9 ЭКОНОМИКА И ФИНАНСЫ. МЕНЕДЖМЕНТ

УДК 51.7, 519.86, 519.68

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ В АВТОМАТИЧЕСКИХ ТОРГОВЫХ СТРАТЕГИЯХ

А.В. Торопов, Д.В. Иванов, Ю.А. Шполянский

Аналитическими и численными методами реализованы модели теоретического ценообразования европейских, американских, азиатских и барьерных опционов. Для случая многократных выплат дискретных дивидендов применен оригинальный вычислительный подход. На основе этих моделей разработаны автоматические торговые стратегии маркет-мейкинга, хеджирования, управления рисками и торговли комбинациями опционов, успешно используемые крупными банками и трейдинговыми фирмами.

Ключевые слова: теоретическое ценообразование, опцион, торговая стратегия, алгоритмическая торговля.

Введение

Алгоритмическая торговля (algorithmic trading) – процесс совершения сделок на финансовых рынках в автоматическом режиме с помощью специализированных компьютерных программ, реализующих различные торговые стратегии – алгоритмы принятия решений о совершении торговых операций. Такие программы называют автоматическими торговыми стратегиями.

Роль алгоритмической торговли в финансовых организациях неуклонно растет с каждым годом. В последнее десятилетие особенно популярной становится высокочастотная торговля (high-frequency trading). Этот вид алгоритмической торговли представляет собой многократное открытие и закрытие позиций по одним и тем же финансовым инструментам в течение торгового дня. Высокочастотная торговля получает активное развитие, в том числе благодаря своему положительному влиянию на рынок ценных бумаг: повышает ликвидность, привлекает малых инвесторов и обеспечивает лучшую цену при больших объемах сделки [1–3].

Для выполнения автоматических торговых стратегий необходима обширная программно-техническая инфраструктура – система для алгоритмической торговли, решающая такие задачи, как получение котировок с удаленных электронных рынков; создание и управление заказами; работа с портфелями ценных бумаг; обеспечение интерактивного графического взаимодействия с пользователем в условиях большого объема разнотипной информации и т.д. На современных биржах торгуются сотни тысяч финансовых инструментов, цены изменяются тысячи раз в секунду, а заключение сделок занимает микросекунды. Именно поэтому важнейшим требованием к системам алгоритмической торговли со стороны финансовых организаций является максимальное быстродействие на всех уровнях. Примером такой системы является коммерческий программный комплекс компании Tbricks AB [4].

Система Tbricks представляет собой распределенную систему с клиент-серверной архитектурой, разделенную на отдельные сервисы. Ее специфическими особенностями являются широкие функциональные возможности, покрывающие требования различных финансовых организаций; хорошая масштабируемость; эффективная работа на любом количестве серверов (имеется успешный опыт использования от 1 до 20 серверов с 8–24 CPU каждый); автоматическое перераспределение нагрузки (load-balancing).

Для реализации финансовой бизнес-логики в торговых стратегиях необходим инструментарий, позволяющий в автоматическом режиме принимать решения о посылке/изменении заказа на рынок или о заключении сделки. Один из широко распространенных подходов – использование теоретического ценообразования (theoretical pricing). Задачей настоящей работы было применение теоретического ценообразования для разработки автоматических торговых стратегий. На основе современных моделей теоретической оценки финансовых инструментов авторами созданы стратегии торговли опционами, маркет-мейкинга, хеджирования, управления рисками. Стратегии реализованы в виде плагинов для коммерческой системы алгоритмической торговли Tbricks.

Теоретическое ценообразование

Финансовые инструменты можно разделить на две большие группы – базовые активы и производные инструменты, или деривативы (derivatives). Цена производных инструментов зависит от цены и свойств базового актива. Базовыми активами могут быть акции, финансовые индексы или другие деривативы (например, фьючерсы). Одним из самых распространенных производных финансовых инструментов является опцион – соглашение на право купить (колл-опцион) или продать (пут-опцион) базовый инструмент по определенной цене (цена исполнения) и в определенное время (срок истечения) [5]. На современных биржах торгуется множество видов опционов, различающиеся деталями соглашения. Наиболее распространенными являются европейские и американские опционы [5]. Кроме этого, достаточно популярны экзотические (exotic) опционы. Авторами рассмотрены азиатские и барьерные опционы [5–8], а также турбо варранты (turbo warrant) [9].

Основной задачей теоретического ценообразования является вычисление справедливой стоимости [6], которая определяет рациональную, свободную от арбитражных возможностей оценку потенциальной рыночной стоимости финансового инструмента, принимающую во внимание объективные рыночные факторы. Известны различные подходы к вычислению справедливой стоимости, приводящие к аналитическим или численным методам расчета [5–9].

Наиболее известной является модель Блэка–Шоулза–Мертона, которая описывает зависимость цены опциона $V(S,t)$ от цены базового актива S (спот-цена, от spot price) и времени t в виде дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП) [5, 6]:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0\,, \qquad (1)$$

где r – безрисковая процентная ставка; σ – волатильность.

Кроме справедливой стоимости, важную роль в теоретическом ценообразовании играют ее частные производные [5, 6], например: «дельта» – $\Delta=\partial V/\partial S$; «гамма» – $\Gamma=\partial^2 V/\partial S^2$; «тета» – $\theta=\partial V/\partial t$; «вега» – $\nu=\partial V/\partial\sigma$ и др., показывающие меру чувствительности к изменению различных рыночных параметров. В финансовой математике их называют греческими производными, так как они обозначаются буквами греческого алфавита.

При некоторых видах начальных и граничных условий, связанных со свойствами опционов, уравнение (1) имеет аналитические решения. Нами использованы аналитические формулы для оценки справедливой стоимости европейских [5, 6, 8] и азиатских [7] опционов, а также турбо варрантов [9]. Эти формулы корректны при отсутствии выплат дискретных дивидендов по базовому активу.

В общем случае найти точное решение не удается, и на первый план выходят численные методы [5, 6, 10, 11]. Для американских опционов использовалась биномиальная модель [10]. Для остальных видов опционов при наличии дискретных дивидендов с датами выплат $t=t_{d,k}$, $k=1..K, K\geq 1$ был реализован оригинальный подход, схема которого показана на рис. 1. Временной промежуток I от даты исполнения T до даты выплаты последнего дивиденда $t_{d,K}$ (в сторону уменьшения t) покрывается аналитической формулой для цены опциона без дивидендов. Далее на участке II от $t_{d,K}$ до текущего момента $t=0$ применяется схема Кранка–Николсона численного решения ДУЧП (1) [6].

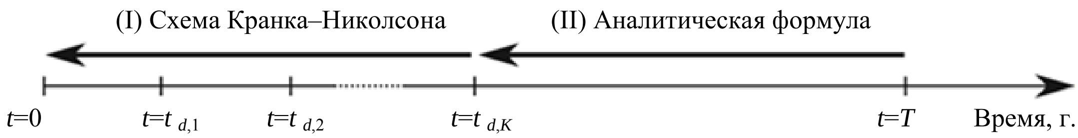

Рис. 1. Метод расчета цен опционов с многократными дискретными дивидендами

К достоинствам этого метода можно отнести сокращение размера расчетной области, уменьшение погрешности за счет применения точных аналитических решений на участке I и использования гладкого терминального условия при $t=t_{d,K}$ на участке II. Подобраны параметры сетки, обеспечивающие необходимую точность (относительная ошибка менее 10^{-4} по сравнению с аналитическим решением при обнулении дивидендов) при высокой скорости расчета (менее 200 мкс): 200 шагов сетки по цене базового актива и 50 шагов по времени на один год. Анализ для случая азиатских опционов приведен в работе [12]. Детальному описанию применения метода для других видов опционов планируется посвятить отдельную работу.

Перечисленные методы интегрированы нами в систему высокочастотной алгоритмической торговли компании Tbricks AB [4]. На основе полученной функциональности разработан ряд торговых стратегий, речь о которых пойдет в следующих разделах.

Маркет-мейкинг

Маркет-мейкер (market-maker) – один из важнейших участников биржевой торговли, берущий на себя риски приобретения и хранения ценных бумаг для организации их продаж. Маркет-мейкер заключает с биржей контракт, согласно которому он обязан держать активные заказы на покупку и продажу опционов (квотировать, от to quote) в течение всего торгового времени. Такие соглашения оговаривают группы квотируемых опционов, максимальную разницу между ценой покупки и продажи (спрэд, от spread) и другие условия. От биржи маркет-мейкер получает либо денежную компенсацию, либо уменьшенную комиссию на заключение сделок, что дает ему возможность вести торговую деятельность с меньшими издержками. Маркет-мейкеры повышают ликвидность квотируемых инструментов и обеспечивают цену, близкую к лучшей на рынке, при больших объемах сделок (увеличивают глубину рынка).

Главным вопросом при создании стратегии маркет-мейкера становится выбор цен для котировок, так как торговля по необоснованным ценам может принести серьезные убытки.

Естественное решение здесь – базирование котировок на теоретической стоимости, так как это позволяет правильно застраховать свои риски путем хеджирования сделок (см. далее раздел «Хеджирование»). Алгоритм, реализованный нами, проиллюстрирован на рис. 2. Базовый инструмент торгуется на рынке по ценам покупки S_b и продажи S_a. Соответствующие теоретические цены покупки V_b и продажи V_a производного инструмента раздвигаются в меньшую и большую сторону до значений M_b и M_a соответственно, чтобы обеспечить задаваемый маркет-мейкером спрэд.

Рис. 2. Алгоритм выбора цен для квотирования

Важным требованием при реализации такого подхода является высокая скорость расчета теоретической стоимости при изменении цены базового актива. Задержки в расчете приводят к квотированию инструментов по устаревшим ценам и соответственно могут принести убытки маркет-мейкеру. На современных финансовых рынках на одном активе может базироваться до тысячи опционов с разными ценами и сроками исполнения. Наша реализация обеспечивает пересчет квот на все опционы, базированные на одном активе, за 300–500 мкс, что, по отзывам финансовых организаций, соответствует современным требованиям к системам высокочастотной торговли.

Теоретические значения предварительно рассчитываются для некоторого диапазона вокруг текущей цены базового актива и кэшируются в памяти. Это позволяет достичь указанной выше скорости пересчета квот вне зависимости от видов опционов и наличия дивидендных выплат. При движении цены диапазон модифицируется в соответствии с ценой базового актива. Чтобы избежать постоянного изменения границ диапазона в связи с малыми колебаниями цены на рынке, был применен механизм реагирования только на существенные движения цены.

Хеджирование

Хеджирование (hedge) – это стратегия страхования рисков, связанных с изменением рыночных параметров, например, движением цены базового актива (дельта-хеджирование) или изменением волатильности (вега-хеджирование).

Рассмотрим опцион на покупку акции, дельта которой в настоящий момент составляет $\Delta_0 = \partial V/\partial S\big|_{S=S_0}$, где S_0 – текущая цена акции. Сформируем портфель Π ценных бумаг, продав один колл-опцион и купив Δ_0 единиц базового актива:

$$\Pi = \begin{cases} -1 \text{ колл-опцион} \\ +\Delta_0 \text{ базового актива}. \end{cases}$$

Справедливая стоимость P портфеля Π как функция цены актива S имеет вид

$$P(S) = -V(S) + \Delta_0 \cdot S.$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора вблизи цены S_0:

$$P(S) = P(S_0) + \left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S=S_0} \cdot (S - S_0) + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\right|_{S=S_0} \cdot (S - S_0)^2 + O\left[(S - S_0)^3\right].$$

Для нашего портфеля при $S = S_0$ имеем:

$$\Delta_P = \left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S=S_0} = -\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{S=S_0} + \Delta_0 = 0, \qquad \Gamma_P = \left.\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\right|_{S=S_0} = -\left.\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|_{S=S_0} = -\Gamma_0.$$

Видно, что при малых отклонениях цены S относительно S_0 цена портфеля в линейном приближении остается неизменной. Такой портфель называют дельта-нейтральным. В квадратичном приближении стоимость портфеля изменяется пропорционально $\Gamma_P = -\Gamma_0$, т.е. при $\Gamma_P > 0$ стоимость P возрастает независимо от знака $(S - S_0)$, что выгодно для инвестора.

При существенных отклонениях цены S портфель перестает быть дельта-нейтральным, так как $\Delta = \partial V / \partial S$ становится заметно отличным от Δ_0. Чтобы восстановить свойство дельта-нейтральности, необходимо изменить позицию по базовому активу. Такой процесс называют динамическим хеджированием. Важно отметить, что слишком частая балансировка невыгодна из-за затрат на транзакционную стоимость сделок. Эти затраты учитываются при определении оптимальной частоты корректировки портфеля.

Если Γ_P велика по абсолютному значению, то Δ_P существенно изменяется даже при относительно небольших колебаниях цены S (так как $\Gamma_p = \partial \Delta_p / \partial S$), что приводит к необходимости частой балансировки портфеля. В связи с этим для инвестора предпочтительнее иметь Γ_P положительной, но ограниченной по величине. Обеспечить требуемое значение Γ_P позволяют дельта-нейтральные комбинации, которые состоят из актива и набора опционов, базированных на нем. Дельта такой комбинации приблизительно равна нулю, а гамма имеет известное значение. Покупая/продавая на рынке дельта-нейтральные комбинации, инвестор добивается желаемого значения Γ_P.

В системе Tbricks эту логику реализуют специальные стратегии: хеджирование, создание дельта-нейтральных комбинаций, балансировка портфеля.

Управление рисками

Важной задачей для инвестора является оценка потенциальной прибыли/убытков портфеля ценных бумаг. Эту задачу относят к управлению рисками. Используя методы теоретического ценообразования, можно прогнозировать, как будет меняться теоретическая стоимость портфеля в зависимости от рыночных параметров, например, цен базовых активов и их волатильностей, календарного времени и т.д.

Справедливая стоимость портфеля ценных бумаг *FMR* (fair market result) вычисляется по формуле

$$FMR = \sum_j \left(P_j \cdot V_j - I_j \right),$$

где индекс j пробегает по всем позициям портфеля, V_j – справедливая стоимость инструмента в позиции, P_j – объем позиции, а I_j – количество средств, инвестированных в позицию. На рис. 3 для примера приведены зависимости *FMR*-портфеля, аналогичного портфелю Π из раздела «Хеджирование», от цены базового актива (рис. 3, а) в диапазоне $[S_0 - 10\% S_0;\ S_0 + 10\% S_0]$, где S_0 – текущая цена, и волатильности (рис. 3, б) в диапазоне $[\sigma_0 - 15\%;\ \sigma_0 + 15\%]$, где σ_0 – текущее значение волатильности в процентах.

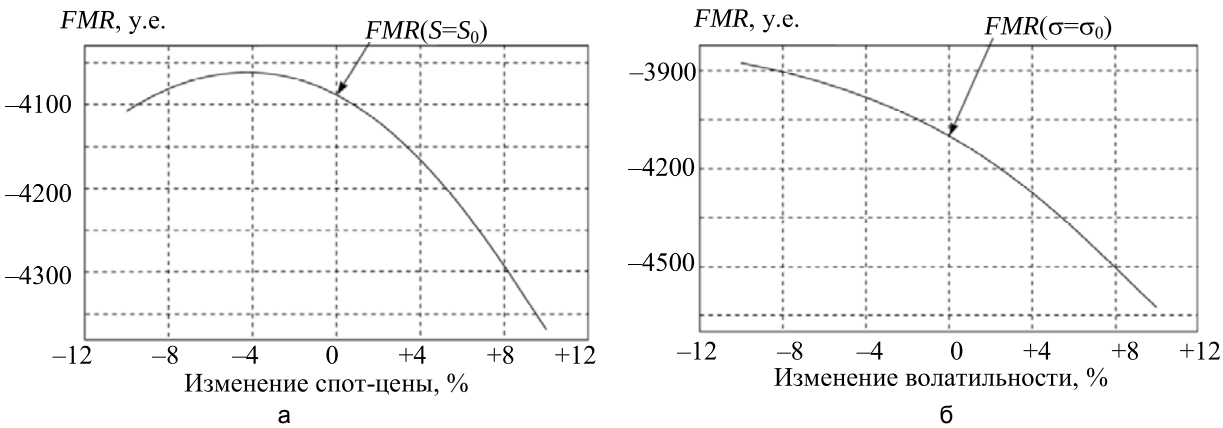

Рис. 3. Зависимости справедливой стоимости портфеля от спот-цены (а) и волатильности (б)

Существенной проблемой при построении таких зависимостей является большой объем вычислений. Портфели крупных трейдинговых компаний состоят из десятков и даже сотен тысяч позиций, а для построения детальных графиков необходимо рассчитать значения функции *FMR* для каждой позиции в большом числе точек. Трудоемкость создания многомерных прогнозов еще увеличивается на порядки. В системе Tbricks с помощью различного рода оптимизаций технического характера нам удалось обеспечить построение графиков функции *FMR* для больших портфелей в пределах 20–30 с. Такой результат позволяет многократно оценивать риски в течение торгового дня.

Торговля комбинациями опционов

Комбинации опционов являются отдельным видом финансовых инструментов, над которыми можно проводить торговые операции. Простейший пример таких инструментов – комбинации стрэддл (straddle) и стрэнгл (strangle). Комбинация стрэддл состоит из колл- и пут-опционов с одинаковым сроком истечения и ценой исполнения $X = S_0$, где S_0 – цена базового актива в момент покупки комбинации. Комбинация стрэнгл состоит из пут- и колл-опционов с одинаковым сроком истечения, но разными ценами исполнения ($X_P < S_0 < X_C$). На рис. 4 изображены диаграммы доходности комбинаций стрэддл (рис. 4, а) и стрэнгл (рис. 4, б). Пунктирной линией показан доход в момент истечения опционов ($t = T$), сплошной – до истечения опционов ($t < T$).

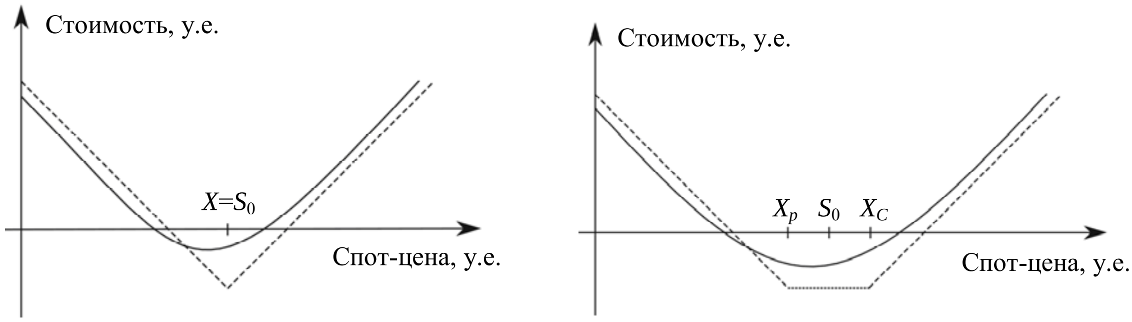

Рис. 4. Диаграммы доходности комбинации стрэддл (а) и стрэнгл (б). Пунктирная линия – доход в момент $t = T$, сплошная – доход в момент $t < T$

Из рис. 4 видно, что стоимость комбинаций имеет минимум вблизи цены S_0, при которой она приобретается. Это означает, что при движении цены базового актива относительно минимума в любую сторону справедливая стоимость комбинации возрастает. В этом случае можно ожидать роста рыночной стоимости комбинации, что выгодно для инвестора. Такой анализ, основанный на теоретическом ценообразовании, можно применять и к более сложным комбинациям.

В системе Tbricks при участии авторов была реализована функциональность, позволяющая формировать любые комбинации опционов, осуществлять торговые операции над ними на рынке, рассчитывать их теоретическую стоимость и анализировать ее поведение в зависимости от различных параметров.

Заключение

В работе аналитическими и численными методами реализованы различные модели теоретического ценообразования европейских, американских, азиатских, барьерных опционов и турбо варрантов. Подобраны параметры алгоритмов, обеспечивающие необходимую точность расчета (относительная погрешность менее 10^{-4}) при наименьших затратах вычислительных ресурсов (менее 200 мкс на расчет с дискретными дивидендами). Создан вариант коммерческой библиотеки для вычисления теоретических цен. На ее основе разработан ряд автоматических торговый стратегий:
- маркет-мейкинг;
- хеджирование;
- управление рисками;
- торговля комбинациями опционов.

Стратегии интегрированы в систему высокочастотной алгоритмической торговли Tbricks и успешно применяются клиентами – крупными европейскими банками, трейдинговыми фирмами и хедж-фондами.

Авторы выражают признательность коллегам J. Hansbo, Е.Ю. Шевкоплясу, К.Н. Романову за плодотворное сотрудничество по тематике работы и полезные замечания.

Литература

1. Gomber P., Arndt B., Lutat M., Uhle T. High-Frequency Trading // Goethe University Press. – 2011. – P. 1–82.
2. Hendershott T., Jones C., Menkveld A. Does Algorithmic Trading Improve Liquidity? // The Journal of finance. – 2010. – V. 66. – P. 1–33.
3. Chlistalla M. High-frequency trading // Deutsche Bank Research. – 2011. – P. 1–19.
4. Tbricks AB. Official website [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.tbricks.com, свободный. Яз. англ. (дата обращения 10.11.1012).
5. Hull J.C. Options, futures and other derivatives. – 7-th ed. – Prentice-Hall International, Inc, 2009. – 814 p.
6. Wilmott P. Paul Willmott on Quantitative Finance. – 2-d ed. – John Wiley & Sons, Ltd., 2006. – V. 1–3. – 1500 p.
7. Curran M. Valuing Asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price // Management Science. – 1994. – V. 40. – № 12. – P. 1705–1711.
8. Haug E.G. The complete guide to option pricing formulas. – 2-d ed. – McGraw-Hill, 2007. – 536 p.
9. Eriksson J. Explicit Pricing Formulas for Turbo Warrants // submitted to Risk Magazine. – 2005. – P. 1–6.

10. Vellekoop M.H., Nieuwenhuis J.W. Efficient pricing of derivatives on assets with discrete dividends // Applied Mathematical Finance. – 2006. – V. 13. – № 3. – P. 265–284.
11. Ikonen S., Toivanen J. Pricing American options using LU decomposition // Applied Mathematical Sciences. – 2007. – V. 1. – № 51. – P. 2529–2551.
12. Косяков М.С., Пономарев М.В., Иванов Д.В., Шполянский Ю.А. Методы расчета цен опционов азиатского типа с дискретными дивидендами вне периода усреднения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2012. – № 5 (81). – С. 143–147.

Торопов Александр Владимирович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант; Tbricks AB, инженер-программист; tav@tbricks.com, toropov@rain.ifmo.ru

Иванов Дмитрий Владимирович – Tbricks AB, математик, dm.vl.ivanov@gmail.com

Шполянский Юрий Александрович – Tbricks AB, ведущий математик; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доцент; доктор физ.-мат. наук, доцент; shpolyan@mail.ru