

УДК 517.968, 539.261

**АНАЛИЗ И УЧЕТ КОЛЛИМАЦИОННЫХ ИСКАЖЕНИЙ  
ПРИ МАЛОУГЛОВОМ РЕНТГЕНОВСКОМ РАССЕЙАНИИ  
НА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРАХ.  
ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ  
НА КАЧЕСТВО КОЛЛИМАЦИОННОГО ПЕРЕСЧЕТА**

А.В. Смирнов, Д.Д. Захаров, Б.А. Федоров

Для ориентированных однородных цилиндров получены интенсивности малоуглового рентгеновского рассеяния, в них внесены коллимационные искажения. На основе развитых ранее методов коллимационного пересчета рассчитаны восстановленные интенсивности рассеяния, которые сравнивались с неискаженными интенсивностями. Показано, что возникающая при этом относительная погрешность составляет несколько процентов, что свидетельствует о высоком качестве коллимационного пересчета. Показано также, что внесение в искаженные интенсивности рассеяния статистического шума в 1% и 4% – что соответствует реальным условиям рентгеновского эксперимента – лишь незначительно ухудшает совпадение исходных и восстановленных интенсивностей рассеяния.

**Ключевые слова:** малоугловое рентгеновское рассеяние, ориентированные однородные цилиндры, метод базисных функций, итерационный метод Фридмана.

### Введение

Использование коллимационных щелей при рентгеновском малоугловом рассеянии приводит к искажению экспериментальных индикатрис, что существенно затрудняет их интерпретацию с точки зрения структуры рассеивающего объекта [1]. Для устранения этого недостатка необходимо ввести коллимационные поправки, позволяющие перейти от «искаженной» интенсивности рассеяния  $J$  при коллимационной системе «щель–щель» к «точечной» интенсивности рассеяния  $I$  при коллимационной системе «точка–точка». В случае изотропных объектов, для которых интенсивность зависит только от угла рассеяния  $\theta$ , такие поправки вносятся сравнительно легко [2–5]. Для анизотропных объектов интенсивности  $J(\theta, \varphi)$  и  $I(\theta, \varphi)$  являются двухпараметрическими функциями, зависящими как от угла рассеяния  $\theta$ , так и от угла поворота  $\varphi$  рассеивающего образца относительно коллимационной щели. При этом задача внесения коллимационных поправок становится несравненно более сложной [6].

В недавней работе [7] для решения этой задачи были развиты два метода. Первый из них – метод базисных функций (МБФ) [8] – состоит в том, что экспериментальная интенсивность рассеяния представляется в виде линейной комбинацией двумерных базисных функций и с помощью модифицированного метода наименьших квадратов достигается наилучшее согласие между исходной экспериментальной интенсивностью рассеяния и интенсивностью, полученной с помощью разложения по базисным функциям. Второй метод – модифицированный метод Фридмана (ММФ), основанный на итерационном методе Фридмана [9], существенно дополнен в соответствии с особенностями настоящей задачи. Показано, что оба метода дают достаточно высокую точность коллимационного пересчета как в случае рассеяния на ряде анизотропных модельных объектов, так и в случае экспериментальных индикатрис рассеяния при анизотропном рассеянии на отожженных пленках из высокоориентированного полиэтилена.

В настоящей работе с помощью указанных методов рассмотрен еще один модельный объект – ориентированные цилиндры разной вытянутости, и на его основе проведена оценка влияния экспериментальных погрешностей на относительную ошибку, возникающую при внесении коллимационных поправок.

### Основы метода базисных функций и модифицированного метода Фридмана [7]

$$J(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} I\left(\sqrt{\theta^2 + \chi^2}, |\arctg(\chi/\theta) + \varphi|\right) W(\chi) d\chi, \quad (1)$$

где  $W(\chi)$  – «весовая функция», зависящая только от параметров рентгеновской установки;  $I(\theta, \varphi)$  – точечная интенсивность рассеяния, рассчитанная для выбранной анизотропной модели в условиях точечного источника и точечного приемника рентгеновского излучения;  $J(\theta, \varphi)$  – искаженная интенсивность рассеяния, рассчитанная по формуле (1) с учетом параметров используемой коллимационной системы;  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$  – зашумленная («псевдоэкспериментальная») интенсивность рассеяния;  $\tilde{I}(\theta, \varphi)$  – восстановлен-

ная точечная интенсивность рассеяния, рассчитанная на основе развитых методов (МБФ и ММФ);  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$  – восстановленная искаженная интенсивность рассеяния, рассчитанная по формуле (1) с использованием  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$  как новой точечной интенсивности.

**МБФ.** Введем  $\|f\|$  – норму в пространстве квадратично интегрируемых функций двух переменных  $\theta$  и  $\varphi$ :  $\|f\| = \sqrt{\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} f^2(\theta, \varphi) d\theta d\varphi}$ . С использованием данной нормы относительное отклонение

функции  $f_1$  от функции  $f_2$  можно определить как  $\delta(f_1, f_2) = \frac{\|f_1 - f_2\|}{\|f_2\|}$ .

Выбираются базисные функции  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) так, чтобы их линейная комбинация  $I' = \sum_{i=1}^n c_i f_i$  могла хорошо описывать  $I$ . Для этих функций должны существовать такие коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , для которых относительное отклонение  $\delta(I, I')$  является достаточно малой величиной.

Рассмотрим уравнение  $J' = A(I')$ . Исходя из линейности оператора  $A$ ,  $J' = \sum_{i=1}^n c_i F_i$ , где  $F_i = A(f_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). В поставленной задаче  $I$  является искомой функцией, и представить ее разложение по базисным функциям в явном виде нельзя. Однако можно найти для экспериментальной интенсивности  $J$  ее приближение как разложение  $J'$  по функциям  $F_i$ . При корректном выборе функций  $f_i$  можно определить коэффициенты, для которых  $\delta(J, J')$  будет достаточно малым. Эти коэффициенты будут использованы для построения восстановленной точечной интенсивности

$$I' = \sum_{i=1}^n c_i f_i. \tag{2}$$

Так как исходная задача некорректна, то, очевидно, одной экспериментальной функции  $J$  соответствует множество решений  $I$ , для которых выполняется уравнение  $J = A(I)$ . Для того чтобы сузить класс решений, следует: а) выбрать базисные функции, наилучшим образом соответствующие данной задаче; б) ввести дополнительные ограничения на решение, используя его известные свойства. Двухмерные базисные функции  $f_i$  были построены как прямое произведение одномерных кубических В-сплайнов [10].

Для получения коэффициентов разложения по базисным функциям использовался метод наименьших квадратов (МНК), который был модифицирован исходя из двух положений. Первое состоит в том, что при применении МНК к быстро спадающим функциям возникают коэффициенты  $c_i$ , имеющие большие значения и противоположные знаки. При этом в решении появляются нежелательные осцилляции, которых не должно быть в искомой функции. Второе положение связано с тем, что для нулевого угла рассеяния ( $\theta = 0$ ) точечная интенсивность должна оставаться постоянной при изменении угла  $\varphi$ , т.е.  $I(0, \varphi) = \text{const}$ .

Математический формализм, развитый с учетом указанных положений, приводит к системе линейных уравнений относительно коэффициентов  $c_i$ :

$$\sum_{j=1}^n c_j \left[ \sum_{k=1}^M F_i(\theta_k, \varphi_k) F_j(\theta_k, \varphi_k) + \lambda_2 \sum_{k \in K} \delta f_i(\theta_k, \varphi_k) \delta f_j(\theta_k, \varphi_k) \right] + \lambda_1 c_i = \sum_{k=1}^M J(\theta_k, \varphi_k) F_i(\theta_k, \varphi_k), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

где  $\delta f_j(\theta_k, \varphi_k) = \langle f_j(\theta_k, \varphi_k) \rangle_K - f_j(\theta_k, \varphi_k) = \frac{1}{N_K} \sum_{k \in K} f_j(\theta_k, \varphi_k) - f_j(\theta_k, \varphi_k)$ .

Здесь  $\theta_k, \varphi_k$  – значения угла рассеяния и угла поворота образца, для которых получена экспериментальная интенсивность;  $M$  – общее число экспериментальных точек;  $K$  – множество точек, соответствующих  $\theta = \theta_{\min}$ ;  $N_K$  – количество точек в множестве  $K$ ; а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – параметры, выбор которых детально рассмотрен в [4].

**ММФ.** Согласно классическому итерационному методу Фридмана выбирается начальное приближение  $I_0$  (например,  $I_0(\theta, \varphi) = 0$ ), и каждое последующее приближение в каждой точке  $(q, \varphi)$  получается на основе рекуррентного соотношения

$$I_{n+1}(\theta, \varphi) = I_n(\theta, \varphi) + \nu [J(\theta, \varphi) - J_n(\theta, \varphi)], \quad (4)$$

где  $J_n = A(I_n)$ ,  $A(I)$  – интегральный оператор, а  $\nu$  – числовой параметр, регулирующий скорость сходимости решения.

Согласно (4), для приближения к точному решению нужно изменить значение  $I_n$  в каждой точке  $(\theta, \varphi)$  так, чтобы разность  $[J(\theta, \varphi) - J_n(\theta, \varphi)]$  уменьшилась. Однако проблема заключается в том, что изменение значения  $I_n$  в точке  $(\theta, \varphi)$  может привести к изменению значения  $J_n$  не в точке  $(\theta, \varphi)$ , а во множестве других точек. В этом случае изменение  $I_n$  в точке  $(\theta, \varphi)$  на основе разности  $[J(\theta, \varphi) - J_n(\theta, \varphi)]$  теряет смысл. Для исправления этого недостатка необходимо учесть влияние значения  $I_n(\theta, \varphi)$  на значения  $J_n$  в различных точках. Вводится и обосновывается «функция влияния»  $\omega(\xi, \eta, \theta, \varphi)$ , которая учитывает влияние аргумента оператора  $A$  (функции  $I_n$ ) в точке  $(\xi, \eta)$  на значение функции  $J_n$  в другой точке  $(\theta, \varphi)$ .

Итерационная процедура (4) с учетом «функции влияния» может быть представлена в виде

$$I_{n+1}(\xi, \eta) = I_n(\xi, \eta) + \nu \left[ \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \omega(\xi, \eta, \theta, \varphi) \cdot (J(\theta, \varphi) - J_n(\theta, \varphi)) d\theta d\varphi \right]. \quad (5)$$

Выбор оптимального количества итераций  $n_{\text{опт}}$ , а также регулировочного параметра  $\nu$  описан в работе [7].

### **Оценка эффективности методов коллимационного пересчета на примере однородных ориентированных цилиндров**

Из общей теории дифракции [11] следует, что если в реальном пространстве  $(x, y, z)$  цилиндр ориентирован по оси  $z$ , то в обратном пространстве  $(X, Y, Z)$ , его интенсивность рассеяния имеет вид

$$I(X, Y, Z) = \left( \frac{d \sin(\pi b Z) J_1(\pi d \sqrt{X^2 + Y^2})}{2\pi Z \sqrt{X^2 + Y^2}} \right)^2, \quad (6)$$

где  $d$  – диаметр цилиндра,  $b$  – его высота. При переходе в координаты  $\theta$  и  $\varphi$  в формуле (6) следует выбрать  $X = 0$ ,  $Y = \frac{\theta \sin \varphi}{\lambda}$  и  $Z = \frac{\theta \cos \varphi}{\lambda}$ .

В работе рассмотрены два цилиндра с одинаковым радиусом, но разной высотой. Интенсивность рассчитывалась в интервале углов  $0,5 \text{ мрад} \leq \theta \leq 10,5 \text{ мрад}$  и  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  при длине волны  $\lambda_{\text{CuK}\alpha} = 0,1542 \text{ нм}$ .

Для оценки влияния экспериментальной погрешности на качество коллимационного пересчета в искаженную (экспериментальную) интенсивность  $J$  рассеяния в каждой точке  $\theta_k, \varphi_k$  вносился статистический «шум», распределенный по нормальному закону со средним квадратичным отклонением

$$\sigma(\theta_k, \varphi_k) = \sqrt{J(\theta_k, \varphi_k)} + 10^{-4} J(0,0),$$

причем в качестве общей относительной погрешности интенсивности (в %) выбиралось  $\delta(J, \tilde{J})$ , где  $\tilde{J}$  – зашумленная интенсивность. Уровень шума можно менять, умножая интенсивность  $J$  во всех точках на один и тот же коэффициент. Для зашумленных («псевдоэкспериментальных») интенсивностей, полученных с разным уровнем шума  $\delta(J, \tilde{J})$ , рассчитывались обоими методами восстановленные точечные  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  интенсивности, и на их основе с использованием формул (2) или (5) рассчитывались соответствующие восстановленные искаженные интенсивности рассеяния  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$ .

**Параметры цилиндра:  $d = 20 \text{ нм}$ ,  $b = 40 \text{ нм}$ .** Исходя из выражения (6), была рассчитана точечная интенсивность рассеяния цилиндра  $I(\theta, \varphi)$  (рис. 1, а), а по формуле (1) – искаженная интенсивность  $J(\theta, \varphi)$ , в которую был внесен «шум» в 1% и 4%, и получены зашумленные («псевдоэкспериментальные») интенсивности  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$  (рис. 2, а). На приводимых ниже рисунках представлены интенсивности, относящиеся только к шуму в 4%.

**МБФ.** По формулам (2) и (3) для  $J(\theta, \varphi)$  были рассчитаны восстановленная точечная  $I'(\theta, \varphi)$  и на ее основе – восстановленная искаженная  $J'(\theta, \varphi)$  интенсивности рассеяния. Для зашумленных интенсивностей  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$  рассчитывались соответствующие восстановленные точечные интенсивности  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  (рис. 1, б). Далее на основе полученных функций  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  по формуле (1) вновь рассчитывались восстановленные искаженные интенсивности рассеяния  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$  как для шума в 1%, так и для шума в 4% (рис. 2, б).

**ММФ.** По формуле (5) для  $J(\theta, \varphi)$  были рассчитаны восстановленная точечная  $I'(\theta, \varphi)$  и на ее основе – восстановленная искаженная  $J'(\theta, \varphi)$  интенсивности рассеяния. Для зашумленных интенсивностей  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$  (рис. 2, а) по формуле (5) рассчитывались соответствующие восстановленные точечные интенсивности  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  (рис. 1, с). Далее на основе полученных функций  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  по формуле (5) вновь рассчитывались восстановленные искаженные интенсивности рассеяния  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$  для шума в 1% и 4% (рис. 2, с).

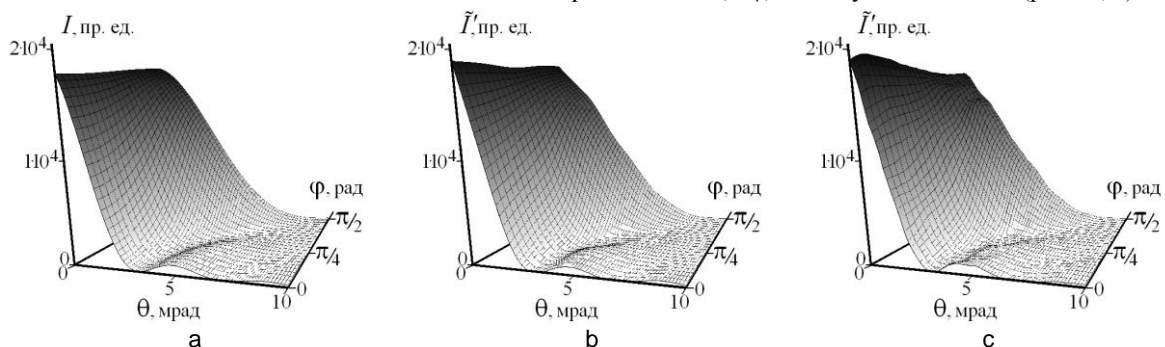


Рис. 1. Интенсивности рассеяния однородным ориентированным цилиндром с параметрами  $d = 20$  нм,  $b = 40$  нм: (а) – точечная интенсивность  $I(\theta, \varphi)$ ; (б) – восстановленная точечная интенсивность  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$ ,

МБФ, «шум» в 4%; (с) – восстановленная точечная интенсивность  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$ , ММФ, «шум» в 4%

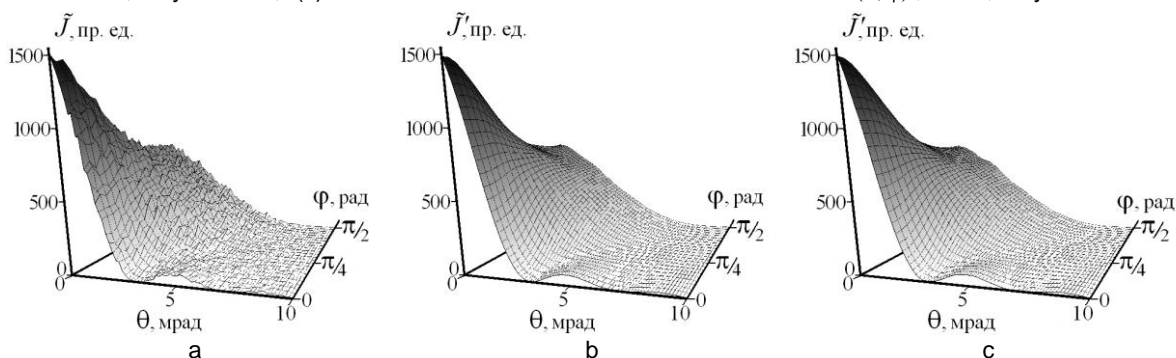


Рис. 2. Интенсивности рассеяния однородным ориентированным цилиндром с параметрами  $d = 20$  нм,  $b = 40$  нм: (а) – зашумленная («псевдоэкспериментальная») интенсивность  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$ ;

(б) – восстановленная искаженная интенсивность  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$ , МБФ, «шум» в 4%;

(с) – восстановленная искаженная интенсивность  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$ , ММФ, «шум» в 4%

**Параметры цилиндра:  $d = 20$  нм,  $b = 80$  нм.** Исходя из выражения (6), была рассчитана точечная интенсивность рассеяния цилиндра  $I(\theta, \varphi)$  (рис. 3, а), а по формуле (1) – искаженная интенсивность  $J(\theta, \varphi)$ , в которую был внесен «шум» в 1% и 4%, и получены зашумленные («псевдоэкспериментальные») интенсивности  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$  (рис. 4, а). На приводимых ниже рисунках представлены интенсивности, относящиеся только к шуму в 4%.

**МБФ.** По формулам (2) и (3) для  $J(\theta, \varphi)$  были рассчитаны восстановленная точечная  $I'(\theta, \varphi)$  и на ее основе – восстановленная искаженная  $J'(\theta, \varphi)$  интенсивности рассеяния. Для зашумленных интенсивностей  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$  рассчитывались соответствующие восстановленные точечные интенсивности  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  (рис. 3, б). Далее на основе полученных функций  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  по формуле (1) вновь рассчитывались восстановленные искаженные интенсивности рассеяния  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$  как для шума в 1%, так и для шума в 4% (рис. 4, б).

**ММФ.** По формуле (5) для  $J(\theta, \varphi)$  были рассчитаны восстановленная точечная  $I'(\theta, \varphi)$  и на ее основе – восстановленная искаженная  $J'(\theta, \varphi)$  интенсивности рассеяния. Для зашумленных интенсивностей  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$  по формуле (5) рассчитывались соответствующие восстановленные точечные интенсивности  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  (рис. 3, с). Далее на основе полученных функций  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$  по формуле (5) вновь рассчитывались восстановленные искаженные интенсивности рассеяния  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$  для шума в 1% и 4% (рис. 4, с).

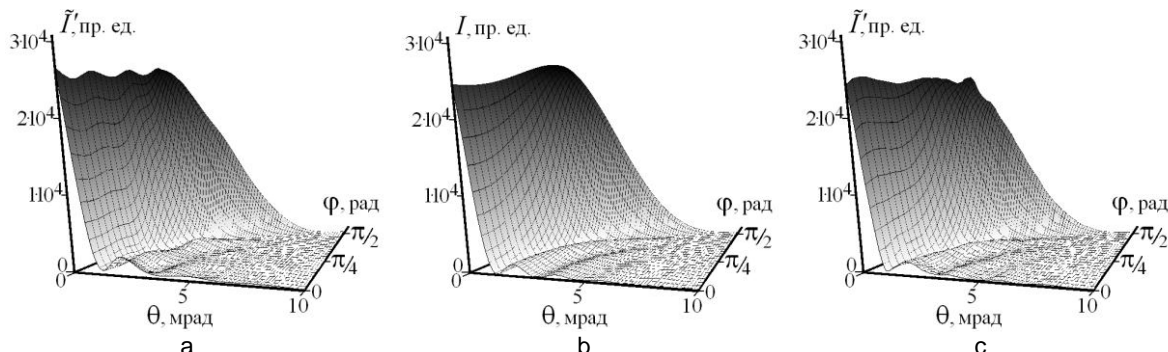


Рис. 3. Интенсивности рассеяния однородным ориентированным цилиндром с параметрами  $d = 20$  нм,  $b = 80$  нм: (а) – точечная интенсивность  $I(\theta, \varphi)$ ; (б) – восстановленная точечная интенсивность  $I'(\theta, \varphi)$ , МБФ, «шум» в 4%; (с) – восстановленная точечная интенсивность  $\tilde{I}'(\theta, \varphi)$ , ММФ, «шум» в 4%

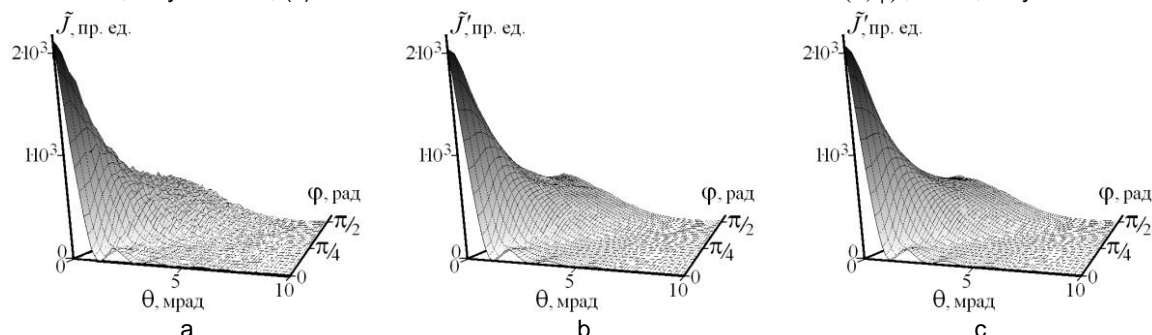


Рис. 4. Интенсивности рассеяния однородным ориентированным цилиндром с параметрами  $d = 20$  нм,  $b = 80$  нм: (а) – зашумленная («псевдоэкспериментальная») интенсивность  $\tilde{J}(\theta, \varphi)$ ; (б) – восстановленная искаженная интенсивность  $J'(\theta, \varphi)$ , МБФ, «шум» в 4%; (с) – восстановленная искаженная интенсивность  $\tilde{J}'(\theta, \varphi)$ , ММФ, «шум» в 4%

### Заключение

Результаты, отражающие качество коллимационного пересчета, представлены в таблице.

Уровень шума	Метод базисных функций			Модифицированный метод Фридмана			Расхождение результатов
	2	3	4	5	6	7	
$\delta(I, \tilde{I}), \%$	$\delta(I, \tilde{I}'), \%$	$\delta(\tilde{J}, \tilde{J}'), \%$	$\delta(J, \tilde{J}'), \%$	$\delta(I, \tilde{I}'), \%$	$\delta(\tilde{J}, \tilde{J}'), \%$	$\delta(J, \tilde{J}'), \%$	$\delta(\tilde{I}'_{\text{МБФ}}, \tilde{I}'_{\text{ММФ}}), \%$
Однородный ориентированный цилиндр с параметрами $d = 20$ нм, $b = 40$ нм							
0	1,0	0,6	0,6	3,3	0,8	0,08	2,6
1,0	1,4	1,1	0,6	3,1	0,9	0,3	2,9
4,0	2,5	4,0	1,0	3,4	3,8	0,9	2,8
Однородный ориентированный цилиндр с параметрами $d = 20$ нм, $b = 80$ нм							
0	2,7	0,8	0,8	3,8	0,3	0,3	2,6
1,0	3,4	1,4	1,1	3,9	0,9	0,4	5,3
4,0	5,6	4,1	1,5	4,8	3,8	1,1	5,2

Таблица. Относительное расхождение между интенсивностями: точечной и точечной восстановленной; искаженной и искаженной восстановленной для рассеяния на однородном ориентированном цилиндре при различном уровне вносимого «шума»

Из анализа этой таблицы можно сделать следующие заключения.

1. Погрешность восстановления как точечных, так и искаженных интенсивностей рассеяния нигде не превышает нескольких процентов даже с учетом «псевдоэкспериментальной» зашумленности.
2. Оба метода дают приблизительно одинаковый результат внесения коллимационных поправок, хотя, как можно видеть из сравнения столбцов 2 и 5, МБФ «работает» несколько лучше, если «шум» не слишком большой и цилиндры не слишком вытянутые. Из сравнения точечных интенсивностей рассеяния, восстановленных методами МБФ и ММФ (столбец 8), следует, что результаты применения обоих методов согласуются с точностью в несколько процентов.
3. Зашумление искаженной интенсивности, т.е. переход от  $J$  к  $\tilde{J}$ , естественно, приводит к появлению расхождения между этими функциями (столбец 1). Интересно, однако, отметить, что если эту зашумленную искаженную интенсивность  $\tilde{J}$  «пропустить» через двойной коллимационный пересчет  $\tilde{J} \rightarrow \tilde{J}' \rightarrow \tilde{J}''$ , то полученная восстановленная искаженная интенсивность  $\tilde{J}''$  оказывается заметно ближе к незашумленной искаженной интенсивности  $J$ , чем просто зашумленная искаженная интенсивность  $\tilde{J}$ : ср. столбцы 1 и 4 (МБФ) и 1 и 7 (ММФ). Эту закономерность можно также проследить при сравнении рис. 2, а–с, (цилиндр 20×40) и рис. 4, а–с, (цилиндр 20×80). Как видно, поверхности  $\tilde{J}$  на рис. 2, а, и рис. 4, а, оказываются существенно более шероховатыми по сравнению с поверхностями  $\tilde{J}''$  на рис. 2, б, с, и рис. 4, б, с, соответственно.

### Литература

1. Симаков А.П., Федоров Б.А., Смирнов А.В. Исследование поверхности тонкодисперсных фракций ряда минералов с помощью рентгеновского малоуглового рассеяния // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2009. – № 2(60). – С. 59–66.
2. Kratky O. Instrumentation, Experimental Technique, Slit Collimation, in Small-angle X-ray scattering. – London: Academic Press, 1983. – P. 53–84.
3. Федоров Б.А. Учет коллимационных искажений при малоугловом рассеянии рентгеновых лучей. Поправка на высоту щелей // Кристаллография. – 1968. – Т. 13. – № 5. – С. 763–769.
4. Schelten J., Hossfeld F. Application of spline functions to the correction of resolution errors in small angle scattering // J. Appl. Cryst. – 1971. – V. 4. – P. 210–223.
5. Фомичева Е.Е., Темнов Д.Э., Смирнов А.В., Федоров Б.А. Влияние дисперсионного наполнителя на основе алюминия на структуру и свойства полипропилена // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2009. – № 6(64). – С. 59–65.
6. Захаров Д.Д., Сизиков В.С., Смирнов А.В., Федоров Б.А. Решение двухмерной коллимационной задачи рассеяния рентгеновских лучей с использованием нестандартных интегральных уравнений // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2006. – № 32. – С. 144–153.
7. Захаров Д.Д., Смирнов А.В., Федоров Б.А. Решение коллимационной задачи при малоугловом рентгеновском рассеянии на анизотропных объектах // Наносистемы: физика, химия, математика. – 2011. – Т. 2. – № 3. – С. 26–44.
8. Glatter O. Data Evaluation in Small Angle Scattering: Calculation Electron Density Distribution by Means of Indirect Fourier Transformation // Acta Physica Austriaca. – 1977. – V. 47. – P. 83–102.
9. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.
10. Greville T.N.E. Introduction to spline functions. In Theory and Applications of Spline Functions. – New York: Academic Press, 1969. – P. 1–35.
11. Вайнштейн Б.К. Дифракция рентгеновских лучей на цепных молекулах. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 372 с.

- Смирнов Александр Витальевич** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, smirnav@phd.ifmo.ru
- Захаров Денис Дмитриевич** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, denzakharov@gmail.com
- Федоров Борис Александрович** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, профессор, borfedorov@rambler.ru