

УДК 535.1

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ
СВЕТОВЫХ ВОЛН ИЗ МАЛОГО ЧИСЛА КОЛЕБАНИЙ
В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ**

Е.М. Буяновская, С.А. Козлов

Теоретически рассмотрены закономерности взаимодействия встречных световых волн из малого числа колебаний в нелинейных диэлектрических средах. Получено аналитическое решение уравнений динамики поля встречных световых волн из малого числа колебаний, взаимодействующих в диэлектрической среде с безынерционной кубичной по полю нелинейностью. Приведены изменения временной и спектральной структуры светового импульса при его взаимодействии со встречным импульсом. Показано, что эффективность этих явлений определяется энергией встречного импульса и не зависит от его длительности и спектральной структуры.

Ключевые слова: импульсы из малого числа колебаний, взаимодействие встречных волн, нелинейные диэлектрические среды.

Введение

Оптика импульсов из малого числа колебаний светового поля интересна как с фундаментальной, так и с практической точки зрения. Для таких импульсов теряет свое физическое содержание понятие огибающей, поэтому при теоретическом изучении особенностей их распространения в различных оптических средах обычно анализируют динамику непосредственно поля излучения [1–3].

К настоящему времени изучены многие явления нелинейной оптики таких предельно коротких (по числу колебаний) импульсов: их временное и спектральное уширение и сжатие, самофокусировка, нелинейное отражение, взаимодействие при попутном распространении [4–10]. В работе [11], по-видимому, впервые были выведены уравнения динамики поля световых импульсов из малого числа колебаний при их встречном распространении в нелинейной среде. В настоящей работе приведены аналитические интегральные решения этих уравнений. На их основе рассмотрены основные закономерности взаимодействия в нелинейных диэлектрических средах встречных оптических импульсов, содержащих лишь несколько колебаний светового поля.

**Уравнения динамики поля плоских встречных световых волн
из малого числа колебаний и их решения**

В работе [11] нами были выведены уравнения, описывающие динамику полей встречных плоских световых волн из малого числа колебаний при их взаимодействии в диэлектрических средах с безынерционной кубической нелинейностью вида

$$\begin{cases} \frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_+}{\partial t} - a \frac{\partial^3 E_+}{\partial t^3} + b \int_{-\infty}^t E_+ dt' + \frac{cg}{2N_0} \frac{\partial}{\partial t} (E_+^3 + 3E_+^2 E_- + 3E_+ E_-^2) = 0, \\ \frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_-}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E_-}{\partial t^3} - b \int_{-\infty}^t E_- dt' - \frac{cg}{2N_0} \frac{\partial}{\partial t} (E_-^3 + 3E_-^2 E_+ + 3E_- E_+^2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $E_+(z, t)$ – поле волны, распространяющейся в положительном направлении оси z , $E_-(z, t)$ – поле волны, распространяющейся ей навстречу; t – время, c – скорость света в

вакууме; N_0, a, b – параметры, характеризующие типичную нерезонансную зависимость показателя преломления диэлектрической среды в диапазоне ее прозрачности [12],

$$n = N_0 + ca\omega^2 - c \frac{b}{\omega^2}, \quad (2)$$

от частоты ω , $g = \frac{4\pi\chi}{c^2}$ описывает нелинейность ее поляризационного отклика

$P_{\text{нл}} = \chi E^3$ [1, 9], χ – нелинейная восприимчивость среды.

Для получения решений уравнений (1) их удобно нормировать, вводя новые безразмерные переменные $E' = \frac{E}{E_{+0}}$, $z' = \frac{z}{\lambda_{+c}}$, $t' = \frac{t}{T_{+c}}$, где E_{+0} – максимальное значение на границе нелинейной среды поля излучения, например, прямой волны E_+ ; T_{+c} – ее центральный период колебаний на той же границе, $\lambda_{+c} = \frac{cT_{+c}}{N_0}$ – центральная длина волны.

В новых переменных уравнения (1) запишутся как

$$\begin{cases} \frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{\partial E_+}{\partial t} - A \frac{\partial^3 E_+}{\partial t^3} + B \int_{-\infty}^{\infty} E_+ dt' + G \frac{\partial}{\partial t} (E_+^3 + 3E_+^2 E_- + 3E_+ E_-^2) = 0, \\ \frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{\partial E_-}{\partial t} + A \frac{\partial^3 E_-}{\partial t^3} - B \int_{-\infty}^{\infty} E_- dt' - G \frac{\partial}{\partial t} (E_-^3 + 3E_-^2 E_+ + 3E_- E_+^2) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где безразмерные коэффициенты $A = \frac{ac}{N_0 T_{+c}^2}$, $B = \frac{bcT_{+c}^2}{N_0}$, $G = \frac{c^2 g E_{+0}^2}{2N_0^2} = \frac{2\pi\chi E_{+0}^2}{N_0^2}$. В уравнениях (3) и ниже значок «'» для краткости не пишем.

Хотя интенсивность встречных световых волн, при которой не будет наблюдаться разрушение вещества, из-за их предельно коротких длительностей может быть весьма велика [13], но результаты их столкновения все-таки очень сильными быть не могут из-за скоротечности взаимодействия. Поэтому естественным методом решения уравнений (3) является метод последовательных приближений Пикара [14], в котором малым параметром является G .

Далее для простоты, но без ограничения общности, будем рассматривать среду без дисперсии линейного показателя преломления. Во-первых, это приближение выполняется при $G \gg A, B$, а, во-вторых, из-за малости нерезонансной дисперсии показателя преломления диэлектриков (2) ее, при необходимости, в первом приближении не сложно учитывать, включая в итерационное решение уравнений (3) аддитивно к нелинейным слагаемым.

В соответствии с техникой последовательных приближений [14] будем искать решение уравнений (3) в виде

$$E_+ = E_+^{(0)} + GE_+^{(1)} + G^2 E_+^{(2)} + \dots, \quad (4a)$$

$$E_- = E_-^{(0)} + GE_-^{(1)} + G^2 E_-^{(2)} + \dots, \quad (4b)$$

в котором в данной работе и в (4a), и в (4b) ограничимся первыми двумя слагаемыми. Тогда в представлении (4) система уравнений (3) при $A = B = 0$ примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial E_+^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial E_+^{(0)}}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial E_-^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial E_-^{(0)}}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_+^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial E_+^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(E_+^{(0)3} + 3E_+^{(0)2} E_-^{(0)} + 3E_+^{(0)} E_-^{(0)2} \right) \\ \frac{\partial E_-^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial E_-^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(E_-^{(0)3} + 3E_-^{(0)2} E_+^{(0)} + 3E_-^{(0)} E_+^{(0)2} \right) \end{cases} \quad (6a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_+^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial E_+^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(E_+^{(0)3} + 3E_+^{(0)2} E_-^{(0)} + 3E_+^{(0)} E_-^{(0)2} \right) \\ \frac{\partial E_-^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial E_-^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(E_-^{(0)3} + 3E_-^{(0)2} E_+^{(0)} + 3E_-^{(0)} E_+^{(0)2} \right) \end{cases} \quad (6b)$$

Решение системы (5) имеет вид [11, 15]:

$$\begin{cases} E_+^{(0)}(z, t) = E_+^{(0)}(t - z), \\ E_-^{(0)}(z, t) = E_-^{(0)}(t + z) \end{cases} \quad (7)$$

и определяется граничными условиями.

Каждое из уравнений системы (6) также несложно решить в квадратурах. Например, первое уравнение этой системы (6a) можно, как это сделано в [11], переписать в новых переменных $z' = z$, $\tau = t - z$. Тогда его решение примет вид:

$$\begin{aligned} E_+^{(1)}(z', \tau) = & - \int_{z'_0}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(E_+^{(0)}(\tau) \right)^3 dz'' - 3 \int_{z'_0}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left(E_+^{(0)}(\tau) \right)^2 E_-^{(0)}(\tau + 2z'') \right) dz'' - \\ & - 3 \int_{z'_0}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(E_+^{(0)}(\tau) \left(E_-^{(0)}(\tau + 2z'') \right)^2 \right) dz'', \end{aligned} \quad (8)$$

где первое слагаемое в правой части соотношения характеризует самовоздействие светового импульса, распространяющегося от границы нелинейной среды z'_0 в положительном направлении оси z' , а второе и третье – взаимодействие встречных импульсов в нелинейной среде. Отметим, что соотношение (8) содержит как частный случай решение задачи о столкновении высоко- и низкоинтенсивной ($E_-^{(0)} \gg E_+^{(0)}$) встречных волн, рассмотренной в [11].

Решение (8) можно привести к более удобному для дальнейшего анализа виду:

$$\begin{aligned} E_+^{(1)}(z', \tau) = & - \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(E_+^{(0)}(\tau) \right)^3 \right] (z' - z'_0) - 3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(E_+^{(0)}(\tau) \right)^2 \int_{z'_0}^{z'} E_-^{(0)}(\tau + 2z'') dz'' \right] - \\ & - 3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(E_+^{(0)}(\tau) \right) \int_{z'_0}^{z'} \left(E_-^{(0)}(\tau + 2z'') \right)^2 dz'' \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Несложно показать, что аналогичным (8) и (9) будет выглядеть и решение уравнения (6b), но его следует решать в переменных $z' = z$, $\xi = t + z$.

Закономерности взаимодействия плоских встречных световых волн из малого числа колебаний

На рис. 1 приведена иллюстрация решения (7), которое получено в первой итерации метода Пикара для импульса вида:

$$E_+^{(0)}(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_+^2}\right) \sin(2\pi\tau), \quad (10)$$

и встречной ему волны вида

$$E_-^{(0)}(z', \tau) = \gamma \exp\left(-\frac{(\tau + 2z')^2}{\tau_-^2}\right) \sin\left(2\pi\delta(\tau + 2z')\right) \quad (11)$$

где $\gamma = \frac{E_{-0}}{E_{+0}}$, E_{+0} , и E_{-0} – исходные амплитуды взаимодействующих импульсов; $\delta = \frac{T_{+c}}{T_{-c}}$,

T_{+c}, T_{-c} – их центральные периоды колебаний, $\tau_+ = \frac{\tau_{+0}}{T_{+c}}$, $\tau_- = \frac{\tau_{-0}}{T_{+c}}$, τ_{+0}, τ_{-0} – исходные длительности импульсов.

Распространение встречных волн (10) и (11) представлено в системе координат z' и τ , сопровождающей импульс (10), т.е. в той же системе, в которой получено и решение (9) в следующей второй итерации. Динамика полей встречных импульсов дана для случая $\gamma = 1$, $\delta = 2$, $\tau_+ = 0.5$, $\tau_- = 1$. Из рис. 1 видно, что форма импульсов, полученная при расчете в первой итерации, при их распространении и столкновении не изменяется. Оптическая среда, как следует из уравнений (5), в этом приближении для встречных волн линейна.

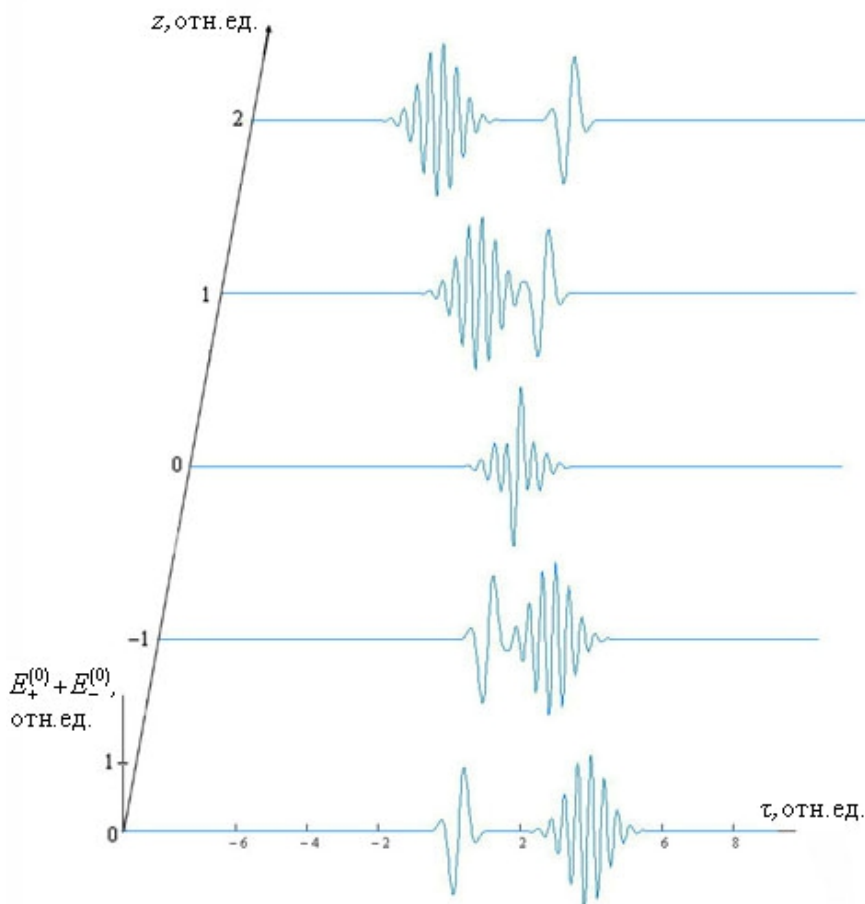


Рис. 1. Распространение встречных световых импульсов из малого числа колебаний в линейной оптической среде

На рис. 2, 3 приведены поправки (9) к решению (7), которые получены во второй итерации, учитывающей нелинейность среды. На них также дано общее решение (4а) исходной системы (3), описывающее самовоздействие импульса (10) и его взаимодействие с волной (11) в нелинейной среде.

На рис. 2 проиллюстрированы результаты самовоздействия импульса (10), описываемые первым слагаемым в правой части выведенного выражения (9). На рис. 2, а, представлена рассчитанная во второй итерации поправка к полю $E_+^{(1)}$, а на рис. 2, б – к

модулю спектра $g_+^{(1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_+^{(1)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ при $G(z' - z'_0) = \frac{1}{3}$. Как видно из рис. 2, а, и 2,

б, решение (9) описывает уширение спектра импульса и генерацию излучения на утроенных частотах. Отметим заметное смещение максимума уширяемого спектра импульса и излучения на утроенных частотах в высокочастотную область.

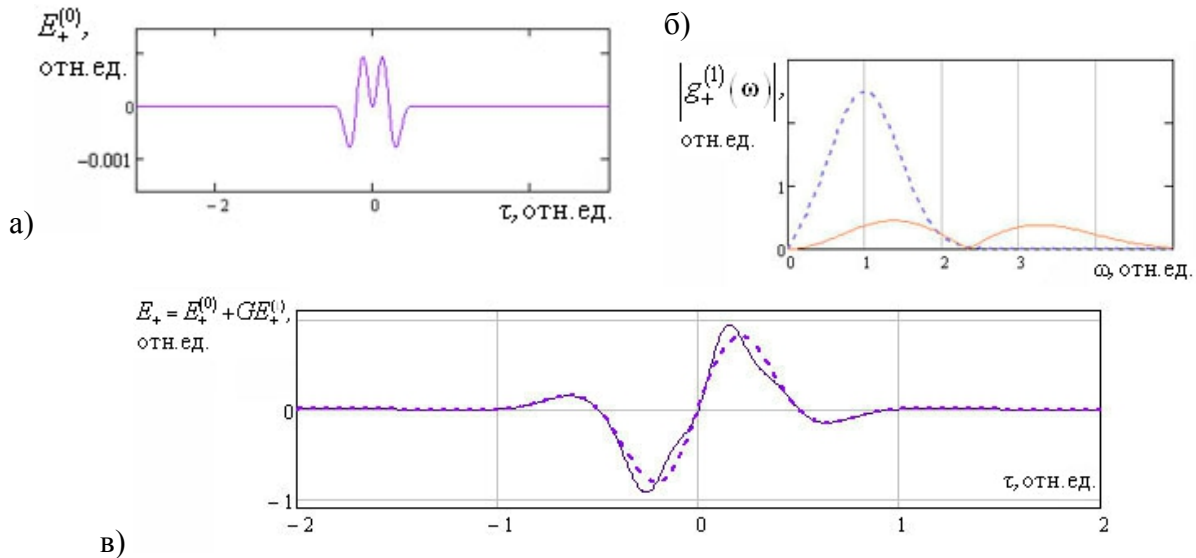


Рис. 2. Изменение временной структуры светового импульса из малого числа колебаний из-за его самовоздействия в нелинейной оптической среде: итерационная добавка к полю $E_+^{(1)}$ (а) и спектру $g_+^{(1)}$ (б), результирующее поле (в). Пунктиром показана временная структура поля до самовоздействия импульса

На рис. 2, в, приведена сумма $E_+^{(0)}$ и первого слагаемого в выражении $GE_+^{(1)}$, которая описывает результат самовоздействия импульса (10) в нелинейной среде, при $G(z' - z'_0) = \frac{1}{3}$. Пунктиром даны формы поля исходного импульса. Из рисунка видно, что основные максимум и минимум «однопериодного» светового импульса из-за самовоздействия излучения в нелинейной среде во времени τ начинают запаздывать. При сохранении положения нулей поля это приводит к искажению временной структуры импульса и описанному выше изменению его спектра.

На рис. 3 проиллюстрированы результаты воздействия на импульс (10) встречной волны (11), описываемые вторым и третьим слагаемым в правой части выражения (9). На рис. 3, а, приведена добавка к полю импульса $E_+^{(1)}$, полученная в результате взаимодействия. На рис. 3, б, представлен ее спектр $g_+^{(1)}$. На рис. 3, в, приведена временная структура электрического поля $E_+ = E_+^{(0)} + GE_+^{(1)}$ импульса до и после воздействия на него встречного импульса.

Из рис. 3 видно, что временная структура поля импульса из-за взаимодействия со встречным импульсом изменяется так, что больше всего смещаются во времени «нули» поля и не смещаются его экстремумы. «Центр тяжести» спектральной плотности при этом смещается в коротковолновую область. Важно, что эффективность этих явлений определяется энергией встречного импульса и не зависит от его длительности и спектральной структуры. Последнее утверждение несложно обосновать, анализируя выра-

жение (9). При $z' \geq 1$ (см. рис. 1), т.е. по окончании взаимодействия встречных импульсов, интеграл во втором слагаемом соотношения (9) для оптических импульсов становится равным нулю [1, 11], а интеграл в третьем слагаемом принимает смысл энергии встречного импульса. Генерации комбинационных частот в таких условиях не происходит. Но при этом отметим, что, если вторая граница нелинейной среды окажется при $z \leq 1$, т.е., когда взаимодействие еще не заканчивается, то генерация на комбинационных и кратных частотах из-за взаимодействия встречных импульсов возможна [11].

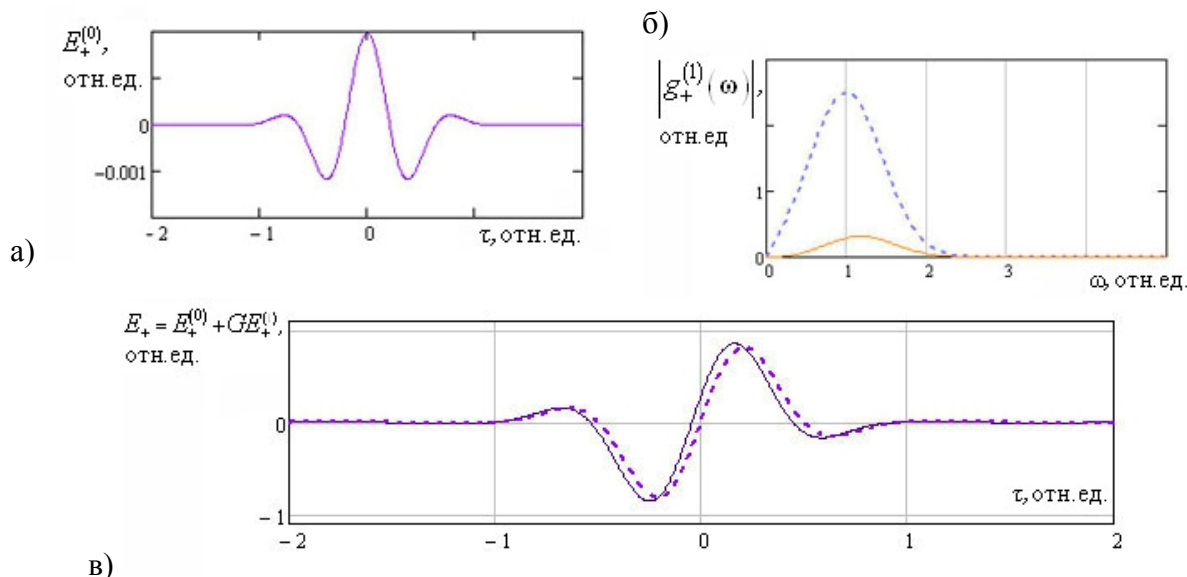


Рис. 3. Изменение временной структуры светового импульса из малого числа колебаний из-за воздействия встречного импульса в нелинейной оптической среде: итерационная добавка к полю $E_+^{(1)}$ (а) и спектру $g_+^{(1)}$ (б), результирующее поле (в). Пунктиром показана временная структура поля до взаимодействия импульсов

Заключение

В работе теоретически исследованы закономерности взаимодействия встречных световых волн из малого числа колебаний в нелинейных диэлектрических средах. В результате проведенных исследований получено аналитическое решение уравнений динамики поля встречных световых волн из малого числа колебаний, взаимодействующих в диэлектрической среде с безынерционной кубичной по полю нелинейностью. Показано, что временная структура поля импульса из-за взаимодействия со встречным импульсом изменяется так, что больше всего смещаются во времени «нули» поля и не смещаются его экстремумы. «Центр тяжести» спектральной плотности при этом смещается в коротковолновую область, генерации комбинационных частот в таких условиях не происходит. Эффективность этих явлений определяется энергией встречного импульса и не зависит от его длительности и спектральной структуры.

Работа поддержана грантами РНП 2.1.1/4923 и РФФИ 08-02-00902-а.

Литература

1. Козлов С.А., Сазонов С.В. Нелинейное распространение импульсов длительностью в несколько колебаний светового поля в диэлектрических средах // ЖЭТФ. – 1997. – Т. 111. – В. 2. – С. 404–418.

2. Nazarkin A., Korn G. Raman self-conversion of femtosecond laser pulses and generation of single-cycle radiation // *Phys. Rev. A.* –1998. – V. 58. – № 1. –P. R61–R64.
3. Маймистов А.И. Некоторые модели распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в нелинейной среде // *Квантовая электроника.* – 2000. – Т. 30. – № 4. – С. 287–304.
4. Казанцева Е.В., Маймистов А.И. Распространение предельно коротких импульсов в нерезонансной квадратично-нелинейной среде // *Квантовая электроника.* – 2000. – Т. 30. – № 7. – С. 623–628.
5. Shpolyanskiy Y.A., Belov D.L., Bakhtin M.A., Kozlov S.A. Analytic study of continuum spectrum pulse dynamics in optical waveguides // *Applied Physics B.* – 2003. – V. 77. – № 2–3. – P. 349–356.
6. Сазонов С.В., Халыпин В.А. О влиянии дифракции на нелинейное распространение оптических импульсов длительностью в несколько колебаний // *Квантовая электроника.* – 2004. – Т. 34. – № 11. – С.1057–1063.
7. Ястребова Н.В., Шполянский Ю.А., Козлов С.А. Нелинейное отражение импульсов из малого числа колебаний светового поля от просветленной границы раздела сред // *Оптический журнал.* – 2004. – Т. 71. – № 6. – С. 78–83.
8. Белов Д.Л., Козлов С.А., Шполянский Ю.А. О самосжатии спектрального суперконтинуума // *Известия РАН, серия физическая.* – 2005. – Т. 69. – № 8. – С. 1128–1130.
9. Berkovsky A.N., Kozlov S.A., Shpolyanskiy Y.A. Self-focusing of few cycle light pulses in dielectric media // *Physical Review A*72. – 2005. – 043821 (9 pages).
10. Бахтин М.А., Козлов С.А. Формирование последовательности сверхкоротких сигналов при столкновении импульсов из малого числа колебаний светового поля в нелинейных оптических средах // *Оптика и спектроскопия.* – 2005. – Т. 98. – № 3. – С. 425–430.
11. Буяновская Е.М., Козлов С.А. Динамика полей встречных световых импульсов из малого числа колебаний в нелинейных диэлектрических средах // *Письма в ЖЭТФ.* – 2007. – Т. 86. – В. 5–6. – С. 349–353.
12. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
13. Brabec Th., Krausz F. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics // *Rev. Mod. Phys.* – 2000. – V. 72. – № 2. – P. 545–591.
14. Корн Г., Корн Т, *Справочник по математике.* – М.: Наука, 1977. – 831 с.
15. Буяновская Е.М, Козлов С.А. Взаимодействие встречных световых импульсов из малого числа колебаний в нелинейных диэлектрических средах // *Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО.* – 2006. – № 30. – С. 97–101.
16. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 384 с.

Буяновская Елизавета Михайловна – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, lee.buyanovskaya@gmail.com

Козлов Сергей Аркадьевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, профессор, декан