

УДК 532.529

**МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ  
В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ  
ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ<sup>1</sup>**К.Н. Волков<sup>a,b</sup><sup>a</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия;<sup>b</sup> Университет Кингстона, Лондон, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

Рассматриваются концепции и методы визуального представления результатов численных исследований задач механики жидкости и газа. Трехмерность моделируемого нестационарного течения создает существенные трудности для визуального представления результатов, затрудняя контроль и понимание численных данных, а также работу и обмен с полученной информацией о поле течения. Обсуждаются подходы к визуализации вихревых течений с использованием градиентов основных и производных скалярных и векторных полей. Дается обзор методов визуализации вихревых течений, использующих различные определения вихря и критерии его идентификации. Приводятся примеры визуализации решений ряда задач газовой динамики, связанных с расчетами течений в струях и в кавернах. Развиваются представления о вихревой структуре свободной неизотермической струи и формировании когерентных вихревых структур в слое смешения. Проводится анализ закономерностей формирования пространственных потоков внутри крупномасштабных вихревых структур в пределах замкнутого пространства кубической каверны с подвижной стенкой. На основе численных расчетов находятся особые точки вихревого течения жидкости в кубической каверне, определяется их тип и местоположение в зависимости от числа Рейнольдса. Расчеты проводятся с использованием подробных сеток и современных подходов к моделированию вихревых течений (прямое численное моделирование и моделирование крупных вихрей). Для визуального представления результатов численного моделирования применяется парадигма графического программирования и виртуальная среда COVISE. Приложение, реализующее визуализацию задачи, представляется в виде сети, звеньями которой являются модули, каждый из которых предназначен для решения специфической задачи. Взаимодействие между модулями осуществляется при помощи входных и выходных портов (прием и передача данных), что позволяет использовать различные устройства ввода и вывода данных.

**Ключевые слова:** научная визуализация, вычислительная газовая динамика, вихрь, турбулентность, струя, каверна.

**VISUALIZATION METHODS OF VORTICAL FLOWS IN COMPUTATIONAL  
FLUID DYNAMICS AND THEIR APPLICATIONS<sup>1</sup>**K.N. Volkov<sup>a,b</sup><sup>a</sup> ITMO University, Saint Petersburg, Russia<sup>b</sup> Kingston University, London, United Kingdom, k.volkov@kingston.ac.uk

The paper deals with conceptions and methods for visual representation of research numerical results in the problems of fluid mechanics and gas. The three-dimensional nature of unsteady flow being simulated creates significant difficulties for the visual representation of results. It complicates control and understanding of numerical data, and exchange and processing of obtained information about the flow field. Approaches to vortical flows visualization with the usage of gradients of primary and secondary scalar and vector fields are discussed. An overview of visualization techniques for vortical flows using different definitions of the vortex and its identification criteria is given. Visualization examples for some solutions of gas dynamics problems related to calculations of jets and cavity flows are presented. Ideas of the vortical structure of the free non-isothermal jet and the formation of coherent vortex structures in the mixing layer are developed. Analysis of formation patterns for spatial flows inside large-scale vortical structures within the enclosed space of the cubic lid-driven cavity is performed. The singular points of the vortex flow in a cubic lid-driven cavity are found based on the results of numerical simulation; their type and location are identified depending on the Reynolds number. Calculations are performed with fine meshes and modern approaches to the simulation of vortical flows (direct numerical simulation and large-eddy simulation). Paradigm of graphical programming and COVISE virtual environment are used for the visual representation of computational results. Application that implements the visualization of the problem is represented as a network which links are modules and each of them is designed to solve a case-specific problem. Interaction between modules is carried out by the input and output ports (data receipt and data transfer) giving the possibility to use various input and output devices.

**Keywords:** scientific visualization, computational fluid dynamics, vortex, turbulence, jet, cavity.

<sup>1</sup> Исследования частично поддержаны Акцией исследовательской инфраструктуры Европейского Сообщества (грант VISIONAIR 262044), программа 7-го раздела (FP7/2007-2013).

<sup>1</sup> The research leading to these results has been partially supported by the European Community's Research Infrastructure Action (grant agreement VISIONAIR 262044) under the 7th Framework Programme (FP7/2007-2013).

**Введение**

Визуализация в вычислительной газовой динамике (Computational Fluid Dynamics, CFD) представляет собой заключительный этап моделирования (рис. 1), необходимый для анализа структуры течения и выяснения механизмов переноса в потоках жидкости и газа [1, 2]. Вычислительный процесс предоставляет информацию о полях скорости, давления и температуры, а также о распределениях переносимых величин, изменяющихся во времени.

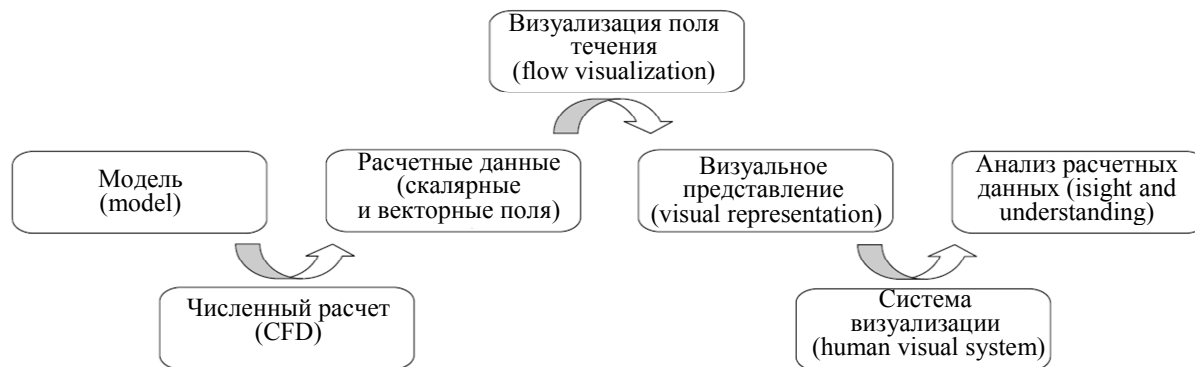


Рис. 1. Основные этапы численного моделирования

Методы графического представления моделируемых течений развиваются на основе опыта экспериментального наблюдения течений жидкости и газа, визуализируемых за счет введения красящих добавок, инъекции струек дыма, гелиевых пузырьков или механических включений в движущуюся среду с использованием оптических методов наблюдения. Применяются традиционные способы построения линий тока и траектории отмеченных частиц, а для выделения зон резкого изменения давления в заданных областях течения – приемы специальной фототехники.

Полученные в расчетах данные существуют в виде полей скалярных или векторных величин (рис. 2). Изображение линий уровня и заливка цветом, использование стрелок со своим масштабом и направлением, соответствующим представляемой векторной величине, и построение линий тока представляют собой графические технологии, наиболее широко используемые для изображения результатов расчетов. Программные средства визуализации позволяют создавать цветные картины полей течений с разными палитрами и имитацией прозрачности выделенных объектов. Использование цветных карт с переменными палитрами позволяет ориентироваться в структуре моделируемого течения при обработке результатов [3].

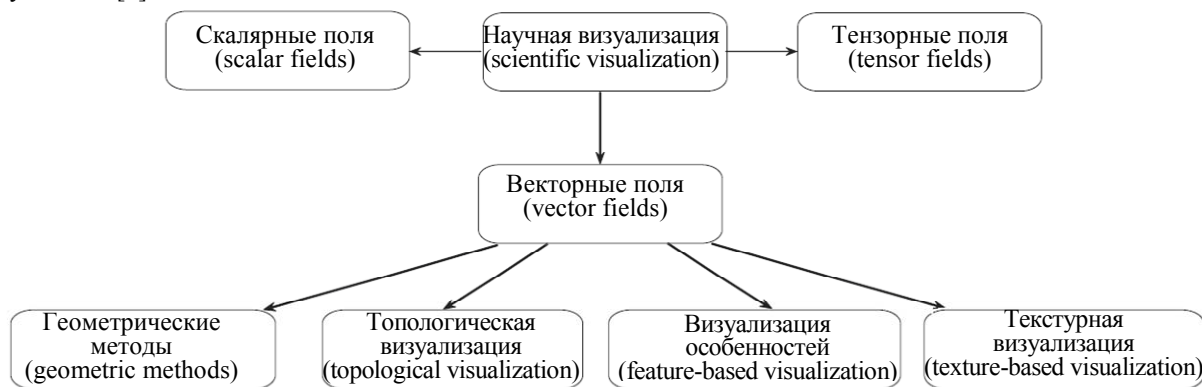


Рис. 2. Визуализация расчетных данных

Геометрические методы основаны на численном интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяя построить линии тока или траектории частиц жидкости (streamlines, pathlines). Основная проблема состоит в выборе достаточного количества точек, необходимых для визуализации картины течения. На практике такой выбор делается как интерактивным способом, так и автоматически при помощи анализа плотности интегральных кривых [4] или триангуляции Делоне [5]. Имеющиеся подходы ограничиваются стационарными двумерными течениями или трехмерными течениями с периодической структурой в одном из пространственных направлений [6, 7]. Для визуализации стационарных трехмерных векторных полей применяются интегральные поверхности [8] с применением адаптивных подходов [9]. Двухшаговые подходы к визуализации нестационарных трехмерных векторных полей на структурированных сетках предлагаются в работе [10], а на неструктурированных сетках – в работе [11]. В стационарном поле течения методы построения интегральных поверхностей оказываются

ся в 10 раз более затратными с вычислительной точки зрения, чем методы генерации интегральных кривых, а в нестационарном случае — в 100–1000 раз.

В топологических подходах векторное поле течения представляется в виде набора линий тока, что позволяет определить локальное направление потока и найти критические точки, а также другие сингулярности. При этом тип критической точки определяет локальную картину течения в ее окрестности. Тип критической точки зависит от собственных чисел якобиана [12] (комплексные собственные числа соответствуют вращению, положительная вещественная часть – источнику, отрицательная вещественная часть – стоку).

Методы визуализации особенностей течения позволяют идентифицировать вихревые структуры и вихревые линии, а также линии отрыва и присоединения потока, основываясь на тех или иных определениях и критериях. Для визуализации вихревых областей потока используются пороговые значения давления и завихренности [3].

В отличие от геометрических и топологических подходов, в которых проводится анализ отдельных точек, линий или поверхностей, в текстурных подходах визуализируется общая картина течения, что делает их близкими к методам экспериментальной визуализации [13]. Визуализация производится при помощи вычисления свертки векторного поля скорости и белого шума (интегрирование выполняется вдоль линий тока). Результаты расчетов интегралов (line integral convolution, LIC) нормализуются, что позволяет определить яркость и контраст каждого пикселя. Для улучшения качества визуализации находят применение специальные фильтры [14, 15], а для визуализации нестационарных течений – подвижные текстуры [16] и методы объемного рендеринга [17].

В настоящей работе обсуждаются подходы к визуализации вихревых течений, основанные на использовании градиентов основных и производных скалярных и векторных полей. Идентификация вихрей проводится по признаку распределения различных величин (нормированная спиральность, критерий  $Q$ , критерий  $\lambda_2$ , критерий  $\Delta$ ) в области формирования вихревой линии или вихревой области течения. На основе вторичных векторных и скалярных полей создаются геометрические объекты (линии уровня, изоповерхности), дающие представление о вихревой структуре потока. Приводятся примеры визуального представления решений ряда задач газовой динамики, связанных с расчетами течений в струях и кавернах.

#### Методы визуализации вихревых течений

Вихрь определяется как область течения, в которой существует значительный уровень завихренности, или как область течения, в которой линии тока являются замкнутыми или спиралевидными [18–20]. В другом подходе для определения центра вихря находится минимум давления [21]. Приведенные определения не являются универсальными, и имеются простые примеры вихревых течений, противоречащие этим определениям [18–21].

Существуют различные подходы к визуализации вихревых течений, использующие то или иное определение вихря и критерии его идентификации, в частности, метод спиральности (helicity method) [22], метод параметра закрутки (swirlparameter method) [23], методы, основанные на использовании критерия  $Q$  [24], критерия  $\Delta$  [25] и их модификаций [26],  $\lambda_2$ -метод ( $\lambda_2$ -method) [20], метод предиктора–корректора (predictor–corrector method) [27], метод собственных векторов (eigen vector method) [28], метод параллельных векторов (parallel vector method) [29], метод максимальной завихренности (maximum vorticity method) [30], метод линий тока (streamline method) [31], комбинаторный метод (combinatorial method) [32]. Классификация методов визуализации вихревых течений, данная в таблице, проводится в зависимости от того, каким способом определяется вихрь (в области или на линии), является ли метод инвариантным по отношению к преобразованию системы координат, носит подход локальный или глобальный характер.

Метод	Область/Линия	Инвариантность	Локальный/Глобальный
Метод спиральности	Линия	Нет	Локальный
Метод параметра закрутки	Область	Нет	Локальный
Метод $\lambda_2$	Область	Да	Локальный
Метод предиктора–корректора	Линия	Да	Глобальный
Метод собственных векторов	Линия	Нет	Локальный
Метод параллельных векторов	Линия	Нет	Локальный
Метод максимальной завихренности	Линия	Да	Локальный
Метод линий тока	Область	Нет	Глобальный
Комбинаторный метод	Область	Нет	Локальный

Таблица. Методы идентификации вихревых течений

Вихрь определяется либо линией (определение вихря дает положение его центра), либо областью течения (определение вихря позволяет определить узлы или ячейки сетки, занятые вихрем). На практике

методы идентификации вихрей в области течения или ее части оказываются легче реализуемыми, не требуя нахождения точек пересечения вихревых линий с ячейками сетками.

В большинстве подходов предполагается, что течение либо является стационарным, либо вихри перемещаются со скоростью, много меньшей средней скорости движения частиц жидкости. Для идентификации вихрей в нестационарном поле течения необходимо, чтобы метод удовлетворял условию инвариантности (Galilean invariance).

Процесс идентификации вихрей носит локальный или глобальный характер. Локальные методы используют информацию из некоторой окрестности ячейки сетки (подходы, основанные на преобразовании тензора градиента скорости). В глобальных подходах для идентификации вихрей требуется перебор большого числа ячеек сетки (подходы, основанные на использовании линий тока или вихревых линий).

### Критерии идентификации вихрей

В трехмерных течениях с гладким полем скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  критерием, инвариантным к преобразованиям, является тензор градиента скорости (velocity gradient tensor) [24]:

$$J = \nabla \mathbf{v} = S + \Omega, \quad S = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*], \quad \Omega = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^*],$$

где  $S$  – тензор скоростей деформаций (strain rate tensor),  $\Omega$  – тензор завихренности (vorticity tensor). Звездочка относится к сопряженному тензору.

Одним из критериев, используемых для идентификации вихревых течений, является  $Q$ -критерий ( $Q$ -criterion), предложенный в работе [24]:

$$Q = \frac{1}{2} (|\Omega|^2 - |S|^2).$$

Вихрь определяется как область течения, в которой выполняется неравенство  $Q > 0$  (область течения, в которой норма тензора завихренности превышает норму тензора скоростей деформаций, а вращение доминирует над вязким сдвигом).

Дельта-критерий ( $\Delta$ -criterion), предложенный в работе [25], дается соотношением

$$\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{\det \nabla \mathbf{v}}{2}\right)^2.$$

Вихрь определяется как область течения, в которой выполняется неравенство  $\Delta > 0$  (тензор градиента скорости имеет комплексные собственные числа). В этой области вращение (антисимметричная часть тензора градиента скорости) доминирует над растяжением или сжатием (симметричная часть тензора градиента скорости).

Для визуализации вихревых линий используется нормализованная спиральность (normalized helicity) [22], представляющая собой косинус угла между векторами скорости и завихренности (в критических точках спиральность не определяется):

$$H_n = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{v}| |\boldsymbol{\omega}|}.$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\boldsymbol{\omega}$  – вихрь скорости. В окрестности центра вихря угол между векторами скорости и завихренности является малым. В предельном случае, когда вектора скорости и завихренности коллинеарны, нормализованная спиральность равняется  $\pm 1$ , а линия тока, проходящая через такую точку, имеет нулевую кривизну (прямая линия). Знак спиральности показывает направление вращения вихря по отношению к направлению потока (по часовой или против часовой стрелки).

Метод параметра закрутки использует связь между вращательным движением и существованием комплексных собственных значений тензора градиента скорости [23]. Параметр закрутки (swirl parameter) вводится как отношение времени движения жидкой частицы через область с комплексными собственными числами тензора градиента скорости (convection time) ко времени, необходимому для вращения частицы в позицию с тем же самым значением угловой координаты (orbit time):

$$\tau = \frac{t_c}{t_0}, \quad t_c = \frac{2\pi}{|\text{Im}(\lambda_c)|}, \quad t_0 = \frac{L}{|\mathbf{v}_c|},$$

где  $\text{Im}(\lambda_c)$  – мнимая часть комплексно-сопряженной пары собственных значений тензора градиента скорости;  $L$  – характерный линейный размер области;  $\mathbf{v}_c$  – скорость пересечения области. При  $\tau \rightarrow 0$  частица жидкости пересекает область течения слишком быстро для того, чтобы быть захваченной вихрем. Нулевые значения параметра закрутки соответствуют вихревым областям потока. Выбор характерного линейного размера в трехмерном случае представляется неоднозначным.

В работе [20] для идентификации вихрей применяется критерий  $\lambda_2$  ( $\lambda_2$ -criterion), основанный на разложении тензора градиента скорости на симметричную и антисимметричную компоненты. Тензор  $S^2 + \Omega^2$  является симметричным и имеет вещественные собственные числа ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ), два из которых отрицательны. Область вихревого течения определяется как область, в которой

$$\lambda_2 (S^2 + \Omega^2) < 0,$$

где  $\lambda_2$  – собственное число тензора. При адиабатических условиях данный критерий гарантирует мгновенный минимум давления в двумерном течении [18]. Применение критерия затрудняется в том случае, когда в области, занятой жидкостью, присутствуют несколько индивидуальных вихрей.

В двухшаговом подходе, предложенном в работе [27], предполагается, что вихревое движение поддерживается градиентом давления, а для идентификации вихрей используется вектор завихренности. На шаге 1 производится предварительный поиск вихревых образований вдоль вихревых линий, а на шаге 2 осуществляется корректировка полученных данных, основанная на поиске локального минимума давления. В качестве исходных точек для поиска вихревых линий выступают узлы сетки, в которых имеет место низкий уровень давления и высокий уровень завихренности (на практике существуют узлы, удовлетворяющие обоим критериям, но не являющиеся вихревыми образованиями).

Метод собственных векторов, предложенный в работе [28], основан на теории критических точек. Собственные числа и собственные вектора тензора градиента скорости, рассчитанные в окрестности критической точки, определяют локальную картину течения около этой точки. Поскольку имеются закрученные течения, не содержащие критических точек, то вектор скорости проектируется на плоскость, нормальную к направлению собственного вектора тензора градиента скорости, соответствующего вещественному собственному значению. Предполагается, что два других собственных значения образуют комплексно-сопряженную пару или принимают нулевые значения. В случае их равенства нулю критическая точка становится центром вихря.

Метод параллельных векторов, являющийся развитием метода собственных векторов и предложенный в работе [29], представляет собой метод высокого порядка для нахождения вихревых линий. Вихревая линия представляет собой множество точек  $\{x: \mathbf{v}(x) \times \mathbf{w}(x) = 0\}$ , в которых вектор скорости параллелен вектору  $\mathbf{w}$ . Вектор  $\mathbf{w}$  определяется второй производной от вектора скорости по времени и находится из соотношения

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = \frac{d[(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}]}{dt} = (\nabla \mathbf{v})(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} + T\mathbf{v}\mathbf{v},$$

где  $T$  – тензор размера  $3 \times 3 \times 3$ . Данный подход позволяет идентифицировать медленно вращающиеся вихревые образования с криволинейными границами, типичные для течений в компонентах газовых турбин. Во избежание колебаний решения, возникающих в результате расчета производных высокого порядка, используется пост-сглаживание поля скорости [29].

В работе [30] для определения центра вихря используется локальный максимум величины завихренности в плоскости, нормальной к вектору завихренности. Такой подход приемлем для визуализации свободных сдвиговых течений, но не свободных сдвиговых слоев, в которых имеет место высокий уровень величины завихренности, но ее локальный максимум отсутствует.

Метод линий тока, реализованный в работе [31], основан на методе угла намотки (winding angle method). Угол намотки линии тока  $\alpha_w$  представляет собой меру общего изменения направления сегментов линии тока

$$\alpha_w = \sum_{i=1}^{N-2} \angle(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}),$$

где  $\mathbf{p}_i$  – координаты точки на линии тока;  $N$  – общее число точек на линии тока. Под  $\angle(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})$  понимается угол между двумя сегментами линии тока, ограниченными точками  $\mathbf{p}_{i-1}$ ,  $\mathbf{p}_i$  и  $\mathbf{p}_{i+1}$ . Угол считается положительным в случае вращения против часовой стрелки и отрицательным – в случае вращения по часовой стрелке. Вихри существуют в области, где  $\alpha_w > 2\pi$ , по крайней мере, для одной линии тока.

В комбинаторном подходе, предложенном в работе [32], используются идеи комбинаторной топологии. Для нахождения центров вихрей к векторному полю скорости применяется лемма Спернера (Sperner's lemma). Подход позволяет найти ячейки сетки, содержащие критические точки [25]. Производится маркировка вектора скорости в каждой ячейке сетки. Для этого оцениваются изменения направления вектора скорости в узлах каждой ячейки (например, для сетки с прямоугольными ячейками используются 4 узла). Ячейка сетки относится к области вихревого движения, если в каждом узле вектор скорости имеет уникальное направление или удовлетворяет некоторому критерию разворота потока. В трехмерном случае в каждой ячейке сетки строится локальная плоскость вихревого движения, и векторы скорости в узлах ячейки проектируются на эту плоскость.

### Примеры визуализации вихревых течений

Приводятся примеры визуального представления ряда численных решений задач газовой динамики, основанные на различных критериях идентификации вихрей. Для визуального представления результатов численного моделирования применяется парадигма графического программирования и виртуальная среда COVISE (Collaborative Visualization and Simulation Environment), развитая в центре высокопроизводительных вычислений университета Штутгарта (High Performance Computing Center, University of Stuttgart). Приложение, реализующее визуализацию той или иной задачи, представляется в виде сети,

звеньями которой являются модули, каждый из которых предназначен для решения специфической задачи (например, модуль перевода данных из одного формата в другой). Взаимодействие между модулями осуществляется при помощи входных и выходных портов (прием и передача данных).

**Течение в каверне с подвижной верхней стенкой.** Рассмотрим нестационарное изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости в кубической полости со стороной  $L = 1$  м, которое индуцируется движением с постоянной скоростью  $U = 1$  м/с ее верхней грани. Число Рейнольдса рассчитывается по длине стороны каверны и скорости верхней стенки  $Re = \rho UL/\mu$ . Расчеты проводятся для жидкости с плотностью  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup> и молекулярной вязкостью  $\mu$ , соответствующей заданному числу Рейнольдса. Считается, что в начальный момент времени жидкость покоится ( $u=v=w=0$ ,  $p = 10^5$  Па). На стенках каверны выставляются граничные условия прилипания и непротекания. Расчеты течения в кубической каверне проводятся на сетке  $81^3$  при  $Re = 0-2000$ .

Задача о течении в кубической каверне с подвижной верхней стенкой служит для тестирования и сравнения различных методов дискретизации уравнений Навье–Стокса [33], а основные структурные особенности течения в каверне присущи и другим отрывным течениям в более сложной геометрии [34]. При этом следует отметить, что выявление типа особых точек вихревого течения обычно производится на основе визуализации картины растекания жидкости по стенкам каверны. В настоящей работе для исследования вихревой структуры потока в кубической каверне и классификации типа особых точек используются методы визуализации и методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Течение в окрестности критической точки характеризуется собственными значениями и собственными векторами тензора градиента скорости. Тип особой точки зависит от характера поведения фазовых траекторий в ее окрестности и определяется корнями характеристического уравнения. Возможны следующие случаи.

1. Если все корни вещественные и отрицательные, то имеется устойчивый узел. При положительных значениях корней получается неустойчивый узел.
2. Если все корни вещественные, но имеют разные знаки, то получается седло. Через седло проходят только две интегральные кривые – сепаратрисы.
3. Если имеется пара мнимых сопряженных корней  $\lambda_{1,2} = \varphi \pm i\nu$ ,  $\lambda_3 \in R$ , то получается либо узло–фокус (если  $\varphi$  и  $\lambda_3$  – одного знака), либо седло–фокус (если  $\varphi$  и  $\lambda_3$  – различного знака).

Визуализация поверхностной картины течения жидкости и анализ топологических характеристик вихревого течения (положение критических точек и вихрей, скорость растяжения/сжатия вихрей, скорость их дрейфа, максимальное значение завихренности) представляют собой мощное и эффективное средство исследования вихревых течений. Границы трехмерных отрывных зон связаны с начальной структурой сингулярных точек. В отличие от трехмерного течения, в двумерном течении в критической точке напряжение трения равняется нулю. В трехмерном случае линии тока могут сходиться или расходиться из точки (точки присоединения или отрыва потока), раскручиваться или закручиваться спиралью около точки (фокусы), сходиться или расходиться из линии (линии присоединения или отрыва потока). Узловые точки представляют собой стоки или источники поверхностного трения.

Картины растекания жидкости по стенкам каверны, полученные для различных чисел Рейнольдса, показывают наличие особых точек типа фокуса, центра и седла, а также линий стекания и растекания жидкости (рис. 3). Обозначения граней каверны поясняет фрагмент (рис. 3, е). В соответствии с теоремой Пуанкаре–Бендиксона имеет место связь между типом и числом особых точек:  $\sum N - \sum S = 2$ , где  $N$  соответствует узлу или центру, а  $S$  – седловой точке. В частности, для каверны  $\sum S = 10$  и  $\sum N = 12$ , следовательно,  $\sum N = \sum S + 2$ .

Данные численного моделирования показывают существенное влияние пространственного характера движения жидкости на вихревую структуру потока. Уменьшение влияния вязкости приводит к заметной интенсификации вихревого течения в каверне, перемещению центра крупномасштабного вихря к ее геометрическому центру, а также к увеличению размеров вторичных угловых вихрей. Максимальные скорости возвратного течения оказываются ниже по сравнению с двумерным вариантом вследствие притормаживающего влияния боковых стенок. Структура первичного и вторичного вихрей в срединном сечении кубической каверны носит пространственный характер, указывая на массоподвод в ее центральной зоне и на массоотвод в угловых областях каверны.

На дне каверны (рис. 3, в) развитие картины растекания с ростом числа Рейнольдса сопровождается ослаблением влияния боковых стенок и превращением источника жидкости при  $Re = 400$  в линию растекания при  $Re = 1000$  (точка 11). Указанный источник образуется в результате присоединения отрывного потока в срединной части каверны к ее донной грани. При увеличении числа Рейнольдса точка 11 смещается в направлении геометрического центра данной грани. Отрыв придонного потока у передней стенки каверны генерирует дополнительный источник (точка 6). По мере возрастания числа Рейнольдса (при  $Re > 1000$ ) источник превращается в линию растекания. Вблизи ребра выше по потоку имеются седловая точка (точка 18) и источник жидкости (точка 21).

Взаимодействие потоков, истекающих от указанных источников вдоль дна каверны, происходит по линии растекания жидкости. Следствием этого взаимодействия является образование двух симметричных периферийных стоков (точки 16 и 17) и седловых точек (точки 12 и 13) на дне каверны. По мере роста числа Рейнольдса эти точки перемещаются в окрестность ребер боковых граней и смещаются вверх по потоку.

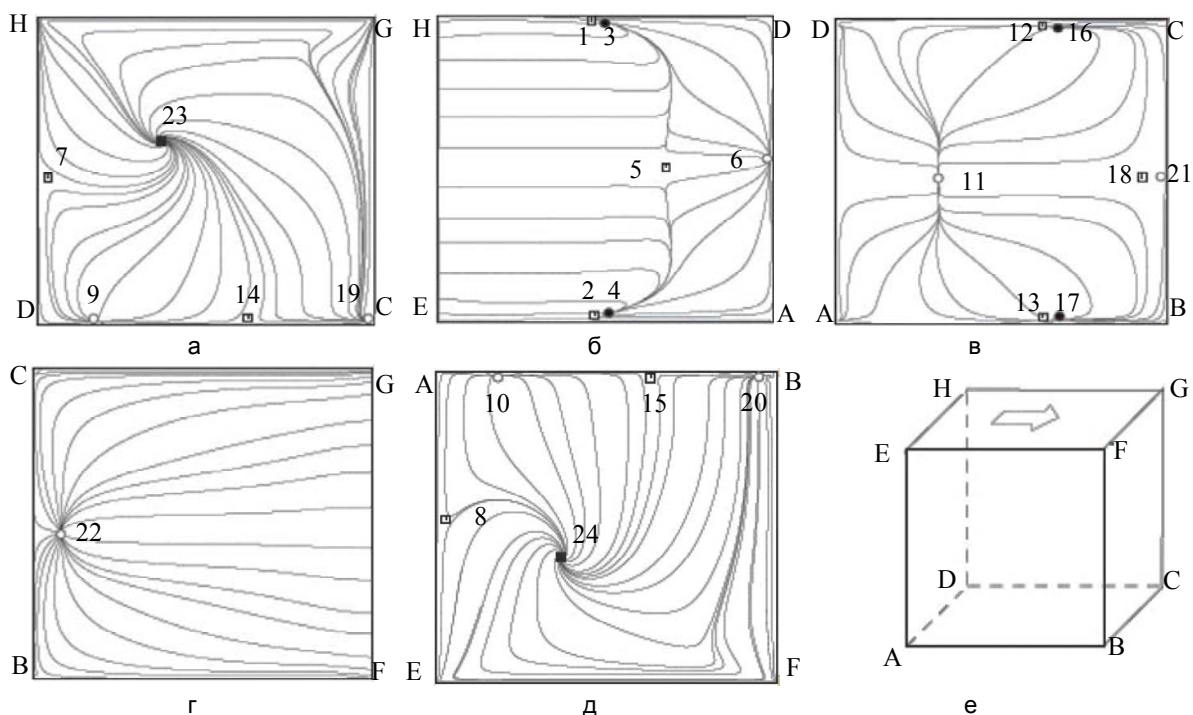


Рис. 3. Картина растекания жидкости по стенкам каверны при  $Re = 1000$ : а, д – боковые стенки; б, г, – грани, расположенные выше и ниже по потоку соответственно; е – обозначение граней ( $\square$  – седловая точка,  $\bullet$  – устойчивый узел,  $\circ$  – неустойчивый узел,  $\blacksquare$  – устойчивый фокус)

При  $Re = 400$  на дне каверны формируется срединная зона квазидвумерного отрывного течения. При  $Re = 1000$  в этой области линии тока параллельны почти на половине дна. Дальнейшее возрастание числа Рейнольдса  $Re = 2000$  приводит к искривлению линий тока в центральной части рассматриваемой грани.

Течение жидкости по грани, расположенной выше по потоку (рис. 3, б) в целом определяется увлекающим воздействием подвижной стенки. С ростом числа Рейнольдса происходит перестройка течения – источник (точка 6) преобразуется в линию растекания. Седловая точка (точка 5) с ростом числа Рейнольдса смещается в направлении геометрического центра грани. При этом точки 1–4 отодвигаются от дна каверны.

Движение жидкости по грани, расположенной ниже по потоку (рис. 3, г), обусловлено взаимодействием с этой стенкой сдвигового потока, сформировавшегося под влиянием движущейся с постоянной скоростью верхней крышки. В связи с этим линии тока практически параллельны боковым стенкам на большей части рассматриваемой грани в направлении дна каверны. Однако вблизи дна возникает источник (точка 22), индуцированный перетеканием жидкости со дна каверны на заднюю стенку. Взаимодействие этого источника с набегающим сверху потоком происходит по линии растекания, которая с ростом числа Рейнольдса становится параллельной дну.

На боковых стенках каверны (рис. 3, а, д) реализуется закрученное течение жидкости со стоком (точки 23 и 24) из центральной части структуры. С увеличением числа Рейнольдса эта структура перемещается к геометрическому центру боковой грани. Также на каждой боковой грани каверны вблизи ее дна можно заметить наличие других особых точек – двух узлов (точки 9, 19 и точки 10, 20) и одной седловой точки (точки 14 и 15). Расположение указанных точек претерпевает относительно слабое изменение при увеличении числа Рейнольдса (они сдвигаются выше по потоку и приближаются к дну каверны). Вблизи ребра каждой боковой грани, расположенного выше по потоку, имеется еще по одной седловой точке (точки 7 и 8).

**Течение в свободной струе.** Проводится моделирование крупных вихрей течения в свободной неизотермической струе, истекающей из круглого сопла в затопленное пространство или спутный поток [35] (используется подсеточная модель Смагоринского). Начало системы координат располагается на срезе сопла. Положительный отсчет координаты  $x$  ведется в сторону распространения струи. В качестве

характерных масштабов для переменных с размерностью длины принимается радиус выходного сечения сопла  $r_a$ , а для переменных с размерностью скорости и температуры – скорость  $u_a$  и температура  $T_a$  газа на срезе сопла. Окружающая среда имеет температуру  $T_\infty$ . Течение в струе характеризуется параметром подогрева  $\Theta_a = T_a/T_\infty$  и степенью турбулентности  $\theta_a$  на срезе сопла.

Параметрам задачи присваивались следующие значения:  $r_a = 5$  мм,  $u_a = 80$  м/с,  $\rho_a = 0,58$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_a = 600$  К,  $\rho_\infty = 1,26$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_\infty = 300$  К. Параметры на срезе сопла соответствуют числу Рейнольдса  $Re = 1,2 \times 10^5$ . Сетка содержит  $350 \times 150 \times 150$  ячеек. Расчеты проводятся в области, длина которой составляет  $L_x = 100r_a$ , а ширина и высота во входном и выходном сечении –  $L_y = L_z = 10r_a$  и  $L_y = L_z = 40r_a$ . На начальном участке струи шаг по переменной  $x$  полагается постоянным до  $x = 10r_a$ , а затем постепенно увеличивается по закону геометрической прогрессии. В поперечном сечении сетка сгущается к кромкам сопла.

Вихревую структуру струи показывает рис. 4. В сдвиговом слое струи присутствуют крупномасштабные вихревые структуры в форме тороидальных осесимметричных вихрей, зарождающихся на некотором расстоянии от среза сопла (порядка одного–двух его диаметров). В области начального участка характерный размер вихревых структур является достаточно малым. Вниз по потоку от начального участка характерный размер вихревых структур увеличивается, а обмен количеством движения между струей и окружающей жидкостью интенсифицируется. Контуры когерентной структуры представляют собой эллипсы, что означает анизотропию турбулентных пульсаций. Генерация вихрей связана с неустойчивостью типа Кельвина–Гельмгольца сдвигового слоя. Максимумы и минимумы завихренности приблизительно соответствуют центрам вихрей.

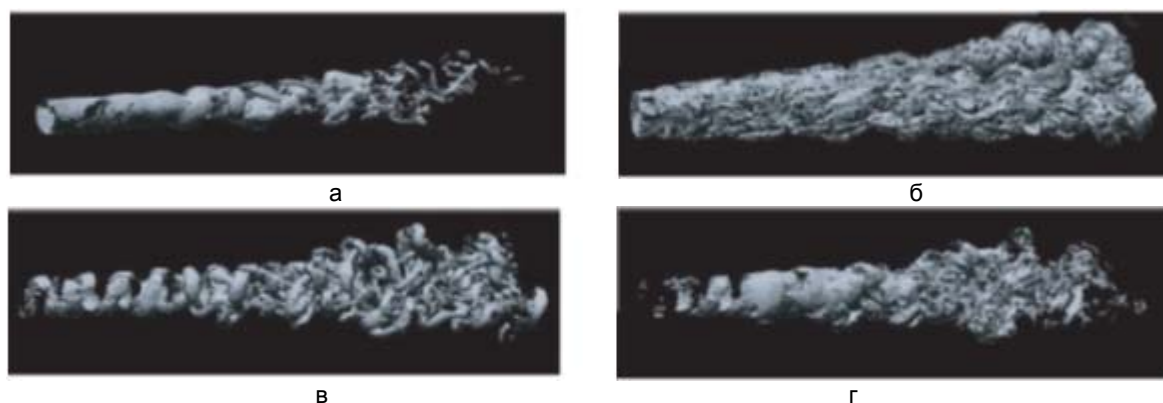


Рис. 4. Визуализация вихревого течения в струе на основе изоповерхностей максимальной завихренности (а), спиральности (б), критерия Q (в) и критерия  $\lambda_2$  (г). Длина области составляет  $40r_a$ , а ширина –  $8r_a$

#### Заключение

Трехмерность моделируемого нестационарного процесса создает существенные трудности для визуального представления результатов, особенно при использовании неструктурированных сеток. Комбинированный подход к созданию иллюстраций в вычислительной газовой динамике, основанный на различных критериях идентификации вихревых структур, с привлечением методов, разработанных в традиционной иллюстративной графике, обладает большим потенциалом для придания графической выразительности сценам визуализации.

Для выявления вихревых структур производится поиск областей течения, удовлетворяющих тому или иному критерию, и применяются различные подходы к идентификации вихревых зон потока. На основе вторичных полей создаются геометрические объекты (изоповерхности, связанные с векторными и скалярными величинами), дающие представление о вихревой структуре потока.

На основе численных расчетов и качественной теории дифференциальных уравнений найдены особые точки вихревого течения жидкости в кубической каверне, определен их тип и местоположение в зависимости от числа Рейнольдса. Проведен анализ вихревой структуры течения в свободной неизотермической струе, истекающей в затопленное пространство.

#### Литература

1. Nakahashi K. Aeronautical CFD in the age of petaflops-scale computing: from unstructured to Cartesian meshes // *European Journal of Mechanics. B/Fluids*. 2013. V. 40. P. 75–86.
2. Бондарев А.Е., Галактионов В.А., Четкин В.М. Анализ развития концепций и методов визуального представления данных в задачах вычислительной физики // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2011. Т. 51. № 4. С. 669–683.
3. Jiang M., Machiraju R., Thompson D. Detection and visualization of vortices // *Visualization Handbook*. Burlington: Elsevier, 2005. P. 295–309.



4. Turk G., Banks D. Image-guided streamline placement // Proceedings of the ACM SIGGRAPH Conference on Computer Graphics. New Orleans, USA, 1996. P. 453–460.
5. Mebarki A., Alliez P., Devillers O. Farthest point seeding for efficient placement of streamlines // Proceedings of IEEE Visualization Conference. 2005. Art. N 1566043. P. 61.
6. Liu Z., Moorhead R.J., Groner J. An advanced evenly-spaced streamline placement algorithm // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2006. V. 12. N 5. P. 965–972.
7. Spencer B., Laramée R.S., Chen G., Zhang E. Evenly spaced streamlines for surfaces: an image-based approach // Computer Graphics Forum. 2009. V. 28. N 6. P. 1618–1631.
8. Hultquist J.P.M. Constructing stream surfaces in steady 3D vector fields // Proceedings of IEEE Visualization Conference. Boston, USA, 1992. P. 171–178.
9. Garth C., Tricoche X., Salzbrunn T., Bobach T., Scheuermann G. Surface techniques for vortex visualization // Proceedings of the 6th Joint IEEE TCVG-EUROGRAPHICS Symposium on Visualization. 2004. P. 155–164.
10. Garth C., Krishnan H., Tricoche X., Bobach T., Joy K.I. Generation of accurate integral surfaces in time-dependent vector fields // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2008. V. 14. N 6. P. 1404–1411.
11. Krishnan H., Garth C., Joy K.I. Time and streak surfaces for flow visualization in large time-varying data sets // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2009. V. 15. N 6. Art. N5290738. P. 1267–1274.
12. Theisel H., Weinkauff T., Hege H.-C., Seidel H.-P. Topological methods for 2D time-dependent vector fields based on stream lines and path lines // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2005. V. 11. N 4. P. 383–394.
13. van Wijk J.J. Spot noise texture synthesis for data visualization // ACM Siggraph Computer Graphics. 1991. V. 25. N 4. P. 309–318.
14. Cabral B., Leedom L. Imaging vector fields using line integral convolution // Proceedings of the ACM SIGGRAPH Conference on Computer Graphics. Anaheim, USA. New York: ACM, 1993. P. 263–270.
15. Shen H.-W., Kao D.L. A new line integral convolution algorithm for visualizing time-varying flow fields // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 1998. V. 4. N 2. P. 98–108.
16. Max N., Becker B. Flow visualization using moving textures / In: Data Visualization Techniques. John Wiley & Sons, 1999. P. 99–105.
17. Helgeland A., Andreassen O. Visualization of vector fields using seed LIC and volume rendering // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2004. V. 10. N 6. P. 673–682.
18. Haller G. An objective definition of a vortex // Journal of Fluid Mechanics. 2005. V. 525. P. 1–26.
19. Lugt H.J. The dilemma of defining a vortex // In: Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics. Berlin: Springer, 1979. P. 309–321.
20. Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 285. P. 69–94.
21. Cucitore R., Quadrio M., Baron A. On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 1999. V. 18. N 2. P. 261–282.
22. Levy Y., Degani D., Seginer A. Graphical visualization of vortical flows by means of helicity // AIAA Journal. 1990. V. 28. N 8. P. 1347–1352.
23. Berdahl C.H., Thompson D.S. Eduction of swirling structure using the velocity gradient tensor // AIAA Journal. 1993. V. 31. N 1. P. 97–103.
24. Hunt J.C.R., Wray A., Moin P. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows // Report CTR-S88. Center for Turbulence Research, Stanford, USA, 1988. P. 193–208.
25. Chong M.S., Perry A.E., Cantwell B.J. A general classification of three-dimensional flow field // Physics of Fluids A. 1990. V. 2. N 5. P. 765–777.
26. Tabor M., Klapper I. Stretching and alignment in chaotic and turbulent flows // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. V. 4. N 6. P. 1031–1055.
27. Banks D.C., Singer B.A. Predictor–corrector technique for visualizing unsteady flow // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 1995. V. 1. N 2. P. 151–163.
28. Sujudi D., Haimes R. Identification of swirling flow in 3D vector fields // Proc. of 12th Computational Fluid Dynamics Conference. 1995. P. 792.
29. Roth M., Peikert R. Higher-order method for finding vortex core lines // Proceedings of IEEE Visualization Conference. Research Triangle Park, NC, USA, 1998. P. 143–150.
30. Strawn R.C., Kenwright D.N., Ahmad J. Computer visualization of vortex wake systems // AIAA Journal. 1999. V. 37. N 4. P. 511–512.
31. Sadarjoen I.A., Post F.H., Ma B., Banks D.C., Pagendarm H.-G. Selective visualization of vortices in hydrodynamic flows // Proceedings of IEEE Visualization Conference. Research Triangle Park, NC, USA, 1998. P. 419–422.

32. Jiang M., Machiraju R., Thompson D.S. A novel approach to vortex core region detection // Proc. of Joint Eurographics-IEEE TCVG Symposium on Visualization. Vienna, 2002. P. 217–225.
33. Волков К.Н. Топология течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической камере с подвижной крышкой // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. № 2. С. 86–91.
34. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) / Под ред. А.В. Ермишина и С.А. Исаева. М.: Изд-во МГУ, 2001. 360 с.
35. Xu B.P., Wen J.X., Volkov K.N. Large-eddy simulation of vortical structures in a forced plane impinging jet // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 2013. V. 42. P. 104–120.



**Волков Константин Николаевич** – доктор физико-математических наук, старший лектор, Университет Кингстона, Лондон, Великобритания. Области научных интересов – вычислительная газовая динамика, теплообмен, многофазные течения, горение, детонация, численные методы, двигатели. С отличием закончил Балтийский государственный технический университет в 1996 г. (специальность – «Авиационная и ракетно-космическая теплотехника») и Санкт-Петербургский государственный университет в 1997 г. (специальность – «Математика и информатика»). В 1998 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 2006 г. – докторскую диссертацию (специальность – «Механика жидкости, газа и плазмы»). С 1996 по 2002 гг. работал и преподавал в Балтийском государственном техническом университете, а затем в Великобритании – в Университете Центрального Ланкашира (University of Central Lancashire) и Университете Суррея (University of Surrey). В настоящее время работает и преподает в Университете Кингстона (Kingston University) в Лондоне. Принимал участие в разработке и оптимизации различных образцов современной техники (численное моделирование газодинамических процессов). Руководитель и исполнитель ряда фундаментальных и прикладных проектов, поддержанных грантами Российского фонда фундаментальных исследований, Королевской академии техники (Royal Academy of Engineering), Королевского общества (Royal Society), министерства торговли и промышленности Великобритании (Department of Trade and Industry), Европейской комиссии. Член института физики (Institute of Physics), института инженеров-механиков (Institution of Mechanical Engineers), института горения (Combustion Institute), Европейского общества механики (European Mechanics Society). Дипломированный инженер (Chartered Engineer). Эксперт Европейской комиссии по научным исследованиям и технологическому развитию. Автор 7 научных монографий, а также ряда учебных пособий и более 120 других научных публикаций. Включен в издание «Кто есть кто в науке и технике» (Who is Who in Science and Engineering) и «Кто есть кто в мире» (Who is Who in the World).

академией техники (Royal Academy of Engineering), Королевского общества (Royal Society), министерства торговли и промышленности Великобритании (Department of Trade and Industry), Европейской комиссии. Член института физики (Institute of Physics), института инженеров-механиков (Institution of Mechanical Engineers), института горения (Combustion Institute), Европейского общества механики (European Mechanics Society). Дипломированный инженер (Chartered Engineer). Эксперт Европейской комиссии по научным исследованиям и технологическому развитию. Автор 7 научных монографий, а также ряда учебных пособий и более 120 других научных публикаций. Включен в издание «Кто есть кто в науке и технике» (Who is Who in Science and Engineering) и «Кто есть кто в мире» (Who is Who in the World).

**Konstantin N. Volkov** is a Doctor of Sciences in the field of Physics and Mathematics, senior lecturer at the Kingston University (London, United Kingdom). Areas of scientific interests: computational fluid dynamics, heat transfer, multiphase flows, combustion, detonation, numerical methods, engines. In 1996 he graduated with honours from Baltic State Technical University (specialty – “Aviation and space-rocket heat engineering”) and in 1997 – from Saint Petersburg State University (specialty – “Mathematics and Informatics”). In 1998 he defended his PhD thesis, and in 2006 – his doctoral thesis (specialty – “Mechanics of fluid, gas and plasma”). From 1996 to 2002 he was working and delivering lectures at Baltic State Technical University and then in the UK – at University of Central Lancashire and University of Surrey. Nowadays, he is working and teaching at University of Kingston in London. He took part in the development and optimization of various examples of modern engineering (numerical simulation of gas-dynamic processes). He is a principal investigator and co-investigator of a number of fundamental and applied projects supported by grants from the Russian Foundation for Basic Research, Royal Academy of Engineering, Royal Society, the UK Department of Trade and Industry and the European Commission. He is a Member of Institute of Physics, Institution of Mechanical Engineers, Combustion Institute and the European Mechanics Society. He is a Chartered Engineer and an Expert of the European Commission for Research and Technological Development. He is the author of 7 monographs, as well as a number of textbooks and more than 120 other scientific publications. He is included in the publication “Who is Who in Science and Engineering” and “Who is Who in the World”.

**Волков Константин Николаевич** – доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия; старший лектор, Университет Кингстона, Лондон, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

**Konstantin N. Volkov** – D.Sc., Scientific Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, Russia; Senior Lecturer, Kingston University, London, United Kingdom, k.volkov@kingston.ac.uk

Принято к печати 01.04.14  
Accepted 01.04.14