

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВ

О. В. ЗАЙЦЕВ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olgerd@yandex.ru*

Концерн «ЦНИИ „Электронприбор“», 197046, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается метод оценивания сигнала, представляемого в кусочно-полиномиальном виде с учетом ограничений на сам сигнал и его производную. Получены аналитические выражения для элементов матрицы, описывающей кусочно-полиномиальное представление оцениваемого сигнала. С помощью методических примеров количественно оценен выигрыш в точности оценивания сигнала за счет учета ограничений.

Ключевые слова: *оценивание случайных процессов, кусочно-полиномиальное представление, неопределенность стохастических моделей*

Введение. При решении технических задач нередко приходится иметь дело с процессами, динамика которых частично или полностью неизвестна. Создание точной математической модели таких процессов не представляется возможным, так как учесть воздействие непредсказуемых внешних возмущений достаточно сложно. К примеру, на практике часто требуется оценить навигационные и динамические параметры (НДП) морских транспортных средств. В этом случае скорость течения и направление ветра являются априори неизвестными величинами. Поэтому при оценивании сигналов навигационных систем применяются инвариантные или неинвариантные алгоритмы [1]. Выбор подхода зависит от наличия достоверных стохастических моделей оцениваемого сигнала.

Инвариантный алгоритм применяется при оценке сигналов с неизвестной моделью динамики [2, 3]. Неинвариантный алгоритм обработки позволяет повысить точность оценивания сигнала за счет использования детальной модели его динамики [4—6]. Однако в реальных условиях полное описание стохастической модели движения объекта часто недоступно, что затрудняет использование известной неинвариантной схемы обработки. Для преодоления трудностей, связанных с неопределенностью модели динамики объекта при использовании неинвариантной схемы, существует ряд методов, которые, однако, не свободны от недостатков. Так, недостатками адаптивных многоальтернативных методов являются анализ лишь счетного числа гипотез, а также трудоемкость, неприемлемая для бортовых вычислителей [7—9]. Существенное сокращение вычислительной сложности многоальтернативных методов возможно лишь при соблюдении специальных условий [10—12].

Робастные гарантирующие методы учитывают ограничения на величину оцениваемых сигналов и дисперсии их производных [13—16]. При реализации этих методов предполагается, что при заданных ограничениях решение имеет наихудшую точность. Для реализации робастных методов без гарантирующих свойств используется фильтр Калмана (ФК), настроенный на квазидетерминированное описание процессов на ограниченных интервалах времени. При этом невозможно учесть ограничения на оцениваемые процессы и связь квазидетерминированных функций на соседних интервалах времени [17].

Перспективным представляется неинвариантное решение задачи оценивания НДП, характеризующихся неопределенными стохастическими моделями, на основе кусочно-полиномиального

представления параметров с учетом непрерывной дифференцируемости и ограничений на их уровень и величину производных [18]. Априорная информация об ограничениях может быть получена исходя из эксплуатационных и динамических характеристик объекта.

Постановка задачи. Рассматривается задача оценивания сигнала, принадлежащего к классу непрерывных и гладких сигналов, допускающих кусочно-полиномиальное представление. Также известны ограничения на сигнал и его производную. Оцениваемый параметр (полезный сигнал) формируется некоторой безразмерной скалярной функцией $\rho(t)$ и представляется в виде l -мерного вектора:

$$\mathbf{q}(t) = \left(q^T(t), c(t)\rho(t) \right)^T, \quad (1)$$

где $c(t)$ — функция, масштабирующая область значений $\rho(t)$ в заданном диапазоне, а $(l-1)$ -мерный вектор $q(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{q}(t) = F(t)q(t) + C(t)\rho(t), \quad q(0) = q_0, \quad (2)$$

где $F(t)$ — матрица, характеризующая звено задержки; $C(t)$ — матрица, определяющая влияние $\rho(t)$ на $q(t)$; q_0 — неизвестное начальное условие.

Матрицы $F(t)$ и $C(t)$ известны и определяются таким образом, чтобы в качестве переменных рассматривать навигационные и динамические параметры подвижного объекта.

Предполагается, что известны ограничения на величину сигнала и его производную:

$$|\rho(t)| \leq 1, \quad |\dot{\rho}(t)| \leq \bar{\rho}. \quad (3)$$

Кроме того, на интервалах времени $[t^{(s-1)}, t^{(s)}]$, где $t^{(s)} = sT$, $s = 1, \dots, S$ — номер интервала, T — его длительность, функция $\rho(t)$ допускает кусочно-полиномиальное представление 2-го порядка [18]:

$$\rho^s(t) = b_0^{(s)} + b_2^{(s)} \frac{t - t^{(s-1)}}{T} + \left(b_1^{(s)} - b_0^{(s)} - b_2^{(s)} \right) \frac{(t - t^{(s-1)})^2}{T^2}, \quad (4)$$

где коэффициенты связаны соотношениями

$$b_0^{(s+1)} = b_1^{(s)}, \quad b_2^{(s+1)} = 2b_1^{(s)} - 2b_0^{(s)} - b_2^{(s)}, \quad (5)$$

которые обеспечивают выполнение условий непрерывности функций $\rho(t)$ и $\dot{\rho}(t)$:

$$\rho(t^{(s)} - 0) = \rho(t^{(s)} + 0), \quad \dot{\rho}(t^{(s)} - 0) = \dot{\rho}(t^{(s)} + 0). \quad (6)$$

Требуется найти оценки вектора $\mathbf{q}(t)$ в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$ по набору m -мерных измерений вида

$$z_k = G_k \mathbf{q}(t_k) + H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k, \quad (7)$$

где $\mathbf{x}_k = \Phi_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k$ — n -мерный вектор, описывающий коррелированные во времени помехи; матрицы $G_k = \begin{bmatrix} G_{1k} & 0 \\ 0 & G_{2k} \end{bmatrix}$, H_k , Φ_k , а также ковариационные матрицы векторов \mathbf{w}_k , \mathbf{n}_k считаются известными; \mathbf{w}_k , \mathbf{n}_k — взаимно независимые дискретные гауссовы белые шумы с нулевым средним.

В методических целях рассмотрим пример, для которого $l=2$, $c(t)=1$, $F(t) = 0$, $C(t)=1$. Тогда $\dot{q}(t) = \rho(t)$. Производя интегрирование $\rho^s(t)$ по времени на каждом интервале кусочно-полиномиального представления и суммируя результаты, получаем выражение для $q(t)$ на s -м интервале времени:

$$q^s(t) = \int_0^{t_1} \rho(t) dt + q_0 = \sum_{k=1}^{s-1} \int_{(k-1)T}^{kT} \rho^k(t) dt + \int_{(s-1)T}^{t_1} \rho^s(t) dt + q_0, \quad (8)$$

где t_1 — текущий момент времени.

Запишем формулу (4) в том виде, в котором она будет использоваться в алгоритме оценивания:

$$\rho^S(t) = B(t)\mathbf{b}^{(S)}, \quad (9)$$

где $\mathbf{b}^{(S)} = (b_0^{(1)}, b_0^{(2)}, b_1^{(1)}, \dots, b_0^{(S)})^T$, $B(t)$ — вектор-строка.

Получим выражение для $q^S(t)$ в аналогичном виде. Для этого подставим в (8) вместо $\rho^k(t)$ выражение (9), вычислим соответствующие интегралы на каждом интервале и просуммируем полученные результаты. Тогда формулу (8) можно свести к виду

$$q^S(t) = B_q(t)\mathbf{b}^{(S)} + q_0, \quad (10)$$

где $B_q(t)$ — вектор-строка.

Таким образом, исходную задачу оценивания вектора $\mathbf{q}(t)$ для разных моментов времени можно свести к оцениванию вектора состояния

$$\mathbf{X}_k = \left(\mathbf{x}_k^T, \left(\mathbf{b}^T \right)^{(S)}, q_0 \right)^T, \quad (11)$$

включающего компоненты \mathbf{x}_k , $\mathbf{b}^{(S)}$ и q_0 , описываемые уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_k^{(S)} &= \mathbf{b}_{k-1}^{(S)} = \mathbf{b}^{(S)}; \\ q_{0k} &= q_{0k-1} = q_0, \\ \mathbf{x}_k &= \Phi_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Вектор состояния \mathbf{X}_k оценивается по измерениям, представленным двумерным вектором, полученным подстановкой выражений (10) и (9) в (7):

$$\left. \begin{aligned} z_{1k} &= G_{1k} B(t_k) \mathbf{b}^{(S)} + H_{1k} \mathbf{x}_{1k} + \mathbf{n}_{1k}, \\ z_{2k} &= G_{2k} \left(B_q(t_k) \mathbf{b}^{(S)} + q_0 \right) + H_{2k} \mathbf{x}_{2k} + \mathbf{n}_{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Алгоритм оценивания случайных процессов с учетом ограничений. Кратко изложим теоретические основы алгоритма решения представленной задачи [18]. В качестве критерия оценивания используется функция правдоподобия измерений z_k относительно вектора полиномиальных коэффициентов $\mathbf{b}^{(S)}$ и начального условия q_0 . Тогда задача сводится к максимизации выражения

$$\left(\hat{\mathbf{b}}^{(S)}, \hat{q}_0 \right) = \arg \max_{\mathbf{b}^{(S)} \in \mathcal{B}^{(S)}, q_0} f(z_k | \mathbf{b}^{(S)}, q_0), \quad (14)$$

где $\mathcal{B}^{(S)}$ — область, включающая те и только те значения $\mathbf{b}^{(S)}$, при которых выполняются ограничения (3); $f(z_k | \mathbf{b}^{(S)}, q_0)$ — функция правдоподобия.

Получение оценок по формуле (14) характеризуется большой вычислительной сложностью. Значительно упростить процедуру расчета, как показано в работе [18], можно за счет применения двухэтапного алгоритма оценивания. На первом этапе вектор состояния (11) оценивается фильтром Калмана без учета ограничений на функцию $\rho(t)$. В качестве начальных значений для ФК используются вектор состояния $\mathbf{X}_k = 0$ и набор некоторых конечных значений априорных дисперсий компонент $\mathbf{b}^{(S)}$, q_0 и \mathbf{x}_k .

На втором этапе уточняются полиномиальные коэффициенты с учетом ограничений на область их определения и начальное условие \hat{q}_0 в результате оптимизации квадратичной целевой функции

$$\hat{\mathbf{b}}^{(S)} = \arg \min_{\mathbf{b}^{(S)} \in \mathcal{B}^{(S)}} (\mathbf{b}^{(S)} - \tilde{\mathbf{b}}^{(S)})^T P_{\mathbf{b}^{(S)}}^{-1} (\mathbf{b}^{(S)} - \tilde{\mathbf{b}}^{(S)}), \quad \hat{q}_0 = \tilde{q}_0 + P_{q_0, \mathbf{b}^{(S)}} P_{\mathbf{b}^{(S)}}^{-1} (\hat{\mathbf{b}}^{(S)} - \tilde{\mathbf{b}}^{(S)}), \quad (15)$$

где $\hat{\mathbf{b}}^{(S)}$ — оценка вектора коэффициентов после выполнения второго этапа, $\tilde{\mathbf{b}}^{(S)}, P_{\mathbf{b}^{(S)}}^{-1}$ — оценка и ковариационная матрица ошибки оценки вектора коэффициентов после выполнения первого этапа, \tilde{q}_0 — оценка начального условия после выполнения первого этапа, $P_{q_0, \mathbf{b}^{(S)}}$ — недиагональный блок ковариационной матрицы ошибок оценок $\tilde{\mathbf{b}}^{(S)}$ и \tilde{q}_0 .

Используемые в выражении (15) оценки $\tilde{\mathbf{b}}^{(S)}$, \tilde{q}_0 и блоки ковариационной матрицы их ошибок определяются по результатам оценивания вектора \mathbf{X}_k для последнего момента времени.

Результаты моделирования. В качестве примеров функционирования алгоритма рассмотрим задачи оценивания гармонического и частотно-модулированного по линейному закону (ЛЧМ) сигналов.

1. Гармонический сигнал описывается выражением

$$\rho(t) = \sin \left(\frac{2\pi t}{T_1} + \varphi_0 \right),$$

где $T_1 = 8$ с — период гармонического сигнала, φ_0 — начальная фаза.

Производная и первообразная функции $\rho(t)$ определяются как

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= \frac{2\pi}{T_1} \cos \left(\frac{2\pi t}{T_1} + \varphi_0 \right), \\ q(t) &= \frac{T_1}{2\pi} \left(-\cos \left(\frac{2\pi t}{T_1} + \varphi_0 \right) + \cos \varphi_0 \right). \end{aligned}$$

Зададим ограничения для $\rho(t)$ и $\dot{\rho}(t)$ в следующем виде:

$$|\rho(t)| \leq 1, \quad |\dot{\rho}(t)| \leq \frac{2\pi}{T_1}.$$

2. ЛЧМ-сигнал описывается выражением

$$\rho(t) = \sin (2\pi f_c + \varphi_0),$$

где частота сигнала изменяется по закону

$$f_c = \left(\frac{f_{c\max} - f_{c\min}}{2} + \frac{(f_{c\max} - f_{c\min}) \cdot t}{T_2} \right),$$

где $f_{c\max} = 0,125$ Гц — максимальная частота сигнала, $f_{c\min} = 0,0625$ Гц — минимальная частота сигнала, $T_2 = 24$ с — период изменения частоты от $f_{c\min}$ до $f_{c\max}$.

Производная

$$\dot{\rho}(t) = \frac{f_{c\max} - f_{c\min}}{T_2} \cos (2\pi f_c + \varphi_0),$$

тогда ограничения для $\rho(t)$ и $\dot{\rho}(t)$ можно записать как

$$|\rho(t)| \leq 1, \quad |\dot{\rho}(t)| \leq \frac{f_{c\max} - f_{c\min}}{T_2}.$$

В обоих случаях интервал кусочно-полиномиального представления $T = 1$ с. Следует отметить, что длительность интервала кусочно-полиномиального представления должна обеспечивать достаточно точную аппроксимацию самого высокочастотного фрагмента сигнала.

Коррелированные помехи x_k для измерений z_{1k} в (13) являются стационарными марковскими процессами с матрицей динамики $\Phi_1 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$ и матрицей возмущений

$G_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{2\alpha} \end{bmatrix}$. Коррелированные помехи для измерений z_{2k} в (13) являются стационарными марковскими процессами с матрицей динамики $\Phi_2 = -\alpha$ и матрицей возмущений

$G_2 = \sigma_3 \sqrt{2\alpha}$. Интервал корреляции $\tau = 1/\alpha = 4$ с, дисперсии $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0,05$. Порождающий белый шум имеет единичную интенсивность. Матрица G_k в уравнении (7) — единичная. Матрица интенсивностей шумов измерений, входящих в уравнения (13), имеет вид

$R_1 = \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_q \end{bmatrix}$, где $R_p = 100$ — интенсивность шума измерений z_{1k} , $R_q = 0,01$ — интенсивность шума измерений z_{2k} . Матрицы наблюдений в уравнениях (13) имеют вид

$H_{1k} = [\cos(\beta t) \quad \sin(\beta t)]$, $H_{2k} = 1$, где $\beta = 2\pi/T_\beta$, $T_\beta = 2$ с — преобладающий период измерений.

Длительность решения составляет 24 с.

Было промоделировано 100 вариантов реализаций измерений одного и того же полезного сигнала, но при разных шумах измерений. Результаты моделирования представлены на рис. 1—3.

На рис. 1, а, б показаны ошибки оценки для гармонического сигнала $\rho(t)$ и их СКО (σ) без учета ограничений и с учетом ограничений соответственно, а на рис. 2, а, б — для ЛЧМ-сигнала. Анализ рис. 2, б показывает, что в конце реализации ошибка оценки уменьшается. Частота сигнала на этом участке времени больше, поэтому более явно выражен эффект от учета ограничений. Для случаев учета ограничений значение σ посчитано на основании множества реализаций.

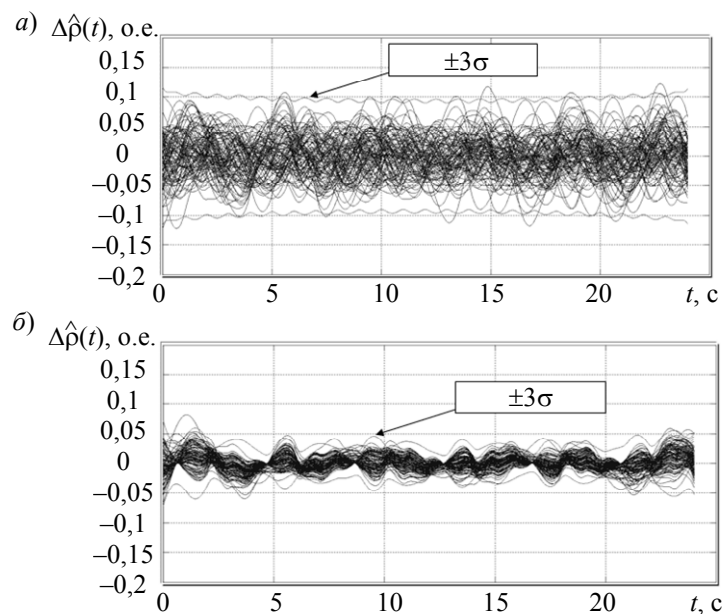


Рис. 1

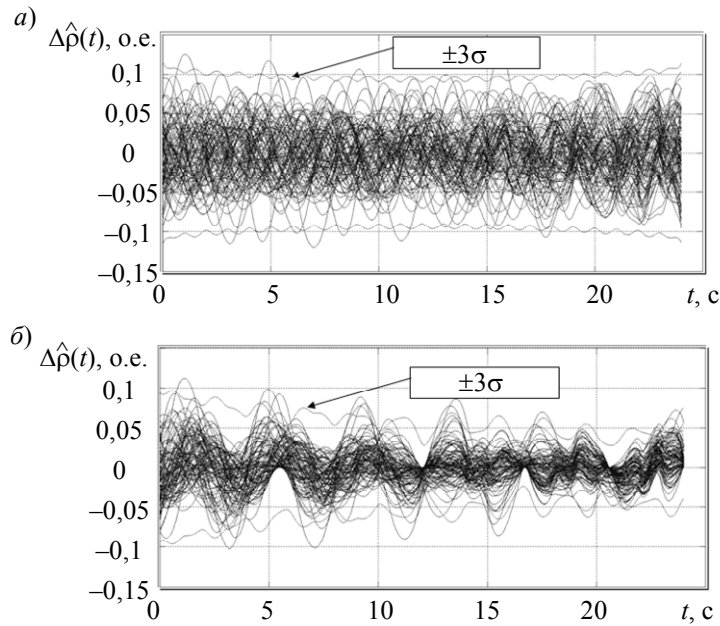


Рис. 2

Ошибки оценки для гармонического сигнала $q(t)$ и их СКО без учета ограничений и с учетом ограничений приведены на рис. 3, а, б соответственно.

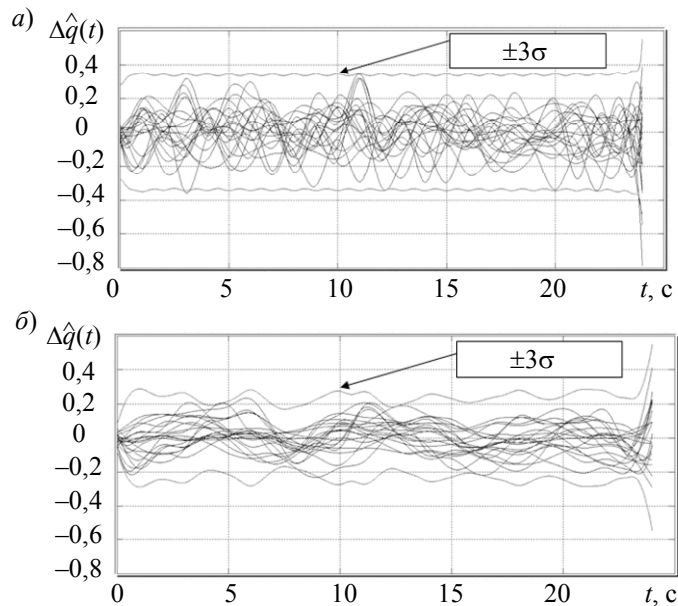


Рис. 3

Эффект, демонстрирующий повышение точности оценивания, в случае сигнала $q(t)$ выражен слабее, чем для $\rho(t)$, так как на процесс $q(t)$ ограничения непосредственно не накладывались. Анализ полученных результатов, тем не менее, показывает преимущество решения, учитывающего ограничения.

Другим результатом работы является получение аналитических выражений для элементов матриц $B(t)$ и $B_q(t)$. Вместо $B(t)$ и $B_q(t)$ будем использовать $\tilde{B}_i^s(\tau)$ и $\tilde{B}_{qi}^s(\tau)$ соответственно, где s — номер интервала, i — номер элемента матрицы, T — длительность интервала, $\tau = \frac{t - (s-1)T}{T}$, $\tau \in [0, 1)$.

Общие формулы для $\tilde{B}_i^s(\tau)$ и $\tilde{B}_{qi}^s(\tau)$ имеют следующий вид:

$$\tilde{B}_i^s(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau^2 & \text{при } s = i = 1; \\ (-1)^{s+1} \cdot 2(\tau - \tau^2) & \text{при } s \geq 2 \text{ и } i = 1; \\ (-1)^{s+1}(\tau - \tau^2) & \text{при } i = 2; \\ (-1)^{s+i+1} \cdot 4(\tau - \tau^2) & \text{при } 3 \leq i \leq s; \\ 1 + 2\tau - 3\tau^2 & \text{при } s \geq 2 \text{ и } i = s + 1; \\ \tau^2 & \text{при } i = s + 2; \\ 0 & \text{при } i > s + 2; \end{cases} \quad (16)$$

$$\tilde{B}_{qi}^s(\tau) = \begin{cases} \tau - \frac{\tau^3}{3} & \text{при } s = i = 1; \\ \sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{qi}^k(1) + (-1)^{s+1} \cdot 2 \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) & \text{при } s \geq 2 \text{ и } i = 1; \\ \sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{qi}^k(1) + (-1)^{s+1} \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) & \text{при } i = 2; \\ \sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{qi}^k(1) + (-1)^{s+i+1} \cdot 4 \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) & \text{при } 3 \leq i \leq s; \\ \sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{qi}^k(1) + \tau + \tau^2 - \tau^3 & \text{при } s \geq 2 \text{ и } i = s + 1; \\ \tau^3/3 & \text{при } i = s + 2; \\ 0 & \text{при } i > s + 2. \end{cases} \quad (17)$$

Доказательство формулы (16) для $\tilde{B}_i^s(\tau)$ при $s \geq 3$ приведено в Приложении.

Выражения для i -го элемента матриц $\tilde{B}_i^s(\tau)$ и $\tilde{B}_{qi}^s(\tau)$ для первых трех интервалов при $\tau \in [0, 1)$ приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

Номер интервала s	Номер элемента i				
	1	2	3	4	5
$s = 1$	$1 - \tau^2$	$\tau - \tau^2$	τ^2	0	0
$s = 2$	$-2(\tau - \tau^2)$	$-(\tau - \tau^2)$	$1 + 2\tau - 3\tau^2$	τ^2	0
$s = 3$	$2(\tau - \tau^2)$	$\tau - \tau^2$	$-4(\tau - \tau^2)$	$1 + 2\tau - 3\tau^2$	τ^2

Таблица 2

Номер интервала s	Номер элемента i				
	1	2	3	4	5
$s = 1$	$\tau - \frac{\tau^3}{3}$	$\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}$	$\frac{\tau^3}{3}$	0	0
$s = 2$	$\sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{q1}^k(1) - 2\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right)$	$\sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{q2}^k(1) - \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right)$	$\sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{q3}^k(1) + \tau + \tau^2 - \tau^3$	$\frac{\tau^3}{3}$	0
$s = 3$	$\sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{q1}^k(1) + 2\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right)$	$\sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{q2}^k(1) + \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}$	$\sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{q3}^k(1) - 4\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right)$	$\sum_{k=1}^{s-1} \tilde{B}_{q4}^k(1) + \tau + \tau^2 - \tau^3$	$\frac{\tau^3}{3}$

Заключение. Использование априорной информации об ограничениях на величину сигнала и его производную в условиях неопределенности стохастического описания динамики объектов позволяет повысить точность вырабатываемых оценок. Несмотря на то что ограничения достигаются только в отдельных точках, это сказывается на точности оценок для всех моментов времени благодаря плавности оцениваемого процесса. Ограничение на производную устанавливается по ее максимальному значению на рассматриваемом интервале времени. Эффект уточнения оценок для первообразной функции выражен слабее.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство формулы (16) для матрицы $\tilde{B}_i^s(\tau)$ при $s \geq 3$. Используя выражения (4) и (5), необходимо доказать, что кусочно-полиномиальное представление функции $\rho(t)$ для k -го интервала времени $[t^{(k-1)}, t^{(k)}]$ выражается через коэффициенты $\mathbf{b}^{(s)} = (b_0^{(1)}, b_0^{(2)}, b_1^{(1)}, \dots, b_0^{(s)})^T$ и переменную $\tau = \frac{t - (s-1)T}{T}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= b_0^{(k)}(1 - \tau^2) + b_2^{(k)}(\tau - \tau^2) + b_1^{(k)}\tau^2 = \\ &= (-1)^{(k+1)} \cdot 2(\tau - \tau^2)b_0^{(1)} + (-1)^{(k+1)}(\tau - \tau^2)b_2^{(1)} + (-1)^{(k+4)} \cdot 4(\tau - \tau^2)b_1^{(1)} + \dots \\ &\dots + (-1)^{(2-k+1)} \cdot 4(\tau - \tau^2)b_1^{(k-2)} + (1 + 2\tau - 3\tau^2)b_1^{(k-1)} + \tau^2 b_1^{(k)}. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Предположим, что утверждение (П.1) верно, и докажем, что из этого следует справедливость представления $\rho(t)$ для $s = (k + 1)$ -го интервала:

$$\begin{aligned} &b_0^{(k+1)}(1 - \tau^2) + b_2^{(k+1)}(\tau - \tau^2) + b_1^{(k+1)}\tau^2 = \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \cdot 2b_0^{(1)}(\tau - \tau^2) + (-1)^{(k+1)+1}b_2^{(1)}(\tau - \tau^2) + \\ &+ (-1)^{(k+1)+4} \cdot 4b_1^{(1)}(\tau - \tau^2) + \dots + (-1)^{(k+1)+k+1} \cdot 4b_1^{(k-2)}(\tau - \tau^2) + \\ &+ (-1)^{(k+1)+(k+1)+1} \cdot 4b_1^{(k-1)}(\tau - \tau^2) + b_1^{(k)}(1 + 2\tau - 3\tau^2) + b_1^{(k+1)}\tau^2. \end{aligned} \tag{П.2}$$

Преобразуем правую часть выражения (П.2):

$$\begin{aligned}
& b_0^{(k+1)}(1-\tau^2) + b_2^{(k+1)}(\tau-\tau^2) + b_1^{(k+1)}\tau^2 = \\
& = -[(-1)^{(k+1)} \cdot 2(\tau-\tau^2)b_0^{(1)} + (-1)^{(k+1)}b_2^{(1)}(\tau-\tau^2) + \\
& + (-1)^{(k+4)} \cdot 4b_1^{(1)}(\tau-\tau^2) + \dots - 4(-1)^{(2 \cdot k+1)}b_1^{(k-2)}(\tau-\tau^2)] - 4b_1^{(k-1)}(\tau-\tau^2) + \\
& + b_1^{(k)}(1+2\tau-3\tau^2) + b_1^{(k+1)}\tau^2.
\end{aligned} \tag{П.3}$$

Заменим в (П.3) выражение в квадратных скобках слагаемыми из (П.1). Тогда выражение (П.3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& b_1^{(k)}(1+2\tau-3\tau^2) - 2b_0^{(k)}(\tau-\tau^2) - b_2^{(k)}(\tau-\tau^2) = \\
& = -(b_0^{(k)}(1-\tau^2) + b_2^{(k)}(\tau-\tau^2) + b_1^{(k)}\tau^2 - (1+2\tau-3\tau^2)b_1^{(k-1)} - \tau^2b_1^{(k)}) - \\
& - 4b_1^{(k-1)}(\tau-\tau^2) + b_1^{(k)}(1+2\tau-3\tau^2).
\end{aligned} \tag{П.4}$$

Далее еще раз воспользуемся соотношениями (5), выразив элементы вектора $\mathbf{b}^{(S)}$ для k -го интервала через элементы вектора $\mathbf{b}^{(S)}$ для $(k-1)$ -го интервала, и сократим одинаковые слагаемые в обеих частях доказываемого тождества:

$$-2b_1^{(k-1)}(\tau-\tau^2) = -b_1^{(k-1)}(1-\tau^2) + (1+2\tau-3\tau^2)b_1^{(k-1)} - 4b_1^{(k-1)}(\tau-\tau^2).$$

Перенесем все слагаемые в левую часть и убедимся в тождественности левой и правой частей:

$$\begin{aligned}
& 4b_1^{(k-1)}(\tau-\tau^2) - 2b_1^{(k-1)}(\tau-\tau^2) + b_1^{(k-1)}(1-\tau^2) - (1+2\tau-3\tau^2)b_1^{(k-1)} = \\
& = b_1^{(k-1)}(4\tau-4\tau^2-2\tau+2\tau^2+1-\tau^2-1-2\tau+3\tau^2) = b_1^{(k-1)} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение (П.1) доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриев С. П., Степанов О. А. Неинвариантные алгоритмы обработки информации инерциальных навигационных систем // Гироскопия и навигация. 2000. № 1. С. 24—39.
2. Степанов О. А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 1998. 370 с.
3. Степанов О. А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 2010. 509 с.
4. Степанов О. А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 2. Введение в теорию фильтрации. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 2012. 417 с.
5. Брок А., Шмидт Я. Статистическая оценка в системах инерциальной навигации // Вопросы ракетной техники. 1967. № 1.
6. Степанов О. А., Торопов А. Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Современные тенденции развития. Ч. 2 // Гироскопия и навигация. 2015. № 4 (91). С. 147—159.
7. Дмитриев С. П. Высокоточная морская навигация. СПб: Судостроение, 1991.
8. Дмитриев С. П., Колесов Н. В., Осипов А. В. Информационная надежность, контроль и диагностика информационных систем. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 2003.
9. Дмитриев С. П., Степанов О. А. Многоальтернативная фильтрация в задачах обработки навигационной информации // Радиотехника. 2004. № 7. С. 11—17.
10. Дмитриев С. П., Кошаев Д. А., Степанов О. А. Многоканальная фильтрация и ее применение для исключения неоднозначности при позиционировании объектов с помощью GPS // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 1. С. 65—70.
11. Кошаев Д. А. Многоальтернативный метод обнаружения и оценки нарушений на основе расширенного фильтра Калмана // Автоматика и телемеханика. 2010. № 5. С. 70—83.

12. Кошаев Д. А. Метод фиктивных измерений для многоальтернативного оценивания процессов в линейной стохастической системе // Автоматика и телемеханика. 2016. № 6. С. 81—108.
13. Maybeck P. S. Stochastic Models, Estimation and Control. Academic Press, 1982. Vol. 3.
14. Кулакова В. И., Небылов А. В. Гарантированное оценивание сигналов с ограниченными дисперсиями производных // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 83—96.
15. Лопарев А. В., Степанов О. А., Кулакова В. И. Приближенное решение задачи робастной фильтрации с использованием метода локальных аппроксимаций спектральных плотностей // Гироскопия и навигация. 2013. № 3(82). С. 85—90.
16. Matasov A. I. Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1998.
17. Salychev O. S. Inertial Systems in Navigation and Geophysics. M.: Bauman Moscow State Techn. Univ. Press, 1988.
18. Дмитриев С. П., Кошаев Д. А. Оценивание непрерывно дифференцируемого сигнала с учетом ограничений // Автоматика и телемеханика. 2011. № 3. С. 7—14.

Сведения об авторе

Олег Владимирович Зайцев — Университет ИТМО, кафедра информационно-навигационных систем, мл. научный сотрудник; ЦНИИ „Электроприбор“; E-mail: olgerd@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
информационно-навигационных систем

Поступила в редакцию
29.09.16 г.

Ссылка для цитирования: Зайцев О. В. Повышение точности оценивания стохастически-неопределенных процессов с учетом ограничений в виде неравенств // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 3. С. 211—220.

**IMPROVEMENT IN ACCURACY OF ASSESSMENT
OF STOCHASTICALLY UNCERTAIN PROCESSES
WITH THE ACCOUNT FOR RESTRICTIONS IN THE FORM OF INEQUALITIES**

O. V. Zaitsev

*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: olgerd@yandex.ru
Concern CSRI Elektropribor, 197046, St. Petersburg, Russia*

A method is considered for evaluating signals represented in piecewise polynomial form to fit within restrictions on signal level and its derivative. Analytical expression for matrix elements describing piecewise polynomial form of the signal are obtained. With the help of presented examples, quantified the gain in precision of estimating the signal due to the restrictions is quantified.

Keywords: random processes assessment, piecewise polynomial form, stochastic models uncertainty

Data on author

Oleg V. Zaitsev — ITMO University, Department of Information and Navigation Systems, Junior Researcher; Concern CSRI Elektropribor; E-mail: olgerd@yandex.ru

For citation: Zaitsev O. V. Improvement in accuracy of assessment of stochastically uncertain processes with the account for restrictions in the form of inequalities // Journal of Instrument Engineering. 2017. Vol. 60, N 3. P. 211—220 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-3-211-220