

УДК 519.688: 681.2.088

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОШИБОК ПРЕДСКАЗАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКОГО СИГНАЛА В АЛГОРИТМЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА<sup>1</sup>

Е.Л. Дмитриева<sup>а</sup>, И.П. Гуров<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, blakkati@rambler.ru

Рассмотрены основные особенности алгоритма нелинейной фильтрации Калмана применительно к задаче динамической обработки интерферометрических сигналов. Получены аналитические оценки, определяющие статистические характеристики ошибок предсказания значений сигнала, проведен анализ гистограмм ошибок с учетом изменения различных параметров интерферометрического сигнала. Выполнено моделирование операции предсказания сигнала при известных фиксированных параметрах и изменяющихся параметрах сигналов в алгоритме нелинейной фильтрации Калмана. Получены количественные оценки ошибок предсказания значений интерферометрического сигнала путем построения и анализа гистограмм ошибок при воздействии аддитивного шума и при случайных изменениях амплитуды и частоты интерферометрического сигнала. Показано, что нелинейный фильтр Калмана обеспечивает обработку сигналов со случайно изменяющимися параметрами, однако непосредственно не учитывает погрешность линеаризации гармонической функции, представляющей интерферометрический сигнал, что является источником погрешностей фильтрации. Основным недостатком линейного предсказания состоит в негауссовской статистике ошибок предсказания, в том числе при случайных отклонениях амплитуды и (или) частоты сигнала. При стохастической фильтрации интерферометрических сигналов целесообразно использовать процедуры предсказания, основанные на учете локальных статистик сигнала и его параметров.

**Ключевые слова:** интерферометрический сигнал, нелинейный фильтр Калмана, ошибка предсказания, гауссовский шум, гистограмма.

## STATISTICAL CHARACTERISTICS INVESTIGATION OF PREDICTION ERRORS FOR INTERFEROMETRIC SIGNAL IN THE ALGORITHM OF NONLINEAR KALMAN FILTERING<sup>1</sup>

E.L. Dmitrieva<sup>a</sup>, I.P. Gurov<sup>a</sup>

<sup>а</sup> ITMO University, Saint Petersburg, Russia, blakkati@rambler.ru

Basic peculiarities of nonlinear Kalman filtering algorithm applied to processing of interferometric signals are considered. Analytical estimates determining statistical characteristics of signal values prediction errors were obtained and analysis of errors histograms taking into account variations of different parameters of interferometric signal was carried out. Modeling of the signal prediction procedure with known fixed parameters and variable parameters of signal in the algorithm of nonlinear Kalman filtering was performed. Numerical estimates of prediction errors for interferometric signal values were obtained by formation and analysis of the errors histograms under the influence of additive noise and random variations of amplitude and frequency of interferometric signal. Nonlinear Kalman filter is shown to provide processing of signals with randomly variable parameters, however, it does not take into account directly the linearization error of harmonic function representing interferometric signal that is a filtering error source. The main drawback of the linear prediction consists in non-Gaussian statistics of prediction errors including cases of random deviations of signal amplitude and/or frequency. When implementing stochastic filtering of interferometric signals, it is reasonable to use prediction procedures based on local statistics of a signal and its parameters taken into account.

**Keywords:** interferometric signal, nonlinear Kalman filtering, prediction error, Gaussian noise, histogram.

### Введение

Бесконтактные методы исследования и контроля объектов применяются во многих отраслях науки и техники [1, 2]. Интерферометрические методы являются наиболее точными и обеспечивают бесконтактные измерения различных характеристик исследуемых объектов [1–3].

Для обработки интерферометрических сигналов широко используются методы, основанные на преобразовании Фурье (см., например, [4]). Недостаток таких методов состоит в необходимости регистрации полного набора данных перед их обработкой, что ограничивает быстродействие и в ряде случаев не позволяет проводить динамические измерения характеристик исследуемых объектов.

Во многих случаях для оценки состояния динамической системы используются методы фильтрации Калмана [5, 6], основанные на описании систем и сигналов при помощи стохастических дифференциальных и разностных уравнений. В методе дискретной фильтрации Калмана осуществляется предсказание (прогноз) значений параметров сигнала и его значения для каждого шага дискретизации на основе информации, полученной на предыдущем шаге. В результате сравнения фактически зарегистрированного и прогнозируемого значений сигнала определяется невязка, используемая как поправка к предсказанным значениям параметров на каждом шаге. Данный подход успешно использован для динамической обработки интерферометрических сигналов в бесконтактной профилометрии и оптической когерентной томо-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации и государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01).

<sup>1</sup> The work was done under financial support by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and by state financial support for the leading universities of the Russian Federation (project 074-U01).

графии [7–10], при обработке двумерных картин интерференционных полос [11], в интерферометрии фазового сдвига с трехмерным развертыванием фазы [12], при высокоточном интерферометрическом контроле перемещений [13], при обработке интерферометрической информации радара с синтезированной апертурой [14].

Степень оптимальности фильтра в значительной мере определяется статистическими характеристиками погрешностей при использовании существенно нелинейной модели сигнала. В теории линейной фильтрации Калмана обычно используется предположение о гауссовском статистическом распределении ошибок предсказания и гауссовском шуме наблюдения [5, 7, 15]. Применительно к интерферометрическим сигналам, зависящим от параметров нелинейно, это допущение не вполне корректно, и требуется провести исследование источников ошибок предсказания для рассматриваемого вида сигналов.

В настоящей работе представлены результаты исследования статистических характеристик ошибок предсказания для дискретной последовательности значений сигналов в форме гармонических функций, широко используемых для описания интерферометрических сигналов.

### Метод нелинейной дискретной фильтрации Калмана

Алгоритм нелинейной фильтрации Калмана основывается на использовании параметрической модели сигнала, которую в общем случае можно представить в векторной форме:

$$\mathbf{s}(k) = \mathbf{h}(k, \boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{n}(k),$$

где  $\mathbf{h}(k, \boldsymbol{\theta}(k))$  – нелинейная модель сигнала (функция наблюдения);  $\boldsymbol{\theta}$  – вектор параметров;  $\mathbf{n}(k)$  – шум наблюдения;  $k$  – номер дискретного отсчета,  $k=1, \dots, K$ , в выборке из  $K$  отсчетов с шагом дискретизации  $\Delta x$  по независимой переменной  $x$ . Задача фильтрации состоит в получении динамических оценок вектора параметров  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$  с обеспечением требуемой точности и помехоустойчивости по отношению к шуму наблюдений. Эволюция параметров сигнала на  $k$ -ом шаге дискретизации определяется уравнением

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{f}(k, \boldsymbol{\theta}(k-1)) + \mathbf{w}(k),$$

где  $\mathbf{f}(k, \boldsymbol{\theta}(k))$  – известная векторная функция, которая в общем случае учитывает возможное нелинейное изменение вектора параметров;  $\mathbf{w}(k)$  – формирующий шум.

Априорная оценка параметров (предсказание) для  $k$ -го шага обработки

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}(k) = \mathbf{T}(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \tag{1}$$

определяется матрицей перехода  $\mathbf{T}(k)$  при линейной эволюции параметров в интерферометрической системе с использованием апостериорной оценки вектора параметров  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$ , полученной на предыдущем шаге.

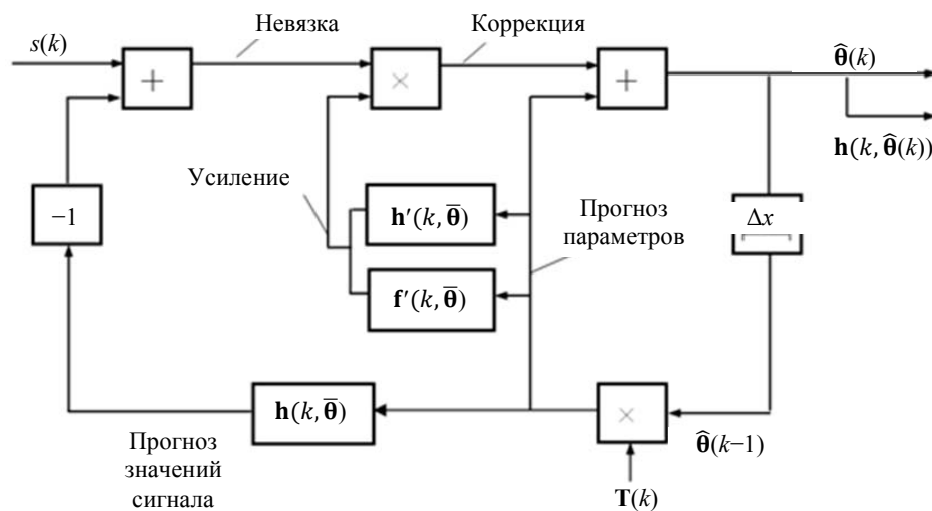


Рис. 1. Структурная схема дискретного нелинейного фильтра Калмана

Динамическая оценка вектора параметров  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$  вычисляется как

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \bar{\boldsymbol{\theta}}(k) + \mathbf{P}(k) [\mathbf{s}_{obs}(k) - \mathbf{h}(k, \bar{\boldsymbol{\theta}}(k))], \tag{2}$$

где  $\bar{\boldsymbol{\theta}}(k)$  – вектор параметров, предсказанный в (1),  $\mathbf{P}(k)$  – коэффициент усиления фильтра, осуществляющий коррекцию вектора параметров  $\bar{\boldsymbol{\theta}}(k)$  по ошибке прогноза сигнала,  $\mathbf{s}_{obs}(k)$  – регистрируемая последовательность дискретных отсчетов сигнала.

Структура нелинейного фильтра Калмана представлена на рис. 1. На этой схеме иллюстрируются операции, определяемые выражениями (1) и (2), с получением динамических оценок вектора параметров

$\hat{\theta}(k)$  и значений функции наблюдения  $\mathbf{h}(k, \hat{\theta}(k))$ . Отметим, что при выполнении коррекции параметров в нелинейном фильтре Калмана используются оценки производных функций  $\mathbf{h}'(k, \bar{\theta})$  и  $\mathbf{f}'(k, \bar{\theta})$ . Более подробное описание алгоритма приведено, например, в работе [9].

### Погрешности предсказания значений интерферометрического сигнала

Модель скалярного интерферометрического сигнала  $s(k) = h(k, \theta(k))$  с постоянной амплитудой  $A$  представляется в виде

$$s(k) = A \cos(2\pi f_0 k \Delta x + \varphi(k)), \quad (3)$$

где  $f_0$  – несущая частота;  $\varphi(k)$  – случайные отклонения фазы, от которых значения сигнала зависят нелинейно.

Известно, что если функция  $g(x)$  имеет конечную производную в точке  $x_0$ , то ее можно аппроксимировать в окрестности этой точки линейной функцией при разложении в ряд Тейлора и использовании первой производной. При этом

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0). \quad (4)$$

Применительно к сигналу (3) при отсутствии случайных отклонений фазы уравнение (4) при  $x_0 = (k-1)\Delta x$  принимает вид

$$\hat{s}(k) = A \cos(2\pi f_0 (k-1)\Delta x) - 2\pi f_0 A \sin(2\pi f_0 (k-1)\Delta x) \Delta x. \quad (5)$$

Следовательно, погрешность предсказания определяется как

$$\delta s(k) = \hat{s}(k) - s(k) = A \cos(2\pi f_0 (k-1)\Delta x) - 2\pi f_0 A \sin(2\pi f_0 (k-1)\Delta x) \Delta x - A \cos(2\pi f_0 k \Delta x). \quad (6)$$

При использовании известной формулы сложения гармонических функций

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(\varphi + \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right)$$

погрешность предсказания (6) можно представить в форме

$$\delta s(k) = A \sqrt{1 + (2\pi f_0 \Delta x)^2} \sin\left(2\pi f_0 (k-1)\Delta x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 \Delta x)^2}}\right)\right) - A \cos(2\pi f_0 k \Delta x). \quad (7)$$

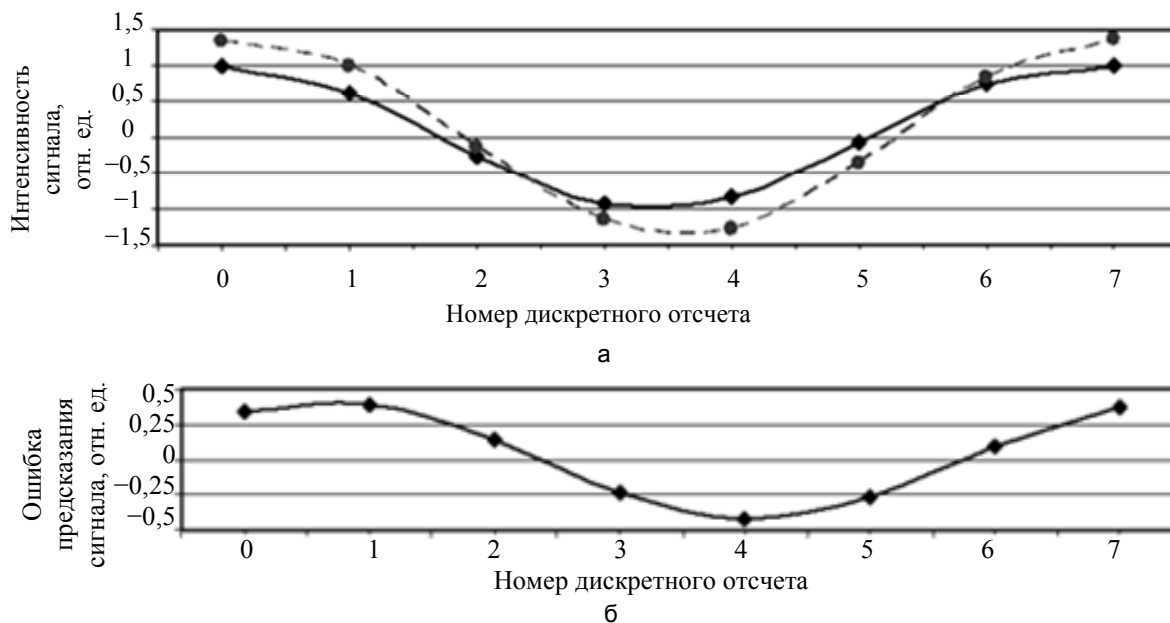


Рис. 2. Исходный сигнал и результат линейного предсказания: сплошная линия – интерферометрический сигнал при количестве отсчетов на периоде, равном 7, пунктирная – линейное предсказание согласно выражению (5) (а); изменение погрешности предсказания в пределах одного периода интерферометрического сигнала (б)

Из (7) следует, что погрешность предсказания снижается при уменьшении приращения фазы в пределах шага дискретизации, т.е. при  $2\pi f_0 \Delta x \rightarrow 0$ . Из (7) также видно, что погрешность предсказания носит характер гармонической функции, имеющей частоту исходного сигнала, причем амплитуда и начальная фаза этой функции зависят от частоты сигнала и шага дискретизации.

На рис. 2, а, сплошной линией представлен пример интерферометрического сигнала при количестве отсчетов на периоде, равном 7, пунктирной линией показан результат линейного предсказания соглас-

но выражению (5). На рис. 2, б, иллюстрируется определяемая выражением (7) погрешность предсказания значений сигнала, приведенного на рис. 2, а.

Гистограмма погрешности предсказания, построенная с использованием отсчетов на длине реализации в 20 периодов сигнала и представляющая оценку плотности вероятности погрешности (7), показана на рис. 3. Гистограмма соответствует плотности вероятности гармонического случайного процесса, т.е. является существенно негауссовской.



Рис. 3. Гистограмма погрешностей предсказания

В случае влияния аддитивного шума наблюдения интерферометрический сигнал дополнительно искажается. Рассмотрим погрешности предсказания для этого случая.

Пусть сигнал вида (3) подвержен влиянию аддитивного шума

$$s(k) = A \cos(2\pi f_0 k \Delta x) + n(k), \tag{8}$$

где  $n(k)$  – гауссовский шум наблюдения с нулевым средним значением.

На рис. 4, а, показан пример сигнала (8) при  $A = 1$  и среднем квадратичном отклонении (СКО) шума, равном 0,3. На рисунке пунктирной линией иллюстрируются значения предсказанного сигнала вида (5) при влиянии шума. Из рисунка видно, что, как и следовало ожидать, аддитивный шум складывается с ошибкой предсказания. Погрешности предсказания с учетом шума наблюдения иллюстрируются на рис. 4, б, гистограмма погрешностей приведена на рис. 4, в.

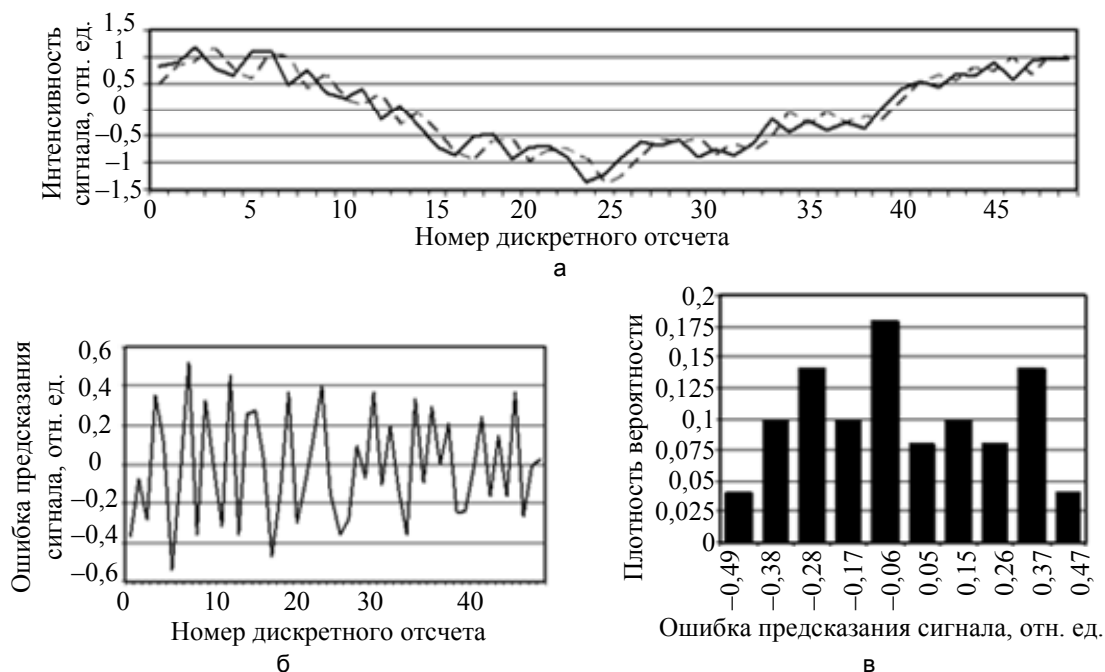


Рис. 4. Исходный сигнал (сплошная линия) и результат предсказания (пунктирная линия – значения предсказанного сигнала вида (5) при влиянии шума) (а); ошибка предсказания с учетом шума наблюдения (б); гистограмма погрешностей предсказания (в)

Известно, что плотность вероятности суммы независимых случайных величин равна свертке маргинальных плотностей вероятности. Гистограмма, представленная на рис. 4, в, определяется сверткой

гистограммы, показанной на рис. 3, с гистограммой для гауссовского шума наблюдения и теоретически содержит два максимума (при отношении сигнала к шуму по мощности более единицы, (см., например, [3], с. 31)), что указывает в общем случае на негауссовский характер погрешности линейного предсказания в условиях аддитивного гауссовского шума наблюдения.

При формировании интерферометрического сигнала возможны также случайные отклонения амплитуды сигнала, обусловленные, в частности, степенью отражения излучения от исследуемого объекта. При этом возникает дополнительная составляющая погрешности предсказания сигнала.

При отклонениях амплитуды  $\delta A(k)$  интерферометрический сигнал (8) принимает вид

$$s(k) = (A + \delta A(k)) \cos(2\pi f_0 k \Delta x) + n(k). \quad (9)$$

Примем, что амплитуда сигнала изменяется по случайному закону, определяемому стохастическим разностным уравнением первого порядка

$$\delta A(k) = (\alpha_A - 1)\delta A(k-1) + w_A(k),$$

где  $\alpha_A$  – положительное число,  $0 < \alpha_A < 1$ ,  $w_A(k)$  – гауссовский формирующий шум с нулевым средним значением и СКО  $\sigma_{w_A}$ .

Полученные результаты иллюстрируются примером на рис. 5, а, при величине  $\alpha_A = 0,2$ . Погрешность предсказания с учетом шума наблюдения  $n(k)$  и отклонений амплитуды  $\delta A(k)$ , а также гистограмма погрешностей показаны на рис. 5, б, и рис. 5, в, соответственно. Видно, что гистограмма имеет сложную негауссовскую форму с несколькими локальными максимумами.

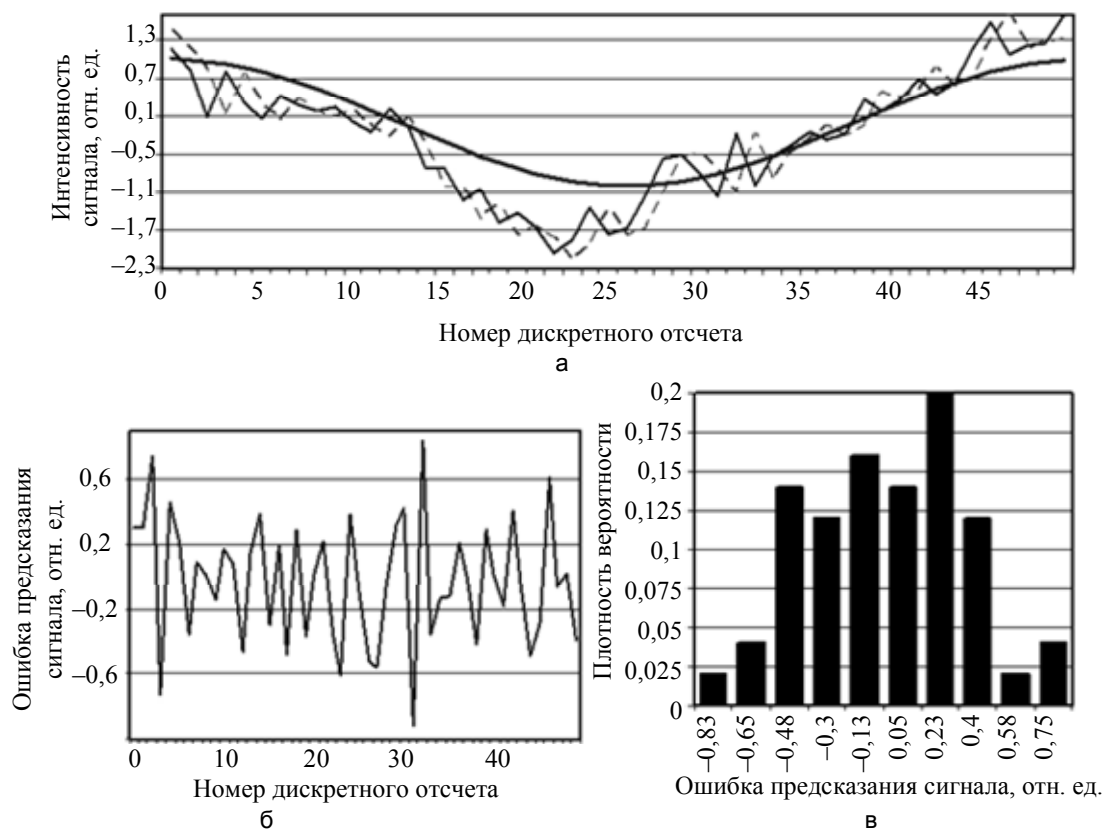


Рис. 5. Идеализированный сигнал без отклонений амплитуды и шума наблюдения (толстая линия), модельный сигнал вида (9) (тонкая линия) и результат предсказания (пунктирная линия) (а); ошибка предсказания при случайных отклонениях амплитуды сигнала и влиянии шума наблюдения (б); гистограмма погрешностей предсказания (в)

При случайных отклонениях локальной частоты интерферометрический сигнал представляется в виде

$$s(k) = A \cos(2\pi f_0 k \Delta x + \varphi(k)) + n(k),$$

где отклонения фазы вычисляются как

$$\varphi(k) = 2\pi\beta \sum_{i=1}^k f_i \Delta x,$$

где  $f_i$  – значения локальных отклонений частоты;  $\beta$  – малое положительное число, определяющее сте-

пень отклонений фазы сигнала. Изменение частоты сигнала можно определить аналогично отклонениям амплитуды с использованием стохастического разностного уравнения первого порядка

$$f(k) = (\alpha_f - 1)f(k-1) + w_f(k),$$

где  $\alpha_f$  – положительное число,  $0 < \alpha_f < 1$ .

Полученные результаты показаны на рис. 6, а. Погрешность предсказания с учетом шума наблюдения и отклонений частоты, а также гистограмма погрешностей представлены на рис. 6, б, и рис. 6, в, соответственно.

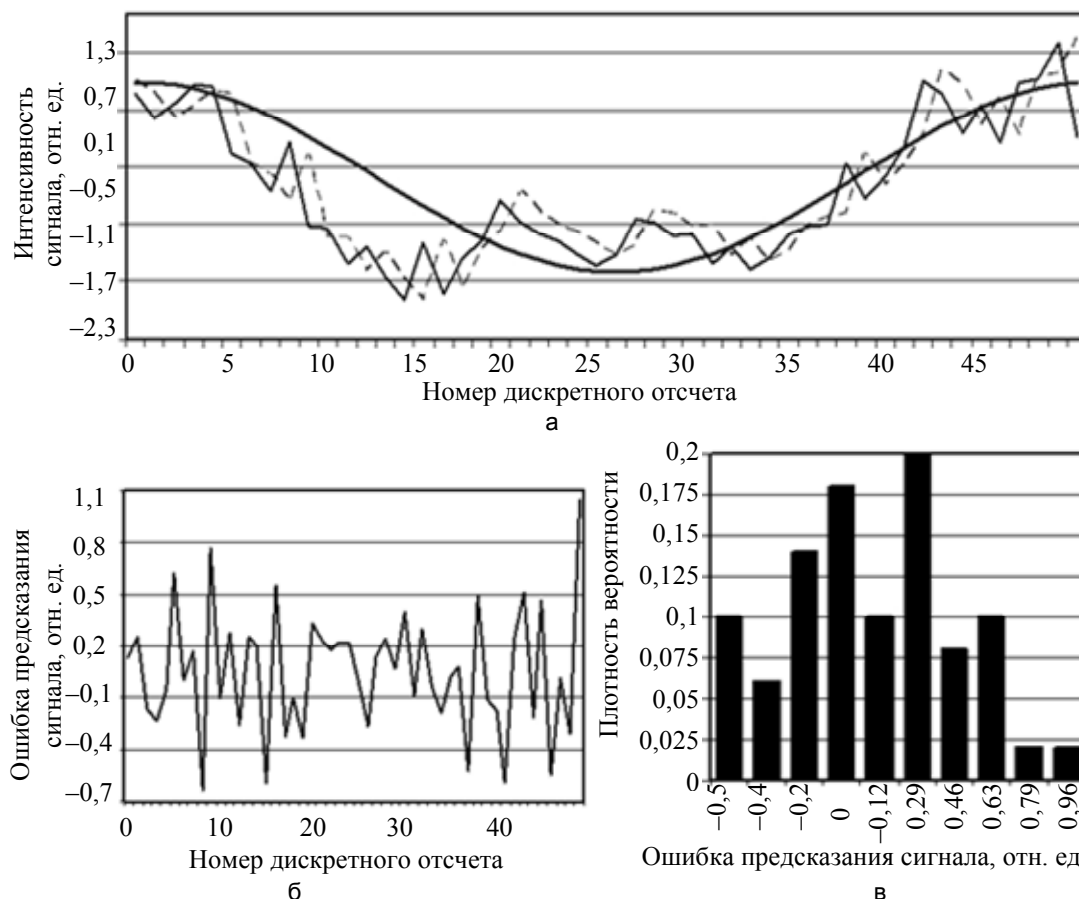


Рис. 6. Идеализированный сигнал без локальных отклонений частоты (толстая линия), модельный сигнал (тонкая линия) и результат предсказания (пунктирная линия) (а); ошибка предсказания с учетом отклонений частоты и шума наблюдения (б); гистограмма погрешности предсказания (в)

Таким образом, результаты проведенных исследований показывают, что гистограммы погрешности предсказания (см. рис. 4, в, рис. 5, в, рис. 6, в) имеют сложную негауссовскую форму с несколькими пиками. Следовательно, при использовании линейного предсказания в условиях случайных отклонений амплитуды и (или) частоты интерферометрического сигнала гипотеза о гауссовской статистике погрешностей неправомерна, что может вызывать погрешности и неустойчивость алгоритма нелинейной фильтрации Калмана применительно к интерферометрическим сигналам.

### Заключение

Проведена оценка статистических характеристик ошибок предсказания значений интерферометрического сигнала путем построения и анализа гистограмм ошибок для различных условий и случайных изменений параметров сигнала.

Нелинейный фильтр Калмана обеспечивает обработку сигналов с нелинейно изменяющимися параметрами, однако не является оптимальным, так как непосредственно не учитывает погрешность линеаризации гармонической функции, представляющей интерферометрический сигнал.

Основной недостаток линейного предсказания состоит в негауссовской статистике ошибок предсказания, в том числе при случайных отклонениях амплитуды и (или) частоты сигнала. При стохастической фильтрации интерферометрических сигналов целесообразно использовать методы предсказания, основанные на учете локальных статистик сигнала и его параметров, что представляет предмет дальнейших исследований.

### Литература

1. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чирков А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.
2. Malacara D. Optical Shop Testing. 2<sup>nd</sup> ed. NY, John Wiley & Sons, 1992. 792 p.
3. Васильев В.Н., Гуров И.П. Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам. СПб: БХВ Санкт-Петербург, 1998. 240 с.
4. Takeda M. Fourier fringe analysis and its application to metrology of extreme physical phenomena: a review // Applied Optics. 2013. V. 52. N 1. P. 20–29.
5. Kalman R.E. A New approach to linear filtering and prediction problems // Journal of Basic Engineering. 1960. V 82. N 1. P. 35–45.
6. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 169 с.
7. Gurov I., Ermolaeva E., Zakharov A. Analysis of low-coherence interference fringes by the Kalman filtering method // Journal of the Optical Society of America A. 2004. V. 21. N 2. P. 242–251.
8. Gurov I., Volynsky M., Zakharov A. Evaluation of multilayer tissues in optical coherence tomography by the extended Kalman filtering method // Proc. SPIE - The International Society for Optical Engineering. 2007. V. 6734. Art. N 67341P.
9. Волынский М.А., Гуров И.П., Захаров А.С. Динамический анализ сигналов в оптической когерентной томографии методом нелинейной фильтрации Калмана // Оптический журнал. 2008. Т. 75. № 10. С. 89–94.
10. Gurov I., Volynsky M. Dynamic fringe analysis in spectral interferometry and optical coherence tomography based on recurrence computational algorithms // Fringe 13, 7th International Workshop on Advanced Optical Imaging and Metrology. Springer-Verlag, 2013. P. 313–316.
11. Гуров И.П., Захаров А.С. Анализ характеристик интерференционных полос методом нелинейной фильтрации Калмана // Оптика и спектроскопия. 2004. Т. 96. № 2. С. 210–216.
12. Gurov I., Volynsky M., Vorobeva E. Dynamic wavefront evaluation in phase shifting interferometry based on recurrence fringe processing // Int. Conf. on Advanced Phase Measurement Methods in Optics and Imaging // AIP Conf. Proc. 2010. V. 1236. P. 479–484.
13. Park T.-J., Choi H.-S., Han C.-S., Lee Y.-W. Real-time precision displacement measurement interferometer using the robust discrete time Kalman filter // Optics and Laser Technology. 2005. V. 37. N 3. P. 229–234.
14. Nies H., Loffeld O., Wang Y. Two dimensional Kalman filter approach for phase unwrapping of TerraSAR-X data2008 // 7th European Conference on Synthetic Aperture Radar, EUSAR. Friedrichshafen, Germany, 2008. P. 1–4.
15. Чердынцев В.А. Радиотехнические системы. Минск: Высшая школа, 1988. 372 с.

<i>Дмитриева Екатерина Леонидовна</i>	– аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, blakkati@rambler.ru
<i>Гуров Игорь Петрович</i>	– доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, gurov@mail.ifmo.ru
<i>Ekaterina L. Dmitrieva</i>	– postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, blakkati@rambler.ru
<i>Igor P. Gurov</i>	– Department head, D.Sc., Professor, ITMO University, gurov@mail.ifmo.ru

Принято к печати 31.03.2014

Accepted 31.03.2014