
ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ И НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 531.383

Л. А. СЕВЕРОВ, В. К. ПОНОМАРЕВ, А. И. ПАНФЕРОВ, Н. А. ОВЧИННИКОВА

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ НА ОСНОВЕ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА В УПРУГОМ ПОДВЕСЕ

Представлена новая модель динамики микромеханических гироскопов, учитывающая влияние на кольцевой резонатор массовых, упругих, диссипативных и кориолисовых сил системы его подвеса.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, кольцевой резонатор, упругий подвес, радиальные и тангенциальные нагрузки.

Конструкции современных микромеханических гироскопов на основе кольцевого резонатора (ММГ R-типа) отличаются разнообразием схем упругого подвеса. В конструкциях компаний British Aerospace, Silicon Sensing System [1, 2] внешняя схема упругого подвеса резонатора содержит восемь стержневых элементов; в разработках компании Delco Electronics и университета Michigan [3] используется внутренняя схема подвеса резонатора, образованная изогнутыми балками. В поперечном сечении высота упругих элементов равна высоте резонатора, а их ширина составляет десятки микрометров. Как правило, упругие элементы равномерно окружают резонатор и технологически жестко связаны с ним в восьми точках. В процессе работы ММГ точки крепления упругих элементов к резонатору совершают малые радиальные w и тангенциальные v перемещения на частоте собственных колебаний резонатора в подвесе. Эти колебания при выполнении гипотезы нерастяжимости средней линии резонатора [4] связаны условием

$$\frac{\partial v(t, \varphi)}{\partial \varphi} = w(t, \varphi), \quad (1)$$

где t и φ — независимые переменные.

Таким образом, в процессе работы ММГ кольцевой резонатор испытывает внешние радиальные и тангенциальные нагрузки, обусловленные присоединенными упругими, инерционными, диссипативными и кориолисовыми силами элементов подвеса.

Присоединенные к резонатору радиальные и тангенциальные силы от двух диаметрально расположенных упругих элементов в этом случае определяются зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} Q_2(t, \varphi) &= \psi_1(\varphi) \left[m_R \ddot{w}(t, \varphi) + d_R \dot{w}(t, \varphi) + c_R w(t, \varphi) + 2m_T \dot{v}(t, \varphi) \Omega \right], \\ P_2(t, \varphi) &= \psi_1(\varphi) \left[m_T \ddot{v}(t, \varphi) + d_T \dot{v}(t, \varphi) + c_T v(t, \varphi) - 2m_R \dot{w}(t, \varphi) \Omega \right], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где m_R, m_T — присоединенные массы (R — радиальные, T — тангенциальные); d_R, d_T — коэффициенты присоединенных диссипативных сил подвеса; c_R, c_T — коэффициенты жесткости упругого подвеса; Ω — измеряемая угловая скорость; $\psi_1(\varphi)$ — функция, зависящая от местоположения упругих элементов.

На рис. 1 приведен один из пары упругих элементов возможной стержневой конструкции, состоящий из радиального (РС) и тангенциального (ТС) стержней. Жесткое крепление элемента подвеса к резонатору в зоне малого угла $2\beta_0$ расположено под углом ψ_0 к оси OX в системе координат корпуса прибора OXY . На рисунке показаны положительные направления смещений точки крепления упругого элемента w и v , которым соответствуют радиальные и тангенциальные присоединенные силы Q и P [4].

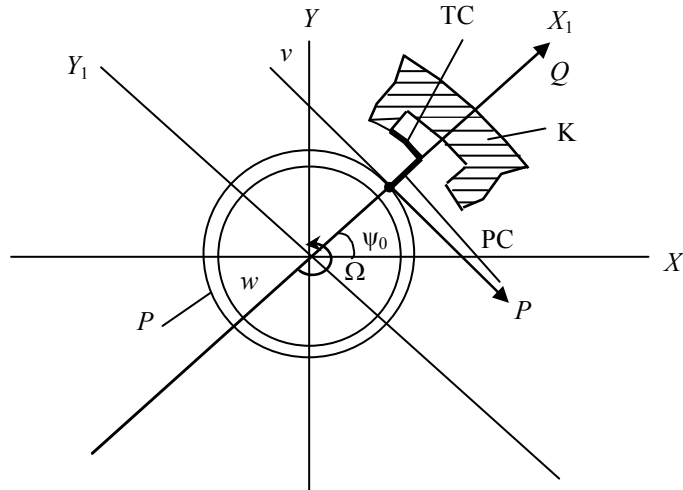


Рис. 1

Распределение этих сил по телу резонатора определяется функцией $\psi_1(\varphi)$, график которой для пары диаметрально расположенных элементов приведен на рис. 2.

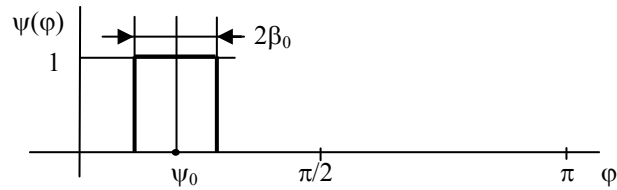


Рис. 2

В этом случае:

$$\psi_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \varphi < \psi_0 - \beta_0, \quad \psi_0 + \beta_0 < \varphi < \pi, \\ 1 & \text{при } \psi_0 - \beta_0 \leq \varphi \leq \psi_0 + \beta_0. \end{cases} \quad (3)$$

Ограничиваясь первыми тремя членами разложения периодической функции $\psi(\varphi)$ в ряд Фурье на интервале $[0, -\pi]$, запишем:

$$\psi_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\varphi + b_1 \sin 2\varphi, \quad (4)$$

где $a_0 = \frac{4\beta_0}{\pi}$, $a_1 = \frac{2}{\pi} \cos 2\psi_0 \sin 2\beta_0$, $b_1 = \frac{2}{\pi} \sin 2\psi_0 \sin 2\beta_0$,

таким образом

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\varphi) &= \frac{2}{\pi} [\beta_0 + \sin 2\beta_0 (\cos 2\psi_0 \cos 2\varphi + \sin 2\psi_0 \sin 2\varphi)], \\ \psi_1'(\varphi) &= \frac{4}{\pi} \sin 2\beta_0 (-\cos 2\psi_0 \sin 2\varphi + \sin 2\psi_0 \cos 2\varphi), \\ \psi_1''(\varphi) &= -\frac{8}{\pi} \sin 2\beta_0 (\cos 2\psi_0 \cos 2\varphi + \sin 2\psi_0 \sin 2\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

штрихами обозначено дифференцирование по φ .

Отметим, что функции (5) справедливы для группы из четырех элементов подвеса, расположенных по осям системы координат OX_1Y_1 . Аналогично для системы координат OX_2Y_2 , развернутой относительно OX_1Y_1 на угол $\pi/4$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_2(\varphi) &= \frac{2}{\pi} [\beta_0 + \sin 2\beta_0 (-\cos 2\psi_0 \sin 2\varphi + \sin 2\psi_0 \cos 2\varphi)], \\ \psi_2'(\varphi) &= -\frac{4}{\pi} \sin 2\beta_0 (\cos 2\psi_0 \cos 2\varphi + \sin 2\psi_0 \sin 2\varphi), \\ \psi_2''(\varphi) &= \frac{8}{\pi} \sin 2\beta_0 (\cos 2\psi_0 \sin 2\varphi - \sin 2\psi_0 \cos 2\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Плотности распределения приведенных радиальных и тангенциальных сил (2) — сил, приходящихся на единицу длины резонатора [4, 5], — составят:

$$\left. \begin{aligned} q_2(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi r \rho S} Q_2(t, \varphi) = \frac{1}{m_p} Q_2(t, \varphi), \\ p_2(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi r \rho S} P_2(t, \varphi) = \frac{1}{m_p} P_2(t, \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где r , ρ , S , m_p — радиус средней линии, плотность материала, площадь поперечного сечения и масса резонатора. Поэтому в соответствии с работами [4—6] и рис. 2 в правую часть уравнения динамики ММГ R-типа, приведенного к переменной $w(t, \varphi)$, должно с учетом направления действия сил q , p и формулой (7) войти воздействие:

$$f_2(t, \varphi) = \pm (q_2'' - p_2'), \quad (8)$$

где знак „+“ соответствует силам, ориентированным по положительным направлениям перемещений v и w . Составляющая воздействия (8), определяемая производной q_2'' , зависит от радиального перемещения $w(t, \varphi)$.

Для основной (второй) формы колебаний резонатора [4—6] получим систему

$$\left. \begin{aligned} w(t, \varphi) &= (a \cos 2\varphi + b \sin 2\varphi) \cos \lambda t + (m \cos 2\varphi + n \sin 2\varphi) \sin \lambda t, \\ w'(t, \varphi) &= 2 [(-a \sin 2\varphi + b \cos 2\varphi) \cos \lambda t + (-m \sin 2\varphi + n \cos 2\varphi) \sin \lambda t], \\ w''(t, \varphi) &= -4 [(a \cos 2\varphi + b \sin 2\varphi) \cos \lambda t + (m \cos 2\varphi + n \sin 2\varphi) \sin \lambda t], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где a , b , m , n — амплитуды огибающих четырех форм колебаний резонатора в подвесе на частоте λ .

Составляющие воздействия (8), определяемые производной p_2' , зависят от тангенциального перемещения $v(t, \varphi)$. Задав $v(t, \varphi)$ в форме

$$v(t, \varphi) = C_1 \cos 2\varphi \cos \lambda t + C_2 \sin 2\varphi \cos \lambda t + C_3 \cos 2\varphi \sin \lambda t + C_4 \sin 2\varphi \sin \lambda t$$

($C_1—C_4$ — неопределенные коэффициенты) и учитывая (1), найдем:

$$\left. \begin{aligned} v(t, \varphi) &= \left(-\frac{b}{2} \cos 2\varphi + \frac{a}{2} \sin 2\varphi \right) \cos \lambda t + \left(-\frac{n}{2} \cos 2\varphi + \frac{m}{2} \sin 2\varphi \right) \sin \lambda t, \\ v'(t, \varphi) &= w(t, \varphi), \\ v''(t, \varphi) &= w'(t, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Вычисляя входящие в (8) производные q_2'' и p_2' , в упрощенной форме запишем:

$$\left. \begin{aligned} q_2'' &= \frac{1}{m_p} [m_R (\psi_1'' \ddot{w} + 2\psi_1' \dot{w}' + \psi_1 \ddot{w}'') + d_R (\psi_1'' \dot{w} + 2\psi_1' \dot{w}' + \psi_1 \dot{w}'') + \\ &+ c_R (\psi_1'' w + 2\psi_1' w' + \psi_1 w'') + 2m_T \Omega (\psi_1'' \dot{v} + 2\psi_1' \dot{v}' + \psi_1 \dot{v}'')], \\ p_2' &= \frac{1}{m_p} [m_T (\psi_1' \ddot{v} + \psi_1 \dot{v}') + d_T (\psi_1' \dot{v} + \psi_1 \dot{v}') + c_T (\psi_1' v + \psi_1 v') - 2m_R \Omega (\psi_1' \dot{w} + \psi_1 \dot{w}')]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Путем подстановки в (1) уравнений (5), (9), (10) определим составляющие воздействий q_2'' и p_2' , находящиеся в „резонансе“ с основной формой колебаний резонатора, т.е. составляющие, содержащие функции $\cos 2\varphi \cos \lambda t$, $\sin 2\varphi \cos \lambda t$, $\cos 2\varphi \sin \lambda t$, $\sin 2\varphi \sin \lambda t$. Эти составляющие определяются зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_2'' &= \frac{2\beta_0}{\pi m_p} (m_R \ddot{w}'' + d_R \dot{w}'' + c_R w'' + 2m_T \Omega \dot{v}'') = \frac{2\beta_0}{\pi m_p} (m_R \dot{w}'' + d_R \dot{w}'' + c_R w'' + 2m_T \Omega \dot{w}''), \\ \bar{p}_2' &= \frac{2\beta_0}{\pi m_p} (m_T \dot{v}' + d_T \dot{v}' + c_T v' - 2m_R \Omega \dot{w}') = \frac{2\beta_0}{\pi m_p} (m_T \dot{w}' + d_T \dot{w}' + c_T w' - 2m_R \Omega \dot{w}'). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Усилия (12) образуются от пары элементов подвеса, расположенных по оси OX_1 (см. рис. 1).

Четыре элемента подвеса, расположенные по осям системы координат $OX_1 Y_1$, приводят к образованию усилий

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_4'' &= \frac{4\beta_0}{\pi m_p} (m_R \dot{w}'' + d_R \dot{w}'' + c_R w'' + 2m_T \Omega \dot{w}'), \\ \bar{p}_4' &= \frac{4\beta_0}{\pi m_p} (m_T \dot{w}' + d_T \dot{w}' + c_T w' - 2m_R \Omega \dot{w}'). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Аналогичным образом доказывается, что описываемые функцией $\psi_2(\varphi)$ четыре элемента подвеса, расположенные по осям системы координат $OX_2 Y_2$, развернутой по отношению к системе $OX_1 Y_1$ на угол $\pi/4$, и создают усилия, равные усилиям (13). Таким образом, в правую часть уравнения ММГ R-типа, приведенного к переменной $w(t, \varphi)$, должно войти воздействие $f_{\Pi}(t, \varphi)$:

$$f_{\Pi}(t, \varphi) = -\frac{8\beta_0}{\pi m_p} (m_R \dot{w}'' - m_T \dot{w}'' + d_R \dot{w}'' - d_T \dot{w}'' + c_R w'' - c_T w'' + 2(m_T + m_R) \Omega \dot{w}'). \quad (14)$$

При этом уравнение динамики гироскопа ММГ R-типа принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \ddot{w}'' + 4\Omega \dot{w}' + \xi_1 (\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') + \chi^2 (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \bar{m}_R \ddot{w}'' - \bar{m}_T \ddot{w}'' + \\ + \bar{d}_R \dot{w}'' - \bar{d}_T \dot{w}'' + \bar{c}_R w'' - \bar{c}_T w'' + \bar{g} \Omega \dot{w}' = f_B(t, \varphi) + f_K(t, \varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\chi^2 = \frac{Eh^2}{12\rho r^4}$, $\xi_1 = \frac{\xi h^2}{12\rho r^4}$, ξ — коэффициент сил вязкого трения в теле кольца, $f_B(t, \varphi)$ —

приведенное радиальное усилие возбуждения, $f_K(t, \varphi)$ — приведенное радиальное усилие, создаваемое системой компенсации для ММГ R-типа, работающего в режиме датчика угловой скорости [7]; \bar{c}_R , \bar{c}_T , \bar{d}_R , \bar{d}_T , \bar{m}_R , \bar{m}_T , \bar{g} — коэффициенты, определяющие приведенные упругие, демпфирующие, инерционные и кориолисовы силы, воздействующие на резонатор со стороны подвеса.

Из (14) следует:

$$\begin{aligned} \bar{m}_R &= \frac{8\beta_0 m_R}{\pi m_p}, \quad \bar{m}_T = \frac{8\beta_0 m_T}{\pi m_p}, \quad \bar{d}_R = \frac{8\beta_0 d_R}{\pi m_p}, \\ \bar{d}_T &= \frac{8\beta_0 d_T}{\pi m_p}, \quad \bar{c}_R = \frac{8\beta_0 c_R}{\pi m_p}, \quad \bar{c}_T = \frac{8\beta_0 c_T}{\pi m_p}, \quad \bar{g} = \frac{16\beta_0 (m_T + m_R)}{\pi m_p}. \end{aligned} \quad (16)$$

Первые пять слагаемых левой части уравнения (15) соответствуют известной модели динамики кольцевого резонатора [4—6], остальные элементы определяют приведенные воздействия на резонатор со стороны упругого подвеса. В полном виде модель (15) позволяет проектировать ММГ R-типа как единую конструкцию резонатор—упругий подвес. Для простейшей схемы упругого элемента, приведенной на рис. 1, расчет коэффициентов (16) не представляет сложности. Для более сложных схем упругого элемента расчет коэффициентов (16) может быть реализован с использованием методов конечных элементов и соответствующих программных средств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-08-01016.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hopkin I.* Performance and Design of Silicon Micromachined Gyro // Symposium Gyro Technology. Germany, 1997. P. 1.0—1.10.
2. *Fell C. P., Hopkin I., Townsend K., Sturland I.* A Second Generation Silicon Ring Gyroscope // Symposium Gyro Technology. Germany, 1999.
3. *Zarabadi S.* A Resonating Comb/Ring Angular Rate Sensor // Delphi Delco Electronics Systems, Sensors and Actuators. 1999. SP-1443.
4. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
5. *Северов Л. А.* Механика гироскопических систем. М.: МАИ, 1996. 212 с.
6. *Матвеев В. Л., Липатников В. И., Алехин А. В.* Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: МГТУ, 1998. 168 с.
7. *Северов Л. А., Золотарев С. К., Овчинникова Н. А., Панферов А. И., Пономарев В. К.* Информационные характеристики микромеханических гироскопов на основе кремниевой технологии микроэлектромеханических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. № 8. С. 12—23.

Сведения об авторах

- Леонид Анатольевич Северов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра эксплуатации и управления аэрокосмическими системами;
E-mail: severov@aanet.ru
- Валерий Константинович Пономарев** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра эксплуатации и управления аэрокосмическими системами;
E-mail: severov@aanet.ru
- Александр Иванович Панферов** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра эксплуатации и управления аэрокосмическими системами;
E-mail: panferov@aanet.ru
- Наталья Анатольевна Овчинникова** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра эксплуатации и управления аэрокосмическими системами;
E-mail: reale@mail.ru

Рекомендована кафедрой
эксплуатации и управления
аэрокосмическими системами

Поступила в редакцию
25.11.13 г.