УДК 681.51

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОГО РЕАКТОРА[1]

Т.А. Харьковская[a], А.С. Кремлев[a], Д.М. Сабирова[a], Д.В. Ефимов[b], Т. Раисси[c]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, easymedia@mail.ru

[b] Национальный институт исследований по информатике и автоматике, Лилль, Франция, efde@mail.ru

[c] Центр исследований в области компьютерных наук и телекоммуникаций, Париж, Франция, tarek.raissi@cnam.fr

Рассматривается метод построения интервального наблюдателя для нелинейных систем с параметрической неопределенностью. Задача синтеза интервального наблюдателя для систем с переменными параметрами сводится к следующему: если задан интервал неопределенности для значений состояния системы, ограничивающий начальные условия системы и множество допустимых значений для вектора неизвестных параметров и входов, то условие существования интервала оценок переменных состояния системы, в котором содержится фактическое значение состояния в данный момент времени, также должно выполняться на всем рассматриваемом временном интервале. Показаны условия построения интервальных наблюдателей для рассматриваемого класса систем: ограниченность состояния и входа, существование мажорирующей функции, задающей вектор неопределенностей системы, Липшицева непрерывность или ограниченность этой функции, существование коэффициента усиления наблюдателя с соответствующей матрицей Ляпунова. Основное условие построения подобного устройства оценки связано с кооперативностью динамики ошибки интервальной оценки. Рассматривается вопрос выбора индивидуальной матрицы усиления наблюдателя. Для обеспечения свойства кооперативности динамики ошибки интервальной оценки предлагается статическое преобразование координат. Результат работы метода продемонстрирован с помощью компьютерного моделирования системы биологического реактора. Возможными областями применения подобных систем интервального наблюдения являются области робастного управления, где предполагается наличие различного рода неопределенностей в динамике системы, биотехнологические и экологические системы и процессы, мехатроника, робототехника и др.

Ключевые слова: интервальная оценка, наблюдатель, нелинейные системы, системы с переменными параметрами, параметрическая неопределенность, биореактор.

INTERVAL OBSERVER FOR A BIOLOGICAL REACTOR MODEL[1]

T.A. Kharkovskaya[a], A.S. Kremlev[a], D.M. Sabirova[a], D.V. Efimov[b], T. Raissi[c]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, Russia, easymedia@mail.ru

[b] INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique), Lille, France, efde@mail.ru

[c] Centre for Research in Computer Science and Telecommunications (Cédric), Cnam, Paris, France, tarek.raissi@cnam.fr

The method of an interval observer design for nonlinear systems with parametric uncertainties is considered. The interval observer synthesis problem for systems with varying parameters consists in the following: if there is the uncertainty restraint for the state values of the system, limiting the initial conditions of the system and the set of admissible values for the vector of unknown parameters and inputs, the existence condition of the interval estimates for the system state variables, which contains the actual state at a given time, must also be performed on all considered time segment. Conditions of the interval observers design for the considered class of systems are shown. They are: limitedness of the input and state, the existence of a majorizing function defining the uncertainties vector for the system, Lipschitz continuity or finiteness of this function, the existence of an observer gain with the suitable Lyapunov matrix. The main condition for design of such a device is cooperativity of the interval estimation error dynamics. An individual observer gain matrix selection problem is considered. In order to ensure the cooperativity of interval estimation error dynamics property a static transformation of coordinates is proposed. The proposed algorithm is demonstrated by computer modeling of the biological reactor. Possible applications of these interval estimation systems are the spheres of robust control, where the presence of various types of uncertainties in the system dynamics is assumed, biotechnology and environmental systems and processes, mechatronics and robotics, etc.

Keywords: interval estimation, observer, nonlinear systems, parametric-varying systems, parametric uncertainty, bioreactor.

Введение

Биологический реактор (ферментер) представляет собой резервуар с мешалкой, сконструированный для культивирования клеток животных [1, 2]. Принцип работы биореактора достаточно прост, а его устройство и методики сочетания необходимых условий, наоборот, сложны. Существует несколько различных моделей биологических реакторов [1–4] в зависимости от действия, факторов среды, методов культивирования и др., многие из которых имеют в своей структуре параметрическую неопределенность и нелинейные зависимости, что усложняет процесс синтеза управления данными объектами. Улучшение в методах управления биореактором может привести к значительной экономии в биохимической промышленности и к повышению производительности. В настоящей работе рассматривается метод построения наблюдателя, оценивающего интервал, в котором находится фактическое значение неизмеряемого состояния системы, что может быть полезно для развития алгоритмов управления в биологических системах.

[1] Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01) и гранта Президента Российской Федерации МК-464.2013.8.

[1] This work was financially supported by the Government of the Russian Federation, Grant 074-U01, and by grant of the President of the Russian Federation МК-464.2013.8.

Постановка задачи

Интервальные наблюдатели были введены, чтобы справиться с неопределенностями, которые, как известно, характерны для некоторых классов систем. Это одна из причин, почему данная техника становится все более актуальной [5, 6] и особенно успешной в области биотехнологических процессов, где можно говорить о достаточно больших неопределенностях [7, 8]. В таких случаях использование классических методов построения наблюдателей, оценки которых сходятся к точному значению состояния при отсутствии шума, невозможно. Однако возможно использование методов интервальной оценки, т.е. методов построения интервального наблюдателя, который вычисляет множества допустимых значений (интервал) для вектора состояний системы.

На данный момент существует несколько подходов к построению интервальных наблюдателей [6, 7, 9, 10]. Эта работа рассматривает и продолжает подход к построению интервальных наблюдателей, основанный на теории монотонных систем [6, 7, 11–13]. Одним из самых сложных допущений для построения интервального наблюдателя является требование кооперативности динамики ошибки интервальной оценки, которое было рассмотрено в работах [12, 14–17]. Тем не менее, кооперативность – достаточно специфическое свойство, и большинство систем не кооперативны. Показано, что при некоторых нестрогих условиях, применяя статическое преобразование координат, гурвицева матрица может быть преобразована в гурвицеву и мецлерову матрицу (матрица называется мецлеровой, если она имеет неотрицательные элементы вне главной диагонали). Матрица преобразования – это решение уравнения Сильвестра, и конструктивный порядок решения этого уравнения был приведен в [12].

Целью настоящей работы является продолжение развития данного подхода к построению интервальных наблюдателей для нелинейных систем с переменными параметрами. Результат продемонстрирован на примере компьютерного моделирования системы биореактора.

Общие сведения

Евклидова норма для вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ будет обозначаться как $|\mathbf{x}|$, и для измеримого и локального существенно ограниченного входа $\mathbf{u}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}\colon \tau \geq 0\}$) символ $\|\mathbf{u}\|_{[t_0,t_1]}$ обозначает его $\mathcal{L}_\infty$ норму:

$$\|\mathbf{u}\|_{[t_0,t_1]} = ess\sup\{|\mathbf{u}(t)|, t \in [t_0,t_1]\},$$

если $t_1 = +\infty$, тогда мы можем просто написать $\|\mathbf{u}\|$. Будем обозначать $\mathcal{L}_\infty$ – множество всех входов $\mathbf{u}$ со свойством $\|\mathbf{u}\| < \infty$. Обозначим последовательность целых чисел 1,…, k как $\overline{1,k}$. Символы $\mathbf{I}_n$, $\mathbf{E}_{n\times m}$ и $\mathbf{E}_p$ обозначают единичную матрицу с размерностью $n \times n$, матрицы, у которых все элементы равны 1, с размерностями $n \times m$ и $p \times 1$ соответственно. Для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ вектор его собственных значений обозначается как $\lambda(\mathbf{A})$, $\|\mathbf{A}\|_{\max} = \max_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,n}}|\mathbf{A}_{i,j}|$ (поэлементно максимальная норма, не полумультипликативная) и $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}}\lambda_i(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ (индуцированная L_2 норма матрицы), соотношение

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq n\|\mathbf{A}\|_{\max}$$

выполняется между этими нормами.

Для двух векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ или матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ отношения $\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{A}_1 \leq \mathbf{A}_2$ понимаются поэлементно. Соотношение $\mathbf{P} \prec 0$ ($\mathbf{P} \succ 0$) означает, что матрица $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является отрицательно (положительно) определенной. Для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ определено $\overline{\mathbf{A}} = \max\{0, \mathbf{A}\}$, $\underline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$ (аналогично для векторов) и обозначена матрица абсолютных значений всех элементов как $|\mathbf{A}| = \underline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}}$. Запись $\mathbf{A} \in M$ означает, что матрица $\mathbf{A}$ – мецлерова, т.е. имеет неотрицательные элементы вне главной диагонали.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ будет вектором переменных, $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}$, для некоторых $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, и $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ будет постоянной матрицей, тогда

$$\overline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{x}}.$$

Доказательство. Отметим, что $\mathbf{A}\mathbf{x} = (\overline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{x}$, что для $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}$ дает необходимые оценки.

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется гурвицевой, если все ее собственные значения имеют отрицательную вещественную часть. Любое решение линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \omega(t), \omega\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^n,$$

с $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и мецлеровой матрицей $\mathbf{A}$ поэлементно неотрицательно для всех $t \geq 0$, при условии, что $\mathbf{x}(0) \geq 0$. Такие динамические системы называются кооперативными [18, 19].

Лемма 2. Даны матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Если существует матрица $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ такая, что матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ и $\mathbf{R}$ имеют одинаковые собственные значения, тогда $\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{S}$, где матрица $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ при условии, что пары $(\mathbf{A} - \mathbf{LC}, \mathbf{e}_1)$ и $(\mathbf{R}, \mathbf{e}_2)$ наблюдаемы для некоторых $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

Этот результат был использован в [12] для построения интервальных наблюдателей для линейных стационарных систем с мецлеровой матрицей $\mathbf{R}$.

Построение интервального наблюдателя

Будем рассматривать следующий вид системы, имеющей зависимость от неизвестных нестационарных параметров $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \Theta$:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{x}(t) + f(t,\mathbf{y},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t,\mathbf{u})\mathbf{x}(t)\end{cases}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние; $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ – выходная переменная; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ – известное входное воздействие; $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^q$ – неизвестное входное воздействие или неизвестные изменяющиеся параметры $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \Theta\ \forall t \geq 0$, множество Θ известно. Отметим, что

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\zeta})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\zeta})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + f(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}),\ f(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) = [\mathbf{A}(\boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{A}]\mathbf{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\zeta})\mathbf{u}.$$

Допущение 1. $\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{X}$, $\|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}$ и $\|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{Y}$, границы $\mathbf{X} > 0, \mathbf{U} > 0, \mathbf{Y} > 0$ заданы.

Допущение 2. Пусть $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}$ для некоторых $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, тогда $\underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) \leq f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) \leq$ $\leq \overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})$ для некоторых заданных $\underline{f}\colon \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathrm{R}^n$, $\overline{f}\colon \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathrm{R}^n$ и всех $t \geq 0, \|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}, \boldsymbol{\zeta} \in \Theta$.

Допущение 3. Существует матричная функция $\mathbf{L}\colon \mathbb{R}^{p+m+1} \to \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{P} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{P}(\cdot) = \mathbf{P}(\cdot)^T > 0$ такая, что для всех $t \geq 0$ и $\|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}, \|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{Y}$:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) + \mathbf{P}(t)^2 + \mathbf{Q} = 0,$$
$$\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) = \mathbf{A}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) - \mathbf{L}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{C}(t,\mathbf{u}),$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0.$$

Допущение 2 означает, что если даны границы $\underline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{x}}$ состояния $\mathbf{x}$, то значения нелинейной функции f заключены в интервале $[\underline{f}, \overline{f}]$ для всех $\boldsymbol{\zeta} \in \Theta$. В допущении 3 представлен коэффициент усиления наблюдателя $\mathbf{L}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})$, который обеспечивает устойчивость нестационарной матрицы $\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})$ с матрицей функции Ляпунова $\mathbf{P}(t)$, это допущение определяет условия устойчивости динамики оценки.

При этих допущениях, если существует матрица-усилитель $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ из допущения 3 такая, что матрица $\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$ является гурвицевой и мецлеровой, можно построить интервальный наблюдатель [6, 11] следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\underline{\mathbf{x}} + \underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) + \mathbf{L}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})[\mathbf{y} - \mathbf{C}(t,\mathbf{u})\underline{\mathbf{x}}], \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\overline{\mathbf{x}} + \overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) + \mathbf{L}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})[\mathbf{y} - \mathbf{C}(t,\mathbf{u})\overline{\mathbf{x}}].\end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. [20, 21] Пусть выполнены допущения 1, 2 и 3 и матрица $\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})$ – мецлерова для всех $t \geq 0$ и $\|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}, \|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{Y}$. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1. $\left|\underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right| < +\infty$, $\left|\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right| < +\infty$ для любых $t \geq 0, \|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}$ и всех $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$;
2. для любых $t \geq 0, \|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{X}, \|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \Theta$ и всех $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$

$$\left|f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) - \underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right|^2 + \left|\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) - f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})\right|^2 \leq \beta|\underline{\mathbf{e}}|^2 + \beta|\overline{\mathbf{e}}|^2 + \alpha$$

для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}_+$ и

$$\beta\mathbf{I}_n - \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succ 0.$$

Тогда в (1) и (2) переменные $\underline{\mathbf{x}}(t)$, $\overline{\mathbf{x}}(t)$ остаются ограниченными для всех $t > 0$ и

$$\underline{\mathbf{x}}(0) \leq \mathbf{x}(0) \leq \overline{\mathbf{x}}(0)$$

обеспечивает соотношение

$$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}.$$

Доказательство. Рассмотрим ошибки интервального оценивания $\overline{\mathbf{e}} = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, $\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}} = \mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\underline{\mathbf{e}} + f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) - \underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})$$
$$\dot{\overline{\mathbf{e}}} = \mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\overline{\mathbf{e}} + \overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) - f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}).$$

Согласно допущению 2, для мецлеровой матрицы $\mathbf{D}$ для всех $t \geq 0$ свойства $f(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\zeta}) \geq$ $\geq \underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}}(t),\overline{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t))$, $f(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\zeta}) \leq \overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}}(t),\overline{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t))$ и $\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \overline{\mathbf{x}}(t)$ выполняются при условии, что $\underline{\mathbf{x}}(0) \leq \mathbf{x}(0) \leq \overline{\mathbf{x}}(0)$. Чтобы доказать, что переменные $\underline{\mathbf{x}}(t)$, $\overline{\mathbf{x}}(t)$ ограничены, рассмотрим производную функции Ляпунова $\mathrm{V} = \underline{\mathbf{e}}^T\mathbf{P}(t)\underline{\mathbf{e}} + \overline{\mathbf{e}}^T\mathbf{P}(t)\overline{\mathbf{e}}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{V}} &= \underline{\mathbf{e}}^T\left[\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\right]\underline{\mathbf{e}} + \\ &+ \overline{\mathbf{e}}^T\left[\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\right]\overline{\mathbf{e}} + 2\underline{\mathbf{e}}^T\mathbf{P}(t)\left[f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) - \underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right] + \\ &+ 2\overline{\mathbf{e}}^T\mathbf{P}(t)[\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) - f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})].\end{aligned}$$

Согласно допущению 3, это уравнение может быть переписано следующим образом:

$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\overline{\mathbf{e}}^T\mathbf{Q}\overline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{e}}^T\mathbf{Q}\underline{\mathbf{e}} + \left|f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) - \underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right|^2 + \left|\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) - f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})\right|^2.$$

Если первое условие теоремы верно, тогда элементы $\left|f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) - \underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right|$ и $\left|\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) - f(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})\right|$ ограничены для любых $t \geq 0, \|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{X}, \|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}, \boldsymbol{\zeta} \in \Theta$ и всех $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, ошибки $\overline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{e}}$ ограничены стандартными аргументами Ляпунова, и поэтому переменные $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}$ также ограничены (из допущения 1 состояние $\mathbf{x}$ ограничено). Если второе условие теоремы выполняется, то это неравенство принимает вид

$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\overline{\mathbf{e}}^T\mathbf{Q}\overline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{e}}^T\mathbf{Q}\underline{\mathbf{e}} + \alpha,$$

что подразумевает ограниченность $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}$ теми же аргументами.

Результат теоремы 1 основан на довольно строгом допущении, что матрица $\mathbf{D}$ – мецлерова. Все остальные предположения довольно часто встречаются в теории оценивания. Для постоянной матрицы $\mathbf{D}$ это допущение снимается в лемме 2, где показано, что в условиях допущения 3 существует вещественная статическая матрица преобразования подобия $\mathbf{S}$ с $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{DS}$, являющаяся гурвицевой и мецлеровой. В нашем случае $\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})$ является нестационарной матрицей, расширение леммы 2 для этого случая показано ниже.

Лемма 3 [12, 21]. Пусть $\mathbf{Z} \in \Xi \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ – нестационарная матрица, удовлетворяющая интервальным ограничениям $\Xi = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times n}: \mathbf{Z}_a - \Delta \leq \mathbf{Z} \leq \mathbf{Z}_a + \Delta\}$ для некоторых ${\mathbf{Z}_a}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Z}_a \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\Delta \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Если для некоторой постоянной $\mu \in \mathbb{R}$ и диагональной матрицы $\mathbf{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ мецлерова матрица $\mathbf{R} = \mu\mathbf{E}_n - \mathbf{\Upsilon}$ имеет те же самые собственные значения, что и матрица $\mathbf{Z}_a$, тогда существует ортогональная матрица $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что матрицы $\mathbf{S}^T\mathbf{DS}$ – мецлеровы для всех $\mathbf{Z} \in \Xi$ при условии, что $\mu > n\|\Delta\|_{\max}$

Доказательство этой леммы приведено в [21].

Допущение 4. Пусть $\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) \in \Xi$ для всех $t \geq 0$, $\|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}$, $\|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{Y}$, где $\Xi = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}: \mathbf{D}_a - \Delta \leq \mathbf{D} \leq \mathbf{D}_a + \Delta\}$ для некоторых ${\mathbf{D}_a}^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}_a \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\Delta \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Пусть для некоторой постоянной $\mu > n\|\Delta\|_{\max}$ и диагональной матрицы $\mathbf{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ мецлерова матрица $\mathbf{R} = \mu\mathbf{E}_n - \mathbf{\Upsilon}$ имеет те же самые собственные значения, что и матрица $\mathbf{D}_a$.

При этом допущении существует ортогональная матрица $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что матрицы $\mathbf{S}^T\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{S}$ – мецлеровы для всех $\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) \in \Xi$. Введем новую переменную состояния $\mathbf{z} = \mathbf{S}^T\mathbf{x}$, тогда система (1) может быть переписана в новых координатах:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{S}^T\mathbf{A}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{S}\mathbf{z}(t) + \varphi(t,\mathbf{z},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}),$$

где $\varphi(t,\mathbf{z},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{S}^T f(t,\mathbf{Sz},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})$. Используя условия леммы 3, мы имеем следующие соотношения:

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \overline{\mathbf{x}}(t),$$
$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^+\underline{\mathbf{z}} - \mathbf{S}^-\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^+\overline{\mathbf{z}} - \mathbf{S}^-\underline{\mathbf{z}}, \tag{3}$$

где $\underline{\mathbf{z}} \leq \mathbf{z} \leq \overline{\mathbf{z}}$ – это интервальные оценки для переменной $\mathbf{z}$. Точно также из допущения 2 получаем:

$$\underline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}},\mathbf{u}) = \mathbf{S}^{+\mathrm{T}}\underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) - \mathbf{S}^{-\mathrm{T}}\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) \leq \varphi(t,\mathbf{z},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) \leq \mathbf{S}^{+\mathrm{T}}\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) - \mathbf{S}^{-\mathrm{T}}\underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u}) =$$
$$= \overline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}},\mathbf{u}).$$

В новых координатах интервальный наблюдатель принимает вид, аналогичный (2):

$$\dot{\underline{\mathbf{z}}} = \mathbf{S}^T\mathbf{A}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{S}\underline{\mathbf{z}} + \underline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}},\mathbf{u}) + \mathbf{S}^T\mathbf{L}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})[\mathbf{y} - \mathbf{C}(t,\mathbf{u})\mathbf{S}\underline{\mathbf{z}}],$$
$$\dot{\overline{\mathbf{z}}} = \mathbf{S}^T\mathbf{A}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{S}\overline{\mathbf{z}} + \overline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}},\mathbf{u}) + \mathbf{S}^T\mathbf{L}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})[\mathbf{y} - \mathbf{C}(t,\mathbf{u})\mathbf{S}\overline{\mathbf{z}}]. \tag{4}$$

Теперь можно показать следующий расширенный вариант теоремы 1.

Теорема 2 [21, 22]. Пусть выполнены допущения 1, 2, 3 и 4. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1. $\left|\underline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right| < +\infty$, $\left|\overline{f}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})\right| < +\infty$ для любых $t \geq 0$, $\|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}$ и всех $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$;
2. для любых $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{X}$, $\|\mathbf{u}\| \leq \mathbf{U}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \Theta$ и всех $\underline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\varphi(t,\mathbf{z},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) - \underline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}},\mathbf{u})\right|^2 + \left|\overline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}},\mathbf{u}) - \varphi(t,\mathbf{z},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})\right|^2 \leq \beta\left|\mathbf{z} - \underline{\mathbf{z}}\right|^2 + \beta|\overline{\mathbf{z}} - \mathbf{z}|^2 + \alpha$$

для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ и

$$\beta\mathbf{I}_n - \mathbf{S}^T\mathbf{QS} + \mathbf{R} \preccurlyeq 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succ 0.$$

Тогда в (4), (3) и (1) переменные $\underline{\mathbf{x}}(t)$, $\overline{\mathbf{x}}(t)$ ограничены для всех $t > 0$, и

$$\underline{\mathbf{z}}(0) \leq \mathbf{z}(0) \leq \overline{\mathbf{z}}(0)$$

обеспечивает соотношение

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \overline{\mathbf{x}}(t).$$

Доказательство. Рассмотрим динамику ошибок интервального оценивания $\overline{\mathbf{e}} = \overline{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$, $\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{z} - \underline{\mathbf{z}}$:

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}} = \mathbf{S}^T\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{S}\underline{\mathbf{e}} + \varphi(t,\mathbf{z},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) - \underline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{u})$$
$$\dot{\overline{\mathbf{e}}} = \mathbf{S}^T\mathbf{D}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathbf{S}\overline{\mathbf{e}} + \overline{\varphi}(t,\underline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}},\mathbf{u}) - \varphi(t,\mathbf{z},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}).$$

Далее доказательство проводится на основе рассуждений из доказательства теоремы 1 при помощи функции Ляпунова $\mathrm{V} = \underline{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{S}\underline{\mathbf{e}} + \overline{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{S}\overline{\mathbf{e}}$ [21].

Эта теорема предлагает интервальный наблюдатель для системы с переменными параметрами, явно опуская требование кооперативности матрицы $\mathbf{D}$ замкнутого контура. Предложено преобразование координат, обеспечивающее свойство кооперативности исходной некооперативной системе. Вдобавок, снято допущение о том, что существует коэффициент усиления наблюдателя, который делает динамику ошибки оценки устойчивой и кооперативной. Коэффициент усиления наблюдателя должен, как обычно, обеспечить устойчивость ошибки наблюдения, а далее предлагается соответствующая замена координат.

Моделирование

Рассмотрим модель изотермического непрерывного биологического реактора, состоящую из следующих уравнений массового баланса клеток и ограниченного субстрата [2, 3]:

$$\frac{dS}{dt} = \sigma(S)X + \frac{F}{V}(S_0 - S)$$

$$\frac{dX}{dt} = \mu(S)X - \frac{F}{V}X,$$

где X – концентрация клеток; S – концентрация субстрата в биореакторе; $\mu(S)$ – удельная скорость та; $\sigma(S)$ – удельная скорость потребления субстрата; S_0 – концентрация субстрата в поступающем потоке; V – объем реактора; F – объемная скорость потока через биореактор.

Предполагается, что функция σ(S) имеет вид [1, 2]

$$\sigma(S) = \frac{\mu(S)}{Y(S)} = \frac{\mu_m S}{(K_m + S)Y(S)},$$

где μ_m – максимальная удельная скорость роста, K_m – константа насыщения субстрата Монода, тогда выражение выхода $Y(S)$ имеет вид

$$Y(S) = \frac{\text{количество сформированной биомассы}}{\text{количество потребляемого субстрата}} = aS + b,$$

что отражает увеличение выхода в ответ на увеличение концентрации субстрата S. Рассматривается случай постоянного выхода при $a = 0$.

В дальнейшем мы предполагаем, что [1] скорость разбавления $D = \frac{F}{V}$ строго положительна и ограничена, т.е. $D_{\min} \le D(t) \le D_{\max}$, скорость подачи S_0 также ограничена, и каждая реакция включает по крайней мере один реагент, который не является ни катализатором, ни автокатализатором. Согласно [1, 4], переменная X и скорость разбавления D ограничены на всем рассматриваемом интервале времени.

Коэффициент усиления наблюдателя был найден как $\mathbf{L} = [0{,}8309 \quad -1{,}5726]^{\mathrm{T}}$, что позволяет обеспечить устойчивость наблюдателя и кооперативность ошибки наблюдения.

Построенные границы вектора состояния (X, S) представлены на рис. 1, 2. Результаты показывают, что измерения состояний гарантированно находятся внутри оцененного интервала, а интервальная оценка сходится к области с шириной, зависящей от динамики ошибок измерений.

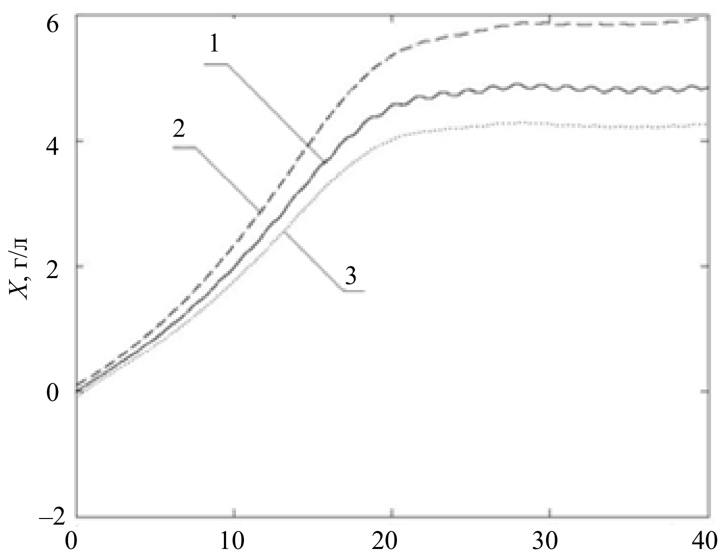

Рис. 1. Результаты моделирования: изменение состояния X концентрации клеток (1) и его интервальная оценка – верхняя (2) и нижняя (3) границы

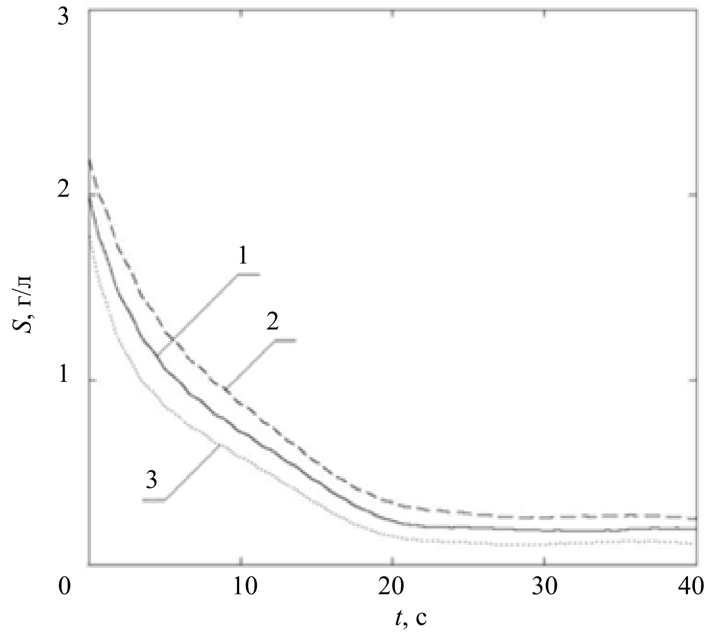

Рис. 2. Результаты моделирования: изменение состояния концентрации субстрата S (1) и его интервальная оценка – верхняя (2) и нижняя (3) границы

Заключение

В работе показано, что интервальный наблюдатель позволяет получить область оценок переменных состояния системы, гарантированно содержащих фактическое значение состояния в данный момент времени. Рассмотрен вопрос выбора индивидуальной матрицы усиления наблюдателя, который должен гарантировать только устойчивость ошибки наблюдения. Для обеспечения свойства кооперативности динамики ошибки интервальной оценки предложено статическое преобразование координат, с помощью которого устойчивая система с переменными параметрами может быть превращена в устойчивую и кооперативную. Приводится доказательство теоремы об ограниченности траекторий полученной области на основе свойства кооперативности системы. Апробация метода проведена с помощью компьютерного моделирования системы биологического реактора.

Литература

1. Bastin G., Van Impe J.F. Nonlinear and adaptive control in biotecnology: a tutorial // European Journal of Control. 1995. V. 1. N 1. P. 37–53.
2. Ajbar A., Alhumaizi K. Dynamics of the Chemostat: A Bifurcation Theory Approach. CRC Press, 2011. 368 p.
3. Fossas E., Ros R.M., Fabregat J. Sliding mode control in a bioreactor model // Journal of Mathematical Chemistry. 2001. V. 30. N 2. P. 203–218.
4. Гордеева Ю.Л., Гордеев Л.С. Математическая модель непрерывного процесса в биореакторе с рециклом субстрата и биомассы // Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2. С. 9–18.
5. Mazenc F., Niculescu S.I., Bernard O. Interval observers for linear systems with delay // Proc. of the 48th IEEE conference on decision and control. Shanghai, China, 2009. P. 1860–1865.
6. Moisan M., Bernard O., Gouze J.-L. Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors // Automatica. 2009. V. 45. N 1. P. 291–295.
7. Bernard O., Gouze J.-L. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models // Journal of Process Control. 2004. V. 14. N 7. P. 765–774.
8. Moisan M., Bernard O. Interval observers for non monotone systems. Application to bioprocess models // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2005. V. 16. P. 43-48.
9. Jaulin L. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous time systems // Automatica. 2002. V. 38. N 6. P. 1079–1082.
10. Kiefer M., Walter E. Guaranteed nonlinear state estimator for cooperative systems // Numerical Algorithms. 2004. V. 37. N 1-4. P. 187–198.
11. Raissi T., Videau G., Zolghadri A. Interval observers design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems // Automatica. 2010. V. 46. N 3. P. 518–527.
12. Raissi T., Efimov D., Zolghadri A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2012. V. 57. N 1. Art. N 5983407. P. 260–265.

13. Efimov D., Fridman L.M., Raissi T., Zolghadri A., Seydou R. Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques // Automatica. 2012. V. 48. N 9. P. 2365–2371.
14. Mazenc F., Bernard O. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances // Automatica. 2011. V. 47. N 1. P. 140–147.
15. Чеботарев С.Г., Кремлев А.С. Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 4. С. 42–46.
16. Chebotarev S., Efimov D., Raïssi T., Zolghadri A. On Interval observer design for a class of continuous-time LPV systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2013. V. 9, part 1. P. 68–73.
17. Chebotarev S., Kremlev A. Analysis conditions on interval observer synthesis for linear systems with variable parameters // 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2013. Międzyzdroje, Poland, 2013. Art. N 6669939. P. 390–392.
18. Чеботарев С.Г., Кремлев А.С. Анализ линейных систем с переменными параметрами для синтеза интервальных наблюдателей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 6 (82). С. 50–53.
19. Smith H.L. Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Providence: AMS, 1995. V. 41. 174 p.
20. Ефимов Д.В., Кремлев А.С., Харьковская Т.А., Чеботарев С.Г. Построение системы интервального оценивания для модели регуляции гормона тестостерона // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 6 (88). С. 56–60.
21. Efimov Denis, Raïssi Tarek, Chebotarev Stanislav, Zolghadri Ali. Interval state observer for nonlinear time varying systems // Automatica. 2013. V. 49. N 1. P. 200–205.
22. Efimov Denis V., Raïssi Tarek, Chebotarev Stanislav, Zolghadri Ali. On set-membership observer design for a class of periodical time-varying systems // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 2012. Art. N 6426474. P. 6767–6772.

Харьковская Татьяна Александровна	–	магистрант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, easymedia@mail.ru
Кремлев Артем Сергеевич	–	кандидат технических наук, зам. декана, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, kremlev_artem@mail.ru
Сабирова Дина Мизхатовна	–	магистрант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, dy.alastor@bk.ru
Ефимов Денис Валентинович	–	доктор технических наук, ответственный исследователь первого ранга, Национальный институт исследований по информатике и автоматике, Лилль, Франция, efde@mail.ru
Раисси Тарек	–	кандидат технических наук, доцент, Центр исследований в области компьютерных наук и телекоммуникаций, Париж, Франция, tarek.raissi@cnam.fr

Tatiana A. Kharkovskaya	–	student, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, easymedia@mail.ru
Artem S. Kremlev	–	Associate professor, PhD, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, kremlev_artem@mail.ru
Dina M. Sabirova	–	student, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, dy.alastor@bk.ru
Denis V. Efimov	–	INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique), Principal investigator of the first rank, Lille, France, D.Sc., efde@mail.ru
Tarek Raissi	–	Associate professor, PhD, Paris, France, Centre for Research in Computer Science and Telecommunications (Cédric), Cnam, tarek.raissi@cnam.fr

Принято к печати 02.04.2014
Accepted 02.04.2014