

УДК [517.938 + 519.713/.718]: 621.398

**АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ЛИНЕЙНЫХ  
ДВОИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ  
ИХ РЕКУРРЕНТНОГО МОДЕЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ**

А.В. Ушаков, Е.С. Яицкая

Рассматриваются проблемы, связанные со спецификой структуры пространства состояний линейных двоичных динамических систем (ЛДДС), характеризующихся наличием неподвижных состояний и замкнутых циклов при отсутствии и наличии экзогенной задающей последовательности на входе ЛДДС. Показывается, что решаемая задача связана с особенностями структуры алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния ЛДДС, особенностями структуры геометрического спектра собственных векторов той же матрицы и в значительной степени зависит от показателя  $\mu$ , которому принадлежит эта матрица. Предлагается алгоритм анализа структуры пространства состояний ЛДДС. Приводится пример.

**Ключевые слова:** двоичная динамическая система, структура пространства состояния, собственный вектор, принадлежность показателю, неподвижные состояния, замкнутые циклы.

### Введение

Класс линейных динамических систем как объект научных исследований появился в последней четверти прошлого века благодаря работам [1, 2]. Авторы указанных работ называли линейные динамические системы линейными последовательностными машинами (ЛПМ), потому что они возникли из задач преобразования временных последовательностей с дискретным временем над конечными полями Галуа  $GF(p) = \{0, 1, \dots, (p-1)\}$  с произвольной характеристикой (модулем)  $p$  и модулярной арифметикой по  $mod(p)$ . Достаточно быстро в силу наибольшей практической применимости выделился класс ЛПМ с характеристикой  $p = 2$ , который стал именоваться линейными двоичными динамическими системами (ЛДДС).

В это же время завершалось формирование такой системной парадигмы, как аппарат пространства состояний (АПС), опирающийся на возможности векторно-матричного формализма линейной алгебры, который разрабатывался в основном для систем над бесконечным полем с непрерывным и дискретным временем. Возможности указанного формализма АПС не могли быть не замечены специалистами по ЛДДС. Без сомнения, перенос положений АПС на класс ЛДДС имеет свою специфику, которая определяется в основном конечностью числа возможных состояний.

В этой связи становится достаточно логичной постановка задачи анализа структуры пространства состояний ЛДДС на основе их рекуррентного модельного представления [1–5]

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k), \quad x(0), \quad (1)$$

где  $x, u$  – соответственно вектор состояния и вектор входной последовательности размерности  $\dim(x) = m, \dim(u) = r$  с элементами;  $\mathbf{A} - (m \times m)$  матрица состояния;  $\mathbf{B} - (m \times r)$  матрица входа. Элементы векторов и матриц принадлежат двоичному полю Галуа  $GF(p) = \{0, 1\}$ . Исследования, результаты которых приводятся ниже, выполнены для случая  $r = 1$ , т.е. матрица  $\mathbf{B}$  представляет собой  $m$ -мерный вектор-столбец.

Следует ожидать, что структура пространства состояний автономной ЛДДС, т.е. ЛДДС (1) при  $u(k) = 0$ , определяется свойствами матрицы  $\mathbf{A}$  состояния системы, а структура ЛДДС при  $u(k) \neq 0$  определяется свойствами пары матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

Предпринятые исследования начнем с рассмотрения базовых свойств квадратных матриц над двоичным полем Галуа.

#### Базовые свойства квадратных $(m \times m)$ матриц над двоичным полем Галуа

**Свойство 1 (С.1). (Теорема Гамильтона–Кэли).** Произвольная квадратная  $(m \times m)$ – матрица  $\mathbf{A}$  над простым полем Галуа  $GF(p)$  при  $p = 2$  обладает тем свойством, что обнуляет свой характеристический модулярный многочлен (ХММ) так, что выполняется равенство

$$\det(\lambda I + \mathbf{A}) /_{\lambda=\mathbf{A}} = a_0 \mathbf{A}^m + a_1 \mathbf{A}^{m-1} + \dots + a_{m-1} \mathbf{A} + a_m \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

□

**Доказательство** утверждения строится по той же схеме, что и теорема Гамильтона–Кэли над бесконечным полем [3].

**Свойство 2 (С.2).** Будем говорить, что квадратная  $(m \times m)$ -матрица  $\mathbf{A}$  с элементами из  $GF(2)$  обладает свойством нильпотентности индекса  $v$ , если она удовлетворяет условию

$$\mathbf{A}^v = \mathbf{O},$$

при этом  $1 \leq v \leq m$ .

□

**Свойство 3 (С.3).** Будем говорить, что квадратная  $(m \times m)$ -матрица  $\mathbf{A}$  с элементами из  $GF(2)$  обладает свойством принадлежности показателю  $\mu$ , если она удовлетворяет условию

$$\mathbf{A}^\mu = \mathbf{I}.$$

□ (2)

**Примечание 1 (П.1).** Нетрудно видеть, что в силу правил модулярной двоичной арифметики соотношение (4) имеет эквивалентное представление

$$\mathbf{A}^\mu + \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

(3)

Для целей дальнейших исследований сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 1 (У.1).** Для того чтобы матрица  $\mathbf{A}$  обладала свойством принадлежности показателю  $\mu$  достаточно, чтобы ее ХММ  $D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})$  входил в разложение двучлена  $\lambda^\mu + 1$ .

□

**Доказательство.** Предположим, что  $D(\lambda)$  входит в разложение двучлена  $\lambda^\mu + 1$ , тогда становится справедливым представление

$$\lambda^\mu + 1 = Q(\lambda)D(\lambda). \quad (4)$$

Построим на скалярном соотношении (4) матричное соотношение, заменив скаляр  $\lambda$  матрицей  $\mathbf{A}$ . Тогда будем иметь

$$\mathbf{A}^\mu + \mathbf{I} = Q(\mathbf{A})D(\mathbf{A}).$$

■

Нетрудно видеть, что в соответствии с теоремой Гамильтона–Кэли  $D(\mathbf{A}) = 0$ , а, следовательно, выполняется соотношение (3).

**Примечание 2 (П.2).** Из доказанного утверждения следует, что  $\mu$  является наименьшей степенью двучлена вида  $\lambda^\mu + 1$ , который характеризуется делимостью без остатка на ХММ  $\mu = \min_j \left\{ \mu_j : \text{rest} \frac{\lambda^{\mu_j} + 1}{D(\lambda)} = 0 \right\}$ , при этом показатель  $\mu$  удовлетворяет неравенству  $\mu \geq m$ .

#### **Постановка задачи анализа структуры пространства состояния ЛДДС с различными показателями $\mu$ принадлежности их матриц состояния**

Структура пространства состояний ЛДДС определяется наличием неподвижных состояний, замкнутых циклов, возвратных состояний и состояний, из которых под действием входной последовательности ЛДДС переходит в нулевое состояние.

#### **Неподвижные состояния линейных ДДС**

**Определение 1 (О.1).** Состояние  $x(k)$  автономной ЛДДС (АЛДДС), т.е. ЛДДС (1) при  $u(k) = 0$ , называется неподвижным, если оно удовлетворяет равенству

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) = x(k), \forall k. \quad \square (5)$$

**Примечание 3 (П.3).** АЛДДС при любой  $(m \times m)$  реализации матрицы  $\mathbf{A}$  имеет в качестве неподвижного состояния нулевое

$$x(k) \equiv 0.$$

□

**Примечание 4 (П.4).** Все ненулевые состояния АЛДДС оказываются неподвижными, если ее матрица состояния является единичной ( $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ).

**Утверждение 2 (У.2).** Неподвижным состоянием АЛДДС является собственный вектор  $\xi$  матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующий собственному значению  $\lambda = 1$ .

□

**Доказательство** утверждения строится на определении понятия собственного вектора [6], в силу которого выполняется соотношение

$$\mathbf{A}\xi = \lambda \xi = \xi.$$

Если  $x(k)$  выбран в форме  $x(k) = \xi$ , тогда для АЛДДС получим цепочку равенств

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) = \mathbf{A}\xi = \xi = x(k).$$

□

Рассмотрим теперь структуру неподвижных состояний ЛДДС (1) для случая  $u(k) \neq 0$  ( $u(k) = 1$ ).

**Определение 2 (О.2).** Состояние  $x(k)$  ЛДДС (1) для случая  $u(k)=1$  называется неподвижным, если оно удовлетворяет равенству  

$$x(k+1)=\mathbf{A}x(k)+\mathbf{B}=x(k), \forall k.$$

**Примечание 5 (П.5).** Нулевое состояние  $x(k)=0$  не принадлежит множеству неподвижных состояний ЛДДС при  $u(k)=1$ , так как система (1) при  $x(k)=0$  и  $u(k)=1$  переходит в состояние  $x(k+1)=\mathbf{B}, \forall k$ .

**Утверждение 3 (У.3).** Неподвижное состояние ЛДДС (1) при  $u(k)=1$  задается выражением

$$x(k)=(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (6)$$

если матрица  $(\mathbf{I}+\mathbf{A})$  обратима.  $\square$

**Доказательство** утверждения строится на подстановке  $x(k+1)=x(k)$  и  $u(k)=1$  в (1), в результате чего получаем

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})x(k)=\mathbf{B}. \quad (7)$$

Если матрица  $(\mathbf{I}+\mathbf{A})$  обратима, то выполняется (6). ■

**Примечание 6 (П.6).** При обратимости матрицы  $(\mathbf{I}+\mathbf{A})$  неподвижное состояние, определенное соотношением (6), представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы  $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}$ . Матрица  $(\mathbf{I}+\mathbf{A})$  есть матричная функция  $f(\mathbf{A})$  от матрицы  $\mathbf{A}$ , по свойству которой [6] ее спектр  $\sigma\{\mathbf{I}+\mathbf{A}\}$  собственных значений равен  $\sigma\{\mathbf{I}+\mathbf{A}\}=\{\tilde{\lambda}_i=1+\lambda_i; i=\overline{1, m}\}$ , а потому ее обратимость возможна при условии

$$\tilde{\lambda}_i=1+\lambda_i \neq 0, i=\overline{1, m}. \quad (8)$$

Условие (8) выполняется тогда, когда матрица  $\mathbf{A}$  является нильпотентной с любым индексом  $\nu$  нильпотентности или обладает неприводимым характеристическим многочленом [1–3]. При этом в случае, когда матрица  $\mathbf{A}$  ЛДДС (1) такова, что ее характеристический полином имеет четное число ненулевых элементов, включая единичный свободный член, то такая система при  $u(k)=1$  не имеет ненулевого неподвижного состояния.

Определим теперь состояния  $x(k)$ , из которых возможен переход в нулевое состояние  $x(k+1)=0$ . При  $u(k)=0$  нулевое состояние  $x(k)=0$  является неподвижным, поэтому переход в него возможен только из него. При  $u(k)=1$  состояние  $x(k)$ , из которого возможен переход в нулевое состояние  $x(k+1)=0$ , в силу (1) определяется выражением  $x(k)=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ .

### Замкнутые циклы линейных ДДС

Вынесенную в название данного параграфа проблему, как и при исследовании неподвижных состояний, будем решать с использованием модельных представлений ЛДДС отдельно для каждого из случаев:  $u(k)=0$  и  $u(k)=1$ .

Введем понятие *замкнутый цикл* в структуре пространства состояний линейной ДДС с помощью следующего определения.

**Определение 3 (О.3).** Пусть множество  $\tilde{X}$  мощности  $[\tilde{X}] = \tilde{N} = 2^m$  состояний линейной ДДС (5), тогда подмножество  $\tilde{\tilde{X}}$  множества  $\tilde{X}$ , содержащее  $T$  состояний, на котором выполняется соотношение  

$$x(k)=x(k+T), \quad (9)$$

называется замкнутым циклом длиной  $T$ .  $\square$

**Примечание 7 (П.7).** Нетрудно видеть, что условие (9), по существу, содержит определение понятия возвратных состояний, множество которых мощности  $T$  образует замкнутый цикл той же длины.

Рассмотрим структуру возвратных состояний, образующих цикл некоторой длины  $T=T(u)$ , при двух возможных значениях  $u(k)$ . Нетрудно видеть, что при  $u(k)=0$  множество возвратных состояний замкнутого цикла длиной  $T$  (9) состоит из состояний, определяемых в силу соотношений

$$\begin{cases} x(k); x(k+1)=\mathbf{A}x(k); x(k+2)=\mathbf{A}x(k+1)=\mathbf{A}^2x(k), \\ \dots, x(k+T-1)=\mathbf{A}^{T-1}x(k). \end{cases} \quad (10)$$

При  $u(k)=1$  возвратные состояния задаются системой соотношений

$$\begin{cases} x(k); x(k+1)=\mathbf{A}x(k)+\mathbf{B}; x(k+2)=\mathbf{A}x(k+1)+\mathbf{B}=\mathbf{A}^2x(k)+\mathbf{AB}+\mathbf{B}, \dots \\ \dots, x(k+T-1)=\mathbf{A}^{T-1}x(k)+\mathbf{A}^{T-2}\mathbf{B}+\dots+\mathbf{AB}+\mathbf{B} \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим факторы, определяющие длину  $T$  замкнутых циклов на множестве состояний ЛДДС при  $u(k)=0$ . С этой целью соотношение (9) запишем в форме

$$x(k) = \mathbf{A}^T x(k). \quad (12)$$

Сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 4 (У.4).** При  $x(k) \neq 0$  соотношение (12) выполняется в случаях, когда матрица  $\mathbf{A}$  принадлежит показателю  $\mu = T$ .  $\square$

**Доказательство** справедливости первой части утверждения строится на определении показателя  $\mu$ , которому принадлежит матрица  $\mathbf{A}$ , в соответствии с которым выполняется матричное равенство (2), подстановка  $\mu = T$  делает справедливым (12). Доказательство справедливости второй части утверждения строится на определении собственного вектора с учетом специфики простого поля Галуа  $GF(p)$  при  $p = 2$ . ■

Очевидно, что длина  $T$  замкнутых циклов при  $u(k)=0$  и  $u(k)=1$  удовлетворяет неравенствам  $1 \leq T \leq 2^m - 1$ .  $(13)$

Очевидно, что в структуре пространства  $(m \times m)$  матрицы  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС (5) имеется цикл длины  $T = 1$ , когда  $x(k)$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$ . Иначе говоря, ненулевое неподвижное состояние образует цикл длиной  $T = 1$ . Максимальная длина  $T = 2^m - 1$  имеет место, когда  $(m \times m)$  матрица  $\mathbf{A}$  и ее характеристический многочлен  $D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})$  принадлежат показателю  $\mu = 2^m - 1$ .

Наложим на неравенства (13), определяющие возможные по длине  $T$  циклы на множестве ненулевых состояний  $\tilde{x}$  мощности  $[\tilde{x}] = \tilde{N} = 2^m - 1$ , неравенства, оценивающие возможные показатели  $\mu$ , которым могут принадлежать  $(m \times m)$  матрица состояний ЛДДС и ее характеристический многочлен  $D(\lambda)$

$$m \leq \mu \leq 2^m - 1.$$

Рассмотрим теперь структуру замкнутых циклов линейной ДДС при  $u(k)=1$ . Описание ЛДДС для этого случая задается представлениями (1), в которых следует положить  $u(k)=1$  так, что получим:

$$x(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{B}; x(0). \quad (14)$$

Следует заметить, что введенное с помощью **О.3** определение замкнутого цикла длиной  $T$  сохраняется, однако структура этих циклов не только зависит от показателя  $\mu$ , которому принадлежит матрица  $\mathbf{A}$ , структуры собственных векторов  $\{\xi_f\}$  степенных матричных функций  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$  от  $(m \times m)$  матрицы  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС, но и от матрицы  $\mathbf{B}$ . Последняя может принадлежать пространству столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ , т.е. ее образу

$$\mathbf{B} \subset Jm \mathbf{A},$$

тогда пара матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  оказывается неполностью управляемой, простейшим случаем такой ситуации является случай, когда матрица  $\mathbf{B}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$ .

В этой связи сформулируем утверждение.

**Утверждение 5 (У.5).** Если матрица  $\mathbf{B}$  векторно-матричного описания ЛДДС является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$ , то ЛДДС с такой парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  не является полностью управляемой, при этом размерность подпространства управляемости равна единице.  $\square$

**Доказательство.** Тот факт, что матрица  $\mathbf{B}$  есть собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС над простым полем Галуа  $GF(2)$ , позволяет записать  $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ .

Составим матрицу управляемости пары  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

$$W_y(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B}]. \quad (15)$$

Для элементов  $W_y(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  можно записать

$$\mathbf{AB} = \mathbf{B}; \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \mathbf{AB} = \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{m-2} \mathbf{B}) = \dots = \mathbf{B}.$$

Подстановка полученных матричных равенств в (15) дает для матрицы управляемости

$$\text{rank } W_y(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{rank } [\mathbf{B} \ \mathbf{B} \ \mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{B}] = \text{rank } \mathbf{B} = 1 < m. \quad ■$$

Составим следующий алгоритм анализа структуры замкнутых циклов линейных ДДС с системной матрицей  $\mathbf{A}$ , имеющей своим характеристическим модулярным многочленом  $D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})$  неприводимый многочлен степени  $m$ .

**Алгоритм 1 (А.1)**

1. Построить векторно-матричное представление линейной двоичной динамической системы в рекуррентной форме (1).
2. Перейти от представления ЛДДС (1) к ее представлению в форме (5), положив в (1)  $u(k)=0$ .
3. Вычислить характеристический многочлен  $D(\lambda)$  матрицы  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС в силу соотношения  $D(\lambda)=\det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})$ .
4. Определить показатель  $\mu$ , которому принадлежит характеристический многочлен  $D(\lambda)$  и матрица  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС, с использованием таблиц многочленов, принадлежащих конкретному  $\mu$ , или возведением матрицы  $\mathbf{A}$  в степень над полем Галуа  $GF(2)$  до момента выполнения равенства (2).
5. Проанализировать полученное значение  $\mu$  по соотношению

$$2^m - 1 = m_\mu \mu + r_\Sigma,$$

из которого определить  $m_\mu$  – число циклов длины  $T = \mu$  и  $r_\Sigma$  – суммарную длину циклов, длины которых  $1 \leq T_r \leq r_\Sigma$ .

6. Определить состав и последовательность изменения состояний в замкнутых циклах длиной  $T = \mu$ , порожденных фактом принадлежности матрицы  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС показателю  $\mu$ , используя представление циклов в форме (10), в котором за исходное состояние  $x(k)$  цикла взять любое состояние множества  $\tilde{X}$ .
7. Сформировать структуру замкнутых циклов и неподвижных состояний линейной ДДС (5) (при  $u(k)=0$ ) п.п. 5, 6, дополнив их нулевым неподвижным состоянием.
8. Перейти от представления ЛДДС (1) к ее представлению в форме (14), положив в (1)  $u(k)=1$ .
9. Определить неподвижное состояние  $x(k): x(k+1)=x(k)$ , используя соотношение (6) или (7).
10. Определить состав и последовательность изменения состояний в замкнутых циклах длиной  $T = \mu$ , порожденных фактом принадлежности матрицы  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС показателю  $\mu$ , используя представление циклов в форме (11), в котором за исходное состояние  $x(k)$  цикла взять любое состояние множества  $\tilde{X}$ .
11. Сформировать структуру замкнутых циклов и неподвижных состояний линейной ДДС (14) (при  $u(k)=1$ ) п. 10, дополнив их неподвижным состоянием п. 9. ■

**Пример анализа структуры пространства состояний ЛДДС, представленной ее неподвижными состояниями и замкнутыми циклами**

В качестве примера рассматриваются ЛДДС с матрицами  $\mathbf{A}$  состояний размерности  $(m \times m) = (3 \times 3)$ . Структура пространства изучается на реализациях пар матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , в которых матрицы  $\mathbf{A}$  обладают характеристическими многочленами  $D(\lambda)$ , принадлежащими классу неприводимых степени  $\deg\{D(\lambda)\} = m$ , а множество ненулевых матриц  $\mathbf{B}$  характеризуется мощностью  $[\mathbf{B}] = 2^m - 1$ . Исследования начнем со случая, когда ХММ матрицы  $\mathbf{A}$  имеет вид  $D(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + 1$ . Тогда, следуя алгоритму А.1:

1. выполним п.п. 1–2, в результате чего ЛДДС будет иметь матрицу  $\mathbf{A}$  состояний, заданной во фробениусовой форме так, что она получает представление

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

4. путем вычисления степенной матричной функции  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^l$  установим, что при  $l = 7$  выполняется равенство  $\mathbf{A}^l = \mathbf{I}$ , на основании чего становится справедливым соотношение  $\mu = 7$ , где  $\mu$  – показатель, которому принадлежит матрица  $\mathbf{A}$ ;
5. анализируя значение  $\mu$ , обнаружим справедливость разложения мощности  $2^m - 1$  множества ненулевых состояний в форме  $2^m - 1 = 7 = 1 \cdot 7 + 0$ , что свидетельствует о наличии в структуре пространства матрицы  $\mathbf{A}$  состояний ЛДДС одного замкнутого цикла длиной  $T = \mu = 7$ ;

6. определим состав и последовательность смены состояний ЛДДС в замкнутом цикле длины  $T = \mu = 7$ , порожденного фактом принадлежности матрицы  $\mathbf{A}$  показателю  $\mu = 7$ . В качестве стартового состояния примем состояние, характеризующееся минимальным кодовым расстоянием с нулевым состоянием ЛДДС, не входящим в состав цикла  $x(k) = [0 \ 0 \ 1]^T$ . Если воспользоваться (10), то получим замкнутый цикл, характеризующийся составом и последовательностью

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\};$$

7. получим полную структуру замкнутых циклов и неподвижных состояний при  $u(k) \equiv 0$  (рис. 1);

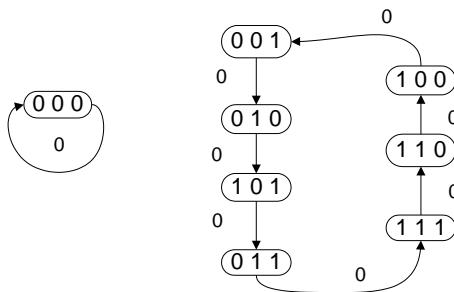


Рис. 1. Структура замкнутых циклов и неподвижных состояний ЛДДС при  $u(k) \equiv 0$

8. для рассмотрения ЛДДС вида (14) для матрицы  $\mathbf{B}$  входа положим  $\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 1]^T$ ;

9. для поиска неподвижного состояния  $x(k)$ :  $x(k+1) = x(k)$  используем соотношение (6) и получим

$$x(k) = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

10. определим состав и последовательность смены состояний ЛДДС в замкнутом цикле длины  $T = \mu = 7$ , порожденной фактом принадлежности матрицы  $\mathbf{A}$  показателю  $\mu = 7$ . В качестве стартового состояния одного из циклов примем состояние, отличное от состояния п. 9 примера, например, нулевое состояние ЛДДС  $x(k) = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Если воспользоваться (11), то получим замкнутый цикл, характеризующийся составом и последовательностью

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\};$$

11. получим полную структуру замкнутых циклов и неподвижных состояний при  $u(k) = 1$  (рис. 2).

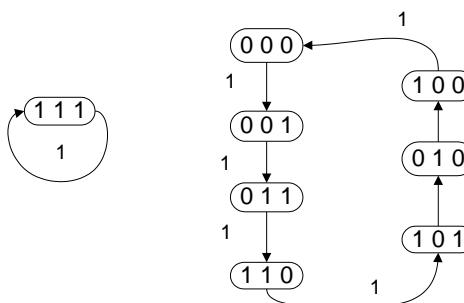


Рис. 2. Структура циклов и неподвижных состояний ЛДДС с парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  при  $u(k) = 1$

Воспользуемся алгоритмом А.1 для всех пар матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , оговоренных в преамбуле примера. Полученные результаты сведены в таблицу. Для компактности записи в таблице использованы представления матриц, циклов, последовательностей в виде их десятичных эквивалентов, причем величина периодичности представлена скобочной записью с указанием длительности периода в виде нижнего индекса у правой скобки.

Матрица $\mathbf{A}^T$	Показатель $\mu$	$u(k) \equiv 0$	$u(k)=1$ , Матрица $\mathbf{B}^T$						
		0	1	2	3	4	5	6	7
[2, 1, 6]	7	(1, 3, 7, 6, 5, 2, 4) <sub>7</sub> , (0) <sub>1</sub>	(1, 2, 5, 3, 7, 6, 4) <sub>7</sub> , (0) <sub>1</sub>	(0, 1, 3, 6, 5, 4, 2) <sub>7</sub> , (7) <sub>1</sub>	(0, 2, 7, 4, 3, 5, 1) <sub>7</sub> , (6) <sub>1</sub>	(0, 3, 4, 2, 6, 7, 5) <sub>7</sub> , (1) <sub>1</sub>	(0, 4, 5, 7, 2, 1, 6) <sub>7</sub> , (3) <sub>1</sub>	(0, 5, 6, 1, 7, 3, 2) <sub>7</sub> , (4) <sub>1</sub>	(0, 7, 1, 5, 4, 6, 3) <sub>7</sub> , (2) <sub>1</sub>
[2, 1, 5]	7	(0, 1, 2, 5, 3, 6, 4) <sub>7</sub> , (7) <sub>1</sub>	(0, 3, 4, 2, 7, 5, 1) <sub>7</sub> , (1) <sub>1</sub>	(0, 3, 4, 2, 7, 5, 1) <sub>7</sub> , (6) <sub>1</sub>	(0, 4, 5, 6, 1, 7, 2) <sub>7</sub> , (3) <sub>1</sub>	(0, 5, 7, 3, 2, 1, 6) <sub>7</sub> , (4) <sub>1</sub>	(0, 6, 3, 1, 5, 4, 7) <sub>7</sub> , (2) <sub>1</sub>	(0, 6, 2, 3, 1, 4, 7) <sub>7</sub> , (5) <sub>1</sub>	(0, 7, 1, 4, 6, 2, 3) <sub>7</sub> , (5) <sub>1</sub>

Таблица. Структура циклов и неподвижных состояний всех возможных вариантов реализаций пар  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  матриц, задающих соответствующие ЛДДС при размерности вектора состояния  $\dim x = 3$

#### Анализ структуры состояний ЛДДС, из которых под действием $u(k)=1$ возможен переход в нулевое состояние

Проблема вычисления состояний, из которых ЛДДС переходит в нулевое состояние  $x(k+1) \equiv 0$ , сводится к решению уравнения (14) при нулевой левой части. Тогда искомый  $x(k)$  при  $x(k+1) \equiv 0$  и  $u(k)=1$  определяется выражением

$$x(k) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \quad (16)$$

Если рассмотреть ЛДДС с парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , где матрица  $\mathbf{A}$  задается в форме п. 1 примера, а матрица  $\mathbf{B}$  – в форме п. 8 примера, то состояние  $x(k)$ , удовлетворяющее условию (16), получает представление

$$x(k) = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

#### Заключение

Предложенная в работе алгоритмическая среда анализа структуры пространства состояний ЛДДС делает алгебраически прозрачным процесс преобразования двоичных кодов [1–3], что особенно важно при решении задач помехозащитного преобразования этих кодов. Становится наглядной необходимость выбора неприводимых многочленов в качестве образующих многочленов помехозащищенного кода с максимальным значением  $\mu$  их принадлежности.

#### Литература

- Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. – М.: Советское радио, 1975. – 248 с.
- Гилл А. Линейные последовательностные машины. – М.: Наука, 1974. – 288 с.
- Мельников А.А., Ушаков А.В. Двоичные динамические системы дискретной автоматики / Под ред. А.В. Ушакова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. – 214 с.
- Ушаков А.В., Яицкая Е.С. Рекуррентное систематическое помехозащитное преобразование кодов: возможности аппарата линейных двоичных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. – 2011. – № 3. – С. 17–25.
- Ушаков А.В., Яицкая Е.С. Динамическое наблюдение нелинейных двоичных динамических систем // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 4. – С. 38–44.
- Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

**Ушаков Анатолий Владимирович** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-AVG@yandex.ru

**Яицкая Елена Сергеевна** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, yaitskayaes@mail.ru