ПИ-алгоритма при синтезе отбросим интегралы от первых членов в правых частях (25) и запишем упрощенный ПИ-алгоритм в виде

$$\begin{cases} M_1 = -\gamma_1 \left\{ (1-\alpha)(H-H^*)\dot{\varphi}_1 + \frac{\alpha}{J_1 n_1} \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha}{J_1 n_1} \left(\frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} + \Delta\varphi_{1\text{зад}} \right) \right\}, \\ M_2 = -\gamma_2 \left\{ (1-\alpha)(H-H^*)\dot{\varphi}_2 \pm \frac{\alpha}{J_2 n_2} \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) \pm \frac{\alpha}{J_2 n_2} \left(\frac{\varphi_1}{n_1} \pm \frac{\varphi_2}{n_2} + \Delta\varphi_{2\text{зад}} \right) \right\}. \end{cases} \quad (26)$$

Обоснованием введенного упрощения является малость отброшенных интегралов после переходного процесса по скоростям, который заканчивается достаточно быстро. Поскольку интеграл от функции $(\dot{\varphi}_1/n_1 \pm \dot{\varphi}_2/n_2)$ равен, вообще говоря, $(\varphi_1/n_1 \pm \varphi_2/n_2 + C)$, в (26) выбрано $C = \Delta\varphi_{\text{зад}}$. Задавая $\Delta\varphi_{\text{зад}}$, можно влиять на установившееся значение приведенного сдвига фаз $\Delta\varphi(\infty)$ и, в конечном итоге, на параметры траектории платформы.

Результаты сравнительного компьютерного исследования П-алгоритма управления синхронизацией (25) и упрощенного ПИ-алгоритма (26) представлены на рис. 2 и рис. 3 соответственно. На графиках используется обозначение для скоростей роторов $\dot{\varphi}_i = \omega_i$. Как видно из рисунков, графики скоростей роторов $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ и кратной разности скоростей $\Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1/2 - \dot{\varphi}_2$ в обоих случаях идентичны. Аналогичен и характер изменения кратного сдвига фаз $\Delta\varphi = \varphi_1/2 - \varphi_2$, однако время координатной синхронизации, определяемое по графику сдвига фаз, для ПИ-алгоритма (26) почти в четыре раза меньше, чем для П-алгоритма (25).

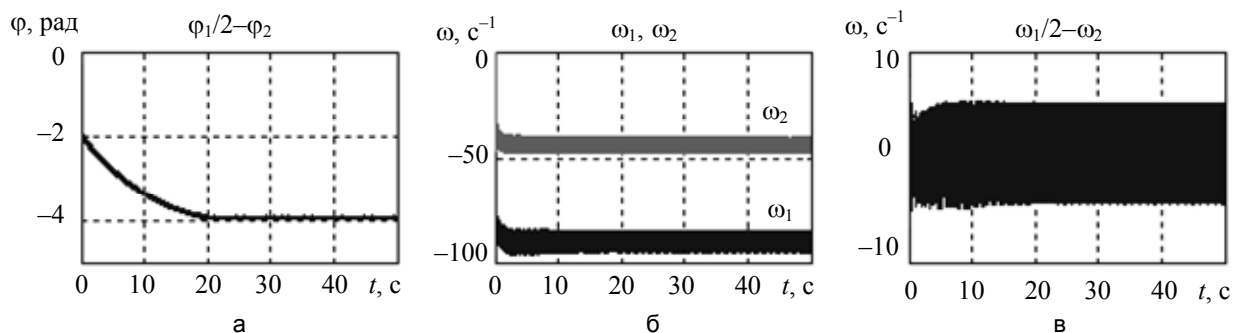


Рис. 2. Динамика двухроторной модели с П-алгоритмом управления при $n_1 = 2$, $n_2 = 1$: график кратной разности фаз роторов $\Delta\varphi = \varphi_1/2 - \varphi_2$ (а); графики изменения скоростей роторов $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ (б) и их кратной разности $\Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1/2 - \dot{\varphi}_2$ (в)

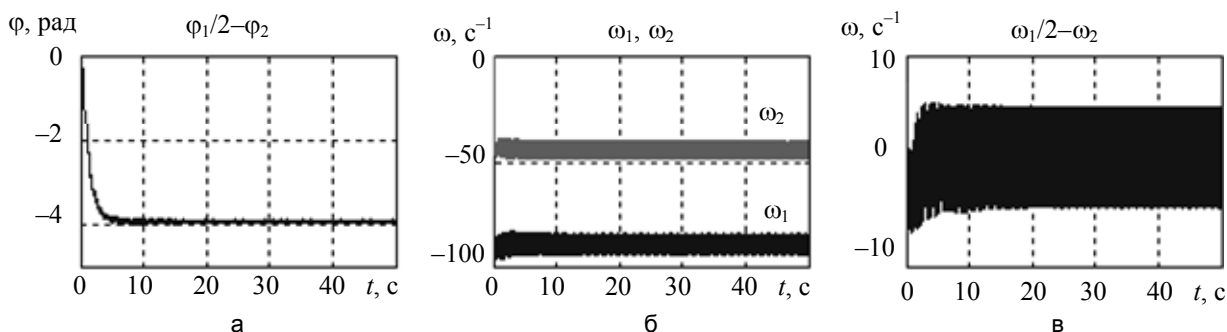


Рис. 3. Динамика двухроторной модели с ПИ-алгоритмом управления при $n_1 = 2, n_2 = 1$: график кратной разности фаз роторов $\Delta\varphi = \varphi_1 / 2 - \varphi_2$ (а); графики изменения скоростей роторов $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ (б) и их кратной разности $\Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 / 2 - \dot{\varphi}_2$ (в)

Вторым существенным преимуществом ПИ-алгоритма кратной синхронизации (26) по сравнению с П-алгоритмом (25) является возможность управления траекторией платформы в вертикальной плоскости. Известно, что скорость вибротранспортирования определяется установившимся сдвигом фаз роторов, и, например, при $n_1 = 1, n_2 = 1$ скорость максимальна в случае нулевого установившегося сдвига фаз $\Delta\varphi = 0$. Но во избежание заторов на разгрузочном конце платформы часто приходится уменьшать скорость вибротранспортирования. Это можно осуществить с помощью изменения установившегося сдвига фаз $\Delta\varphi$. При этом изменяется и угол наклона траектории платформы $\varphi(t)$. Однако, применяя алгоритм (25), можно варьировать лишь отношение скоростей роторов (n_1/n_2). Например, для двукратной синхронизации возможны два варианта: $n_1/n_2 = 1/2$ или $n_1/n_2 = 2/1$. Вид траекторий платформы для указанных случаев заданного соотношения скоростей представлен на рис. 4. В случае же алгоритма (26) задача управления наклоном траектории может быть решена путем задания соответствующих сдвигов фаз $\Delta\varphi_{зад}$ в выражениях для управляющих моментов [11]. На рис. 5 представлены график изменения приведенного сдвига фаз $\Delta\varphi(\infty) = \varphi_1 - \varphi_2/2$ (рис. 5, б) и траектория центра масс платформы $y_C(x_C)$ при заданных $\Delta\varphi_{1зад} = 0; \Delta\varphi_{2зад} = 4$ рад (рис. 5, а).

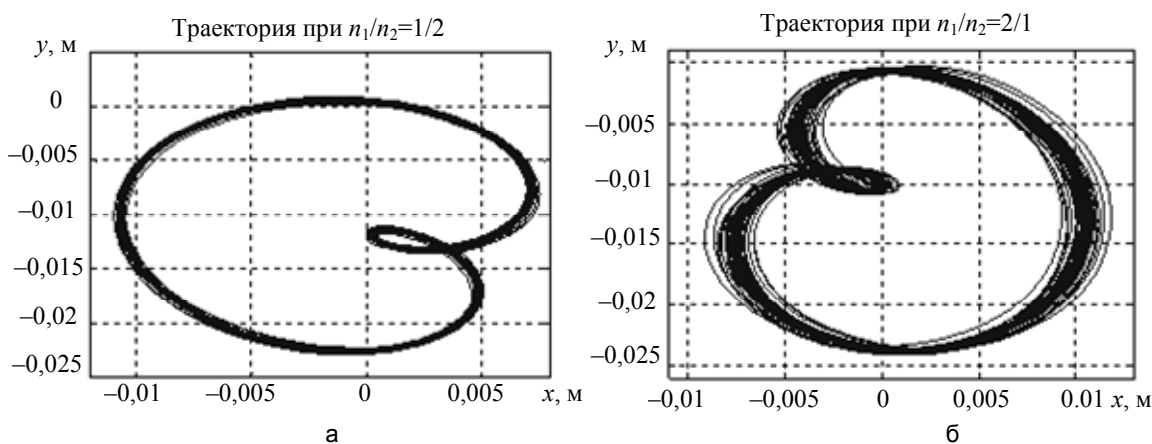


Рис. 4. Траектории центра масс платформы при управляющем алгоритме (25): $n_1/n_2 = 1/2$ (а); $n_1/n_2 = 2/1$ (б)

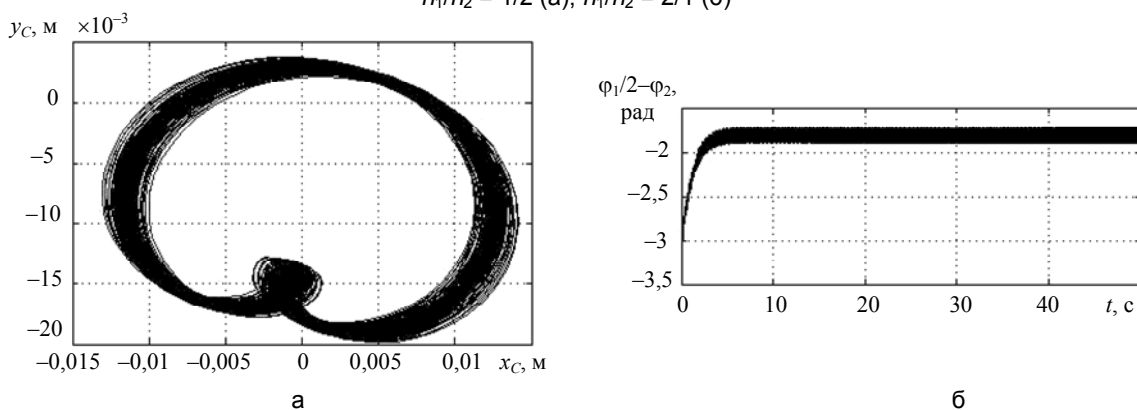


Рис. 5. Траектории центра масс платформы (а) и приведенного сдвига фаз (б) в системе с алгоритмом управления (26): $\Delta\varphi_{1зад} = 0; \Delta\varphi_{2зад} = 4$ рад

Наконец, в ходе моделирования установлено, что алгоритм (26) существенно менее чувствителен к выбору параметров алгоритма α , γ .

Заключение

В работе синтезированы интегро-дифференцирующие алгоритмы управления процессом кратной синхронизации двухроторных вибрационных установок. Представлено определение приближенной кратной частотно-координатной синхронизации. Сравнительное компьютерное исследование пропорционального и пропорционально-интегрального алгоритмов управления кратной синхронизацией показывает, что предложенные алгоритмы обладают рядом преимуществ перед уже известными. Именно, существенно уменьшается время синхронизации, появляется возможность управления траекторией платформы в вертикальной плоскости и снижается чувствительность алгоритма к выбору параметров.

Литература

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Наука, 1994. – 440 с.
2. Барзуков О.П. Кратная синхронизация в системе слабосвязанных объектов с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 36. – С. 225–231.
3. Ярошевич Н.П. К теории синхронизации механических вибровозбудителей, связанных с линейной колебательной системой // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2003. – № 4. – С. 3–10.
4. Блехман И.И., Ярошевич Н.П. Кратные режимы вибрационного поддержания вращения неуравновешенных роторов // Известия АН СССР. Машиноведение. – 1986. – № 6. – С. 62–67.
5. Blekhman I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H. and Pogromsky A.Yu. On self-synchronization and controlled synchronization // Systems and Control Letters. – 1997. – V. 31. – P. 299–305.
6. Мирошник И.В., Никифоров В.О. Методы координации в задачах планирования и управления пространственным движением манипуляционных роботов // Анализ и управление нелинейными колебательными системами / Под ред. Г.А. Леонова и А.Л. Фрадкова. – СПб: Наука, 1998. – С. 215–236.
7. Андриевский Б.Р., Блехман И.И., Борцов Ю.А., Гаврилов С.В., Коноплев В.А., Лавров Б.П., Поляхов Н.Д., Томчина О.П., Фрадков А.Л., Шестаков В.М. Управление мехатронными вибрационными установками. – СПб: Наука, 2001. – 278 с.
8. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление в сложных динамических системах. – СПб: Наука, 2000. – 549 с.
9. Фрадков А.Л. Интегро-дифференцирующие алгоритмы скоростного градиента // ДАН СССР. – Т. 288. – № 4. – С. 832–835.
10. Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 9. – С. 90–101.
11. Галицкая В.А., Томчина О.П. Пропорционально-интегральный энергоскоростной алгоритм управления кратной синхронизацией роторов вибрационной установки // Информатика и системы управления. – 2012. – № 3. – С. 158–168.
12. Blekhman I.I., Fradkov A.L. On general definitions of synchronization // Selected topics in vibrational mechanics. – Singapore: World Scientific. – 2004. – P. 179–188.
13. Томчина О.П., Томчин Д.А., Горлатов Д.В. Алгоритм управления кратной синхронизацией для виброустановки с роторами, имеющими разные массоинерционные характеристики // Современное машиностроение. Наука и образование: материалы 2-й Международной научно-практической конференции. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С. 752–762.
14. Кудрявцева И.М., Томчина О.П. Алгоритм кратной синхронизации для двухроторного вибрационного стенда с нестационарной нагрузкой // Информатика и системы управления. – 2009. – № 3 (21). – С. 34–44.

- Фрадков Александр Львович** – ФГБУН Институт проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН), доктор технических наук, профессор, зав. лабораторией, fradkov@mail.ru
- Томчина Ольга Петровна** – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, кандидат технических наук, доцент, otomchina@mail.ru
- Галицкая Виктория Андреевна** – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, аспирант, Kvika86@mail.ru
- Горлатов Дмитрий Владимирович** – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, аспирант, dprog@mail.ru