

УДК 62-50

**СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА  
В УСЛОВИЯХ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ,  
ПРИЛОЖЕННОГО К ВЫХОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ****С.В. Арановский, А.А. Бобцов, В.О. Никифоров**

В статье предлагается новый наблюдатель переменных состояния нелинейного объекта управления в случае, когда измеряемый выходной сигнал объекта подвержен воздействию неизвестного гармонического возмущения.

**Ключевые слова:** гармонические возмущения, наблюдатели, нелинейные системы.

**Введение**

Рассматривается задача синтеза асимптотического наблюдателя вектора переменных состояния для нелинейного объекта вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + d\varphi(y), \quad (1)$$

$$y(t) = c^T x(t) + \delta(t), \quad (2)$$

где  $x \in R^n$  – измеряемый вектор переменных состояния;  $A$ ,  $b$ ,  $d$  и  $c$  – известные матрицы и векторы постоянных коэффициентов соответствующих размерностей;  $\delta(t) \in R$  – заранее неизвестное и недоступное прямым измерениям гармоническое возмущение;  $u(t) \in R$  – сигнал управления;  $\varphi(y)$  – известная гладкая функция;  $y(t) \in R$  – измеряемый выход.

Если матрица  $A$  гурвицева, то данная задача может быть достаточно просто решена посредством расчета в реальном масштабе времени модели объекта (1). При этом, в силу экспоненциального стремления к нулю свободной составляющей, модель будет генерировать оценку вектора переменных состояния, асимптотически сходящуюся к действительным значениям  $x(t)$ . В противном случае (т.е., если матрица  $A$  негурвицева) данная схема является неработоспособной, а использование классических наблюдателей вектора состояния не позволит получить асимптотическую сходимость ошибки наблюдения в силу присутствия возмущения  $\delta(t)$ .

Поставленная задача может быть решена с использованием методов адаптивного наблюдения [1–7]. Однако большинство известных работ посвящены случаю, когда гармоническое возмущение приведено ко входу системы [1–5], и их результаты не могут быть непосредственно распространены на рассматриваемый случай возмущения, действующего на выход системы. В работах [6, 7] рассмотрен случай возмущений в выходном сигнале, но для ограниченного класса линейных минимально фазовых объектов. Таким образом, построение адаптивного наблюдателя для нелинейного объекта (1)–(2) является новой и актуальной задачей.

**Постановка задачи**

Рассмотрим в общем случае не минимально фазовый нелинейный объект вида (1), (2). Для простоты ограничимся исследованием случая, когда возмущение  $\delta(t)$  представлено в виде гармонической функции

$$\delta(t) = \sigma \sin(\omega t + \beta) \quad (3)$$

с неизвестными амплитудой  $\sigma$ , частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\beta$ . Заметим, что расширение предлагаемого подхода на случай возмущения, представленного суммой нескольких гармонических функций, не влечет принципиальных сложностей, но усложняет представление основного материала статьи.

Перепишем объект (1), (2) в форме модели вход–выход:

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)} u(t) + \frac{d(p)}{a(p)} \varphi(y) + \delta(t), \quad (4)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования;  $a(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0$ ,  $b(p) = b_m p^m + \dots + b_1p + b_0$  и  $d(p) = d_r p^r + \dots + d_1p + d_0$  – соответствующие полиномы, полученные в результате перехода от модели вход–состояние–выход к модели вход–выход:  $\frac{b(p)}{a(p)} = c^T(pI - A)^{-1}b$  и  $\frac{d(p)}{a(p)} = c^T(pI - A)^{-1}d$ .

Будем считать выполненными следующие допущения относительно системы (1), (2), (4).

*Допущение 1.* Доступными для измерений являются только сигналы  $y(t)$  и  $u(t)$ .

*Допущение 2.* Пара  $A, b$  полностью управляема, и пара  $A, c$  полностью наблюдаема.

*Допущение 3.* Полином  $a(p)$  не имеет корней  $\pm j\omega$ , где  $\omega$  – частота возмущающего воздействия.

Требуется построить асимптотический наблюдатель переменных состояния  $x(t)$  объекта (1), (2) такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0, \quad (5)$$

где  $\hat{x}(t)$  является оценкой вектора  $x(t)$ .

Синтез наблюдателя для объекта (1), (2) будем осуществлять в два этапа. Сначала решим задачу синтеза наблюдателя возмущающего воздействия  $\delta(t)$ . Далее, используя информацию о  $\delta(t)$ , построим оценку вектора  $x(t)$ .

Отметим, что для решения поставленной задачи можно использовать два подхода. Первый подход предусматривает рассмотрение расширенной системы, включающей в себя как сам объект управления, так и модель внешней среды. Используя полученную оценку частоты  $\omega$ , могут быть рассчитаны коэффициенты классического наблюдателя полной размерности для расширенной системы. К преимуществам данного подхода относится то, что для решения задачи достаточно провести идентификацию только частоты возмущения, но не его амплитуды и фазы. В то же время предложенный подход требует проводить в реальном времени процедуру пересчета коэффициентов наблюдателя, что повышает сложность метода и затрудняет его практическую реализацию.

Вторым возможным подходом является построение наблюдателя возмущения на основе идентификации всех его параметров, и использование полученной оценки возмущения для вычисления выхода объекта с последующим построением наблюдателя переменных состояния. Данный метод отличается меньшей вычислительной сложностью, и в дальнейшем именно он будет рассмотрен в работе.

### Синтез наблюдателя возмущающего воздействия

Итак, проведем синтез наблюдателя возмущающего воздействия  $\delta(t) = \sigma \sin(\omega t + \beta)$ , для чего потребуются идентификация параметров  $\sigma$ ,  $\omega$  и  $\beta$ . По-

строим сначала идентификатор параметра  $\omega$ . Воспользуемся для этого результатами работы [8].

Рассмотрим произвольный гурвицев полином  $\gamma(p)$  степени  $n$ . Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$y(t) = \frac{a_1(p)}{\gamma(p)} y(t) + \frac{b(p)}{\gamma(p)} u(t) + \frac{d(p)}{\gamma(p)} \varphi(y) + \frac{a(p)}{\gamma(p)} \delta(t), \quad (5)$$

где  $a_1(p) = \gamma(p) - a(p)$ .

Сформируем вспомогательный сигнал:

$$w(t) = y(t) - \frac{a_1(p)}{\gamma(p)} y(t) - \frac{b(p)}{\gamma(p)} u(t) - \frac{d(p)}{\gamma(p)} \varphi(y). \quad (6)$$

С учетом уравнения (5) получаем

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t) - \frac{a_1(p)}{\gamma(p)} y(t) - \frac{b(p)}{\gamma(p)} u(t) - \frac{d(p)}{\gamma(p)} \varphi(y) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \delta(t) = \\ &= \frac{a(p)}{\gamma(p)} \sigma \sin(\omega t + \beta) = \sigma \frac{a(p)}{\gamma(p)} \sin(\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) следует, что сигнал  $w(t)$ , в силу гурвицевости полинома  $\gamma(p)$  и отсутствия у полинома  $a(p)$  корней  $\pm j\omega$ , является гармонической функцией с частотой  $\omega$ . Поэтому сигнал  $w(t)$  может рассматриваться в качестве выхода динамической модели вида

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = -\omega^2 w(t) = \theta w(t), \quad (8)$$

где  $\theta = -\omega^2$  – постоянный параметр. Следуя результатам леммы 1 из работы [9], сигнал  $w(t)$  можно записать в форме

$$w(t) = 2\dot{\zeta}(t) + \zeta(t) + \theta\zeta(t) + \varepsilon_y(t), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_y(t)$  – экспоненциально затухающая функция времени, определяемая ненулевыми начальными условиями, а функция  $\zeta(t)$  формируется следующим образом

$$\zeta(t) = \frac{1}{(p+1)^2} w(t). \quad (10)$$

Как и в [9], для синтеза идентификатора неизвестного параметра  $\theta$  введем новую переменную – измеряемый сигнал вида

$$z(t) = \ddot{\zeta}(t) = w(t) - 2\dot{\zeta}(t) - \zeta(t). \quad (11)$$

Можно показать, что в силу уравнений (9) и (10) справедливо равенство

$$z(t) = \theta \zeta(t).$$

Тогда оценку  $\hat{z}(t)$  сигнала  $z(t)$  целесообразно сформировать в виде

$$\hat{z}(t) = \hat{\theta}(t) \zeta(t), \quad (12)$$

где  $\hat{\theta}(t)$  – настраиваемый параметр (оценка параметра  $\theta$ ).

**Утверждение 1 [9].** Пусть параметр  $\hat{\theta}(t)$  настраивается следующим образом:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\zeta(t)(z(t) - \hat{z}(t)), \quad (13)$$

где  $k > 0$  – коэффициент адаптации, сигналы  $\zeta(t)$ ,  $z(t)$  и  $\hat{z}(t)$  формируются в соответствии с выражениями (10), (11) и (12), соответственно (при этом сигнал  $w(t)$  формируется по правилу (6)). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0.$$

С учетом утверждения 1 частоту гармонического возмущения будем рассчитывать следующим образом:

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}. \quad (14)$$

Для построения оценки возмущения  $\delta(t)$  заменим задачи идентификации амплитуды  $\sigma$  и фазы  $\beta$  сигнала более простой задачей идентификации двух амплитуд. Действительно, для гармонического сигнала  $w(t)$  имеем:

$$w(t) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \sigma \sin(\omega t + \beta) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \sigma_1 \sin \omega t + \sigma_2 \cos \omega t = \sigma_1 \psi_1(t) + \sigma_2 \psi_2(t),$$

где возмущение  $\delta(t) = \sigma \sin(\omega t + \beta)$  представлено в виде суммы двух гармонических сигналов разной амплитуды, но с нулевой начальной фазой:

$$\delta(t) = \sigma_1 \sin \omega t + \sigma_2 \cos \omega t,$$

а физически реализуемые сигналы  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  формируется по правилу

$$\psi_1(t) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \sin \omega t, \quad \psi_2(t) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \cos \omega t.$$

Тогда оценку возмущения  $\delta(t)$  будем формировать в виде

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma}_1 \sin \hat{\omega} t + \hat{\sigma}_2 \cos \hat{\omega} t, \quad (15)$$

где  $\hat{\sigma}_1$  и  $\hat{\sigma}_2$  – настраиваемые параметры (оценки параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ).

Можно показать справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.** Пусть параметры  $\hat{\sigma}_1$  и  $\hat{\sigma}_2$  настраиваются следующим образом:

$$\dot{\hat{\sigma}}_1(t) = k_\sigma \hat{\psi}_1(t) w(t) - \hat{\sigma}_1(t) \hat{\psi}_1(t) - \hat{\sigma}_2(t) \hat{\psi}_2(t), \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_2(t) = k_\sigma \hat{\psi}_2(t) w(t) - \hat{\sigma}_1(t) \hat{\psi}_1(t) - \hat{\sigma}_2(t) \hat{\psi}_2(t), \quad (17)$$

где  $k_\sigma$  – коэффициент адаптации, сигнал  $w(t)$  определяется выражением (6), а сигналы  $\hat{\psi}_1(t)$  и  $\hat{\psi}_2(t)$  формируются по правилу

$$\hat{\psi}_1(t) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \sin \hat{\omega} t, \quad \hat{\psi}_2(t) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \cos \hat{\omega} t \quad (18)$$

с использованием оценки частоты гармонического возмущения (13), (14). Тогда

$$\lim |\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)| = 0. \quad (19)$$

Таким образом, адаптивный наблюдатель возмущения, содержащий блоки формирования вспомогательных сигналов  $w(t)$ ,  $\zeta(t)$  и  $z(t)$ , (6), (10) и (11) соответственно, настраиваемые модели (12) и (15), а также алгоритмы настройки (13), (16) и (17), обеспечивает для объекта (1), (2) асимптотическую идентификацию заранее неизвестного возмущения (3). В частном случае, когда возмущение (3) имеет нулевую начальную фазу (т.е.  $\beta = 0$ ), схема его идентификации может быть существенно упрощена. А именно, вместо оценки (15) и двух алгоритмов настройки (16) и (17) можно использовать оценку вида

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma} \sin \hat{\omega} t, \quad (20)$$

где параметр  $\hat{\sigma}$  настраивается по правилу

$$\dot{\hat{\sigma}} = k_\sigma \hat{\psi}(t)(w(t) - \hat{w}(t)), \quad (21)$$

$$\hat{\psi}(t) = \frac{a(p)}{\gamma(p)} \sin \hat{\omega} t. \quad (22)$$

### Синтез наблюдателя состояния

Теперь, зная оценку возмущения  $\delta(t)$ , построим наблюдатель переменных состояния  $x(t)$  для объекта управления (1), (2). Для этого воспользуемся классическими результатами по синтезу наблюдателей полной размерности, опубликованными, например, в [10]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + d\varphi(y) + l(y(t) - \hat{y}(t)), \quad (23)$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t) + \hat{\delta}(t), \quad (24)$$

где  $\hat{x}(t) \in R^n$  – оценка вектора  $x(t)$ ,  $\hat{\delta}(t) \in R$  – оценка неизвестного возмущения, формируемая по правилу (15) (или по правилу (20)),  $\hat{y}(t) \in R$  – оценка переменной  $y(t)$ , а вектор постоянных коэффициентов  $l$  рассчитывается таким образом, чтобы матрица  $\bar{A} = A - lc^T$  была гурвицевой.

Введем в рассмотрение ошибку оценки состояния  $\varepsilon = x - \hat{x}$ . Тогда, вычитая (23) из (1) с учетом (2) и (24), получаем модель ошибки оценки состояния:

$$\dot{\varepsilon} = \bar{A}\varepsilon + l(\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)).$$

Из последнего выражения с учетом гурвицевости матрицы  $\bar{A}$  и равенства (19) следует выполнение целевого условия (5).

### Пример

Для иллюстрации предложенной схемы синтеза наблюдателя для нелинейного объекта вида (1), (2) рассмотрим пример. Рассмотрим нелинейный объект вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u - y^3,$$

$$y = x_1 + \sigma,$$

где входной сигнал  $u(t) = 1$ . Для определенности будем считать, что неизвестное возмущение имеет вид  $\sigma(t) = 3\sin 4t$ . Построим наблюдатель, используя выражения (6), (10), (14), (20)–(24):

$$w = y - \frac{20p+100}{p^2+20p+100}y - \frac{1}{p^2+20p+100}u + \frac{1}{p^2+20p+100}y^3,$$

$$\zeta = \frac{1}{(p+1)^2}w,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = 10^5 \zeta (w - 2\dot{\zeta} - \zeta - \hat{\theta}\zeta),$$

$$\hat{\omega} = \sqrt{|\hat{\theta}|},$$

$$\psi = \frac{p^2}{p^2+20p+100} \sin \hat{\omega}t,$$

$$\hat{w} = \hat{\sigma}\psi,$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = 10^3 \psi (w - \hat{w}),$$

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma} \sin \hat{\omega}t,$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 20(y - \hat{y}),$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = u - y^3 + 100(y - \hat{y}),$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1 + \hat{\delta}.$$

Результаты компьютерного моделирования идентификации частоты  $\hat{\omega}$ , амплитуды  $\hat{\sigma}$  и графики невязок  $x_1 - \hat{x}_1$  и  $x_2 - \hat{x}_2$  представлены на рис. 1–4 соответственно и демонстрируют асимптотически точную оценку частоты возмущения (рис. 1), амплитуды возмущения (рис. 2) и выполнение целевого условия (5) (рис. 3 и рис. 4).

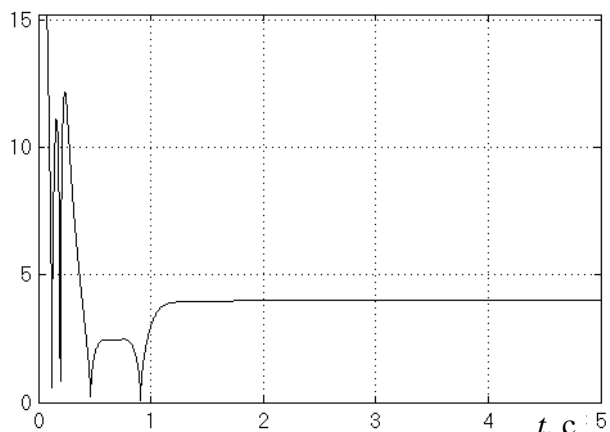


Рис. 1. Идентификация частоты  $\hat{\omega}$

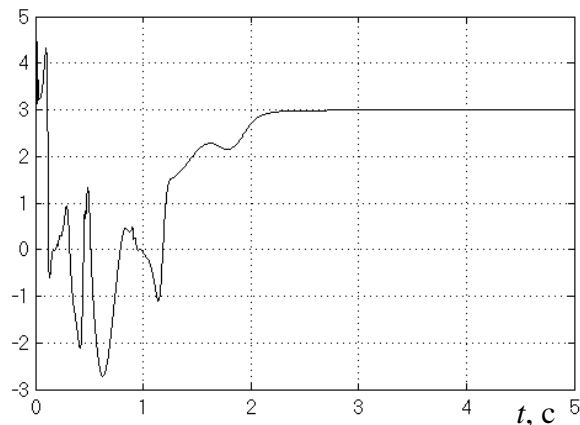


Рис. 2. Идентификация амплитуды  $\hat{\sigma}$

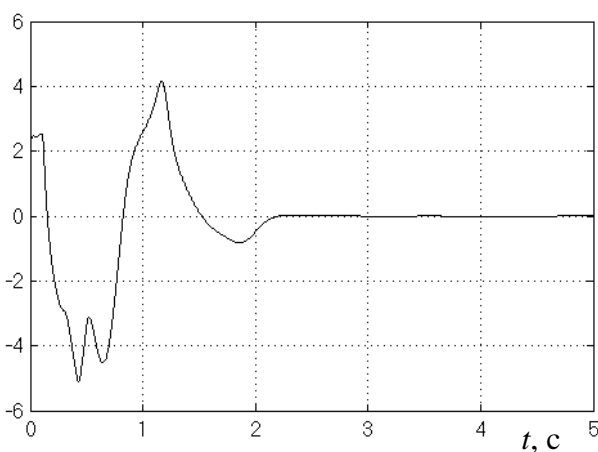


Рис. 3. Невязка  $x_1 - \hat{x}_1$

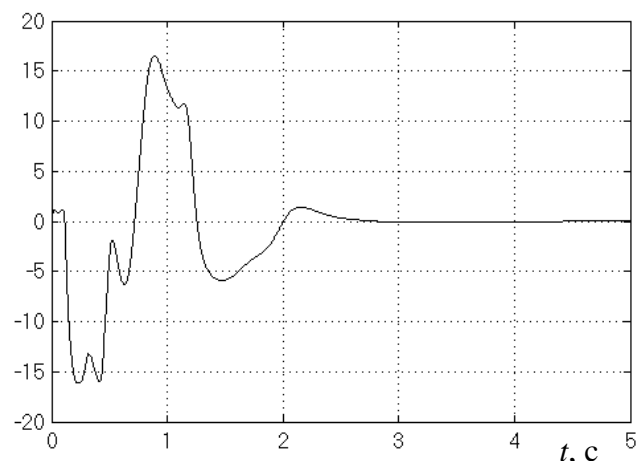


Рис. 4. Невязка  $x_2 - \hat{x}_2$

### Заключение

В статье предложен альтернативный к [6, 7] алгоритм синтеза наблюдателя (23), (24) для нелинейного объекта управления (1), (2). Представлены результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемого алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-08-00139-а.

### Литература

1. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб: Наука, 2003. – 282 с.
2. Никифоров В.О. Наблюдатели внешних возмущений. 1. Объекты с известными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 13–23.
3. Никифоров В.О. Наблюдатели внешних возмущений. 2. Объекты с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 40–52.

4. Бобцов А.А., Кремлев А.С. Синтез наблюдателя в задаче компенсации конечномерного квазигармонического возмущения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 3. – С. 5–11.
5. Бобцов А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // Автоматика и телемеханика. – 2008 – № 8. – С. 25–32.
6. Marino R., Santosuosso G. and Tomei R. Adaptive Stabilization of Linear Systems with Outputs Affected by Unknown Sinusoidal Disturbances // Proceedings of the European Control Conference 2007 Kos, Greece, July 2–5, 2007. – P. 129–134.
7. Marino R. and Tomei R. Output Regulation for Linear Minimum Phase Systems With Unknown Order Exosystem // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2007. – V. 52. – P. 2000–2005.
8. Aranovskiy S., Bobtsov A. Frequency Identification of Biased Harmonic Output Disturbance // 15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2009 – Saint-Malo, France, 2009.
9. Арановский С.В., Бобцов А.А., Кремлев А.С., Лукьянова Г.В. Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – № 3. – С. 1–6.
10. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб: Наука, 1999. – 475 с.

- |  |   |
|--|---|
| <i>Арановский Станислав Владимирович</i> | – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, ассистент, rhnd@mail.ru                    |
| <i>Бобцов Алексей Алексеевич</i>         | – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, декан, доктор технических наук, профессор, bobtsov@mail.ru            |
| <i>Никифоров Владимир Олегович</i>       | – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, проректор, доктор технических наук, профессор, nikiforov@mail.ifmo.ru |